三次 Catmull-Rom 样条保广义凸插值的充要条件

王子睿, 章仁江*, 金曼莎

(浙江工商大学统计与数学学院 杭州 310018)
(renjiang@zjgsu.edu.cn)

摘要: 对于任意给定的有序点列, 利用三次 Catmull-Rom 样条基函数构造通过该点列的曲线, 导出三次 Catmull-Rom 样条曲线保凸插值的充要条件; 进而利用广义凸的概念, 导出三次 Catmull-Rom 样条参数曲线保广义凸插值的充要条件. 当所给点列满足保广义凸插值的充要条件时, 三次 Catmull-Rom 样条参数曲线是自动保广义凸的且是 G^1 连续的. 采用自行构造的实例佐证了方法的有效性和理论的正确性.

关键词: Catmull-Rom 样条; 保凸; 插值曲线; G^1 连续

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SPJ.1089.2021.18814

Sufficient and Necessary Conditions of Cubic Catmull-Rom Spline Preserving Generalized Convex Interpolation

Wang Zirui, Zhang Renjiang*, and Jin Mansha

(School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018)

Abstract: For any given sequence of points, the expression of cubic Catmull-Rom spline basis function is used to construct a curve through those points, and the sufficient and necessary conditions of cubic Catmull-Rom spline preserving convex interpolation are derived. Furthermore, by using the concept of generalized convexity, the sufficient and necessary conditions of the cubic parameter Catmull-Rom spline preserving generalized convex interpolation are derived. When the given sequence of points satisfies the sufficient and necessary conditions for preserving generalized convex interpolation obtained, the cubic parameter Catmull-Rom spline curve of the interpolating points is an automatically preserving generalized convex and G^1 continuous curve. The validity of the method and the correctness of the theory are proved by some constructed examples.

Key words: Catmull-Rom spline; convexity preserving; interpolating curve; G^1 continuous

在 CAD 和函数逼近论中, 对于给定平面上的有序点列, 构造一条保凸光滑曲线通过该点列是重要的研究课题. 对于具有凸性的原始点列, 如果一个构造方法所构造的曲线也是凸的, 则称其具有保凸性. 已有很多的保凸插值方法, 如使用 B-样条曲线、Bézier 曲线和三角样条等通过保凸

条件获得方程组^[1-7], 使用细分方法获得保凸细分曲线^[8-14]. 文献[6]引入点列广义凸性的概念, 针对给定平面上的广义凸(凹)点列, 提出构造广义凸曲线的有效方法, 之后又对其进行改进与推广^[7]. 本文利用三次 Catmull-Rom 样条基函数构造插值曲线, 其优点是只要给定有序点列, 插值

收稿日期: 2020-11-26; 修回日期: 2021-01-30. 基金项目: 国家自然科学基金(61772025); 浙江省自然科学基金(LY20F020004). 王子睿(1996—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机辅助设计; 章仁江(1967—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机辅助设计、函数逼近论等; 金曼莎(1996—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机辅助设计.

曲线方程就是点列 Catmull-Rom 样条基函数的线性组合,这也是所有次数的 Catmull-Rom 样条的共同特点. Catmull-Rom 样条具有一些非常优良的性质,如线性精确性和高阶连续性等,以及 B-样条曲线等所不具有的插值性,用它构造插值曲线无需解方程组. 它只有奇数次,一条 $2n+1$ 次 Catmull-Rom 曲线是 n 阶连续的,尤其重要的是三次 Catmull-Rom 样条,其应用已经商业化,如在体感交互虚拟漫游^[15]及钢轨检测^[16]等方面. 但它构造曲线时也有一个缺点,即它是非保凸的. 为了克服这一缺点,本文研究了三次 Catmull-Rom 样条保凸插值的充要条件,进而利用广义凸的概念,导出三次参数 Catmull-Rom 样条保广义凸插值的充要条件. 对于一个给定的有序点列,当点列满足本文获得的保广义凸插值的充要条件时,三次 Catmull-Rom 样条参数曲线插值该点列且是自动保广义凸的,本文的实例说明了方法的有效性和理论的正确性.

1 预备知识

为方便读者阅读本文,首先回顾广义凸曲线与广义凸点列的概念^[6].

定义 1. 一条光滑的定向曲线,当观察者沿曲线定向行走时,若其上每点的切线均位于曲线在该点邻域的右侧(左侧),则称该曲线为广义凸(凹)曲线.

定义 2. 给定平面上点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, \dots, n)$, 依次连接形成折线段, 若任取其中相邻的 3 条折线, 当观察者沿折线段从序号小的一端走向大的一端时, 首尾 2 条折线均位于中间折线的左侧(右侧), 则称该点列为广义凸(凹)点列.

设给定平面上有序点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$, $\phi(t) (= \phi_0(t))$ 是一个插值样条基函数, 令 $\phi_i(t) = \phi(t-i)$ 是插值样条基函数 $\phi(t)$ 向右平移整数 i 个单位得到的基函数, 则通过点列 $P_i(x_i, y_i)$ 的插值曲线方程可写为^[17]

$$p(t) = \sum_i p_i \phi_i(t).$$

本文采用三次 Catmull-Rom 样条基函数构造插值曲线, 即将插值基函数 $\phi_0(t)$ 用三次 Catmull-Rom 样条基函数^[8-9]

$$I_0^3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 4t + 2, & t \in [-2, -1) \\ -\frac{3}{2}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1, & t \in [-1, 0) \\ \frac{3}{2}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 1, & t \in [0, 1) \\ -\frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t + 2, & t \in [1, 2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

替换.

三次 Catmull-Rom 样条基函数的图像如图 1 所示. 它是 C^1 连续的, 在 $[-2, 2]$ 外值恒为 0, 在整数点 $-2, -1, 1, 2$ 处值为 0, 但在整数点 0 处值为 1.

图 1 三次 Catmull-Rom 样条基函数

引理 1. 若 $x(t), y(t)$ 均为区间 I 上的二阶可导函数, $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0, 则参数曲线为广义凸(凹)曲线的充要条件为

$$y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t) \geq 0 (\leq 0), \quad t \in I \quad (2)$$

证明. 必要性. 设 L 为广义凸曲线, 分 2 种情形讨论.

(1) $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 I 上均没有零点.

由连续性可知, $x'(t) > 0$ 在 I 上恒成立或 $x'(t) < 0$ 在 I 上恒成立. 由曲线广义凸可知, 当 $x'(t) > 0$ 时, 曲线为传统的凸曲线, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3} \geq 0;$$

从而式(2)成立. 当 $x'(t) < 0$ 时, 同理可得式(2)成立.

(2) $x'(t)$ 或 $y'(t)$ 在 I 上至少有一个零点.

不妨设存在 $t_0 \in I$, 使 $y'(t_0) = 0$, 则由连续性可知, 存在邻域 $U(t_0) \in I$ (当 t_0 为区间 I 的端点时, 为右邻域 $U_+(t_0)$ 或左邻域 $U_-(t_0)$), 使在区间 $U(t_0)$ 上, $x'(t) \neq 0$ 恒成立. 将区间 I 与所有这样的邻域 $U(t_0)$ 作差运算之后, 得到的区间设为 I' , 在区间

I' 上, 有 $y'(t) \neq 0$ 恒成立. 对区间 I' 以 $x(t)$ 的驻点为端点进行分段, 则每段为传统凸曲线或传统凹曲线, 且每段均为广义凸曲线. 由情形(1)可知, 在每段上都有式(2)成立.

容易发现, 当任意曲线以某条直线为对称轴作轴对称变换后, 原来在观察者左(右)侧的切线就到了观察者的右(左)侧, 因而曲线的广义凹凸性将发生一次变化. 特别地, 将参数曲线 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

关于直线 $y = x$ 作轴对称变换, 得到新的参数曲线 L' :

$\begin{cases} x = \bar{x}(t) = y(t) \\ y = \bar{y}(t) = x(t) \end{cases}$, 它与原曲线 L 的广义凹凸性恰是相反的.

对广义凸曲线 L 在区间 I' 上的部分作关于直线 $y = x$ 的轴对称变换, 则各新曲线段均为广义凹曲线, 且 $\bar{x}'(t) = y'(t) \neq 0$ 恒成立, 因而有 $\bar{y}''(t)\bar{x}'(t) - \bar{x}''(t)\bar{y}'(t) \leq 0$. 即 $y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t) \geq 0$.

综上, 曲线段 L 为广义凸(凹)曲线时, 式(2)成立.

充分性. 不失一般性, 仅讨论以下情况, 即

$$y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t) \geq 0.$$

若 $x'(t) > 0$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$, 曲线为传统凸曲线, 且随 t 的增大, $x(t)$ 增大, 即观察者从左向右定向行走. 由定义 1 可知, 曲线为广义凸曲线. 同理, 当 $x'(t) < 0$ 时, 曲线也是广义凸的. 当 $x'(t) = 0$, $y'(t) \neq 0$ 时, 将曲线关于直线 $y = x$ 作轴对称变换后讨论, 也可以得到相同的结论. 证毕.

推论 1. 若 $x(t), y(t)$ 均为区间 I 上二阶连续可导函数, 存在区间 I 上一内点 t_0 使得 $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, 则参数曲线 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ 为广义凸(凹)曲线的必要条件为 $x''(t_0) = y''(t_0) = 0$. 而当 $x(t), y(t)$ 均为三次函数时, 该条件也是充分的.

证明. 以下证明以广义凸曲线为例, 广义凹曲线的证明类似.

必要性. 运用反证法, 不妨设 $y''(t_0) > 0$, 则由 $y'(t_0) = 0$ 可知, $y'(t_0 - 0) < 0, y'(t_0 + 0) > 0$. 由参数曲线 L 广义凸可知, 若在某点 $P(t_0)$ 的邻域内满足 t_0 左侧 $y(t)$ 单调递减, t_0 右侧 $y(t)$ 单调递增, 且邻域内任意点的切线均位于曲线在该点邻域的右侧, 则 $P(t_0)$ 的位置如图 2 所示, $y(x)$ 在 $P(t_0)$ 取得极小值, 从而有 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dx} = 0$.

图 2 $y''(t_0) > 0$ 的情形

另外, 在 t_0 的某一邻域上, 随着 t 的增大, $x(t)$ 单调递增, 即 $x'(t_0 - 0) > 0, x'(t_0 + 0) > 0$, 又已知 $x'(t_0) = 0$, 则 $x''(t_0) = 0$. 应用洛必达法则

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y''(t)}{x''(t)} = \infty.$$

这与 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dx} = 0$ 矛盾, 故 $y''(t_0) > 0$ 不成立. 其余情形也可推出类似的矛盾. 故 $x''(t_0) = y''(t_0) = 0$.

充分性. 当 $x(t), y(t)$ 均为三次函数且 $x'(t_0) = y'(t_0) = x''(t_0) = y''(t_0) = 0$ 时, 易知参数曲线 L 为直线, 故此条件也是充分的. 证毕.

引理 2. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 当 $a > 0$ 且 $0 < -\frac{b}{2a} < 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立的充要条件为判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$; 否则, $f(x) \geq 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立的充要条件为 $f(0) \geq 0$ 且 $f(1) \geq 0$.

证明. (1) $a > 0$ 且 $0 < -\frac{b}{2a} < 1$.

此时 f 在点 $x = -\frac{b}{2a} \in (0, 1)$ 处取到最小值, $f(x) \geq 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立等价于

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \geq 0.$$

即 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$.

(2) 其他情形.

若 $a = 0$, 则 f 为一次函数或常值函数, 在 $(0, 1)$ 上具有单调性, 在端点处取到最大、最小值; 若 $a > 0$ 且 $-\frac{b}{2a} \leq 0$ 或 $-\frac{b}{2a} \geq 1$, 则 f 在 $(0, 1)$ 上同样具有单调性; 若 $a < 0$, 则 f 为凹曲线, 在端点处取到最小值.

综上, 当不满足 $a > 0$ 且 $0 < -\frac{b}{2a} < 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立等价于

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \min\{f(0), f(1)\} \geq 0.$$

即 $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$.

证毕.

引理 3. 点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 为广义凸(凹)点列的充要条件为

$$\Delta_2 y_i \Delta_1 x_i - \Delta_2 x_i \Delta_1 y_i \geq 0 (\leq 0), (i=2, 3, \dots, n-1) \quad (3)$$

其中, $\Delta_1 u_i = u_i - u_{i-1}; \Delta_2 u_i = \Delta_1 u_{i+1} - \Delta_1 u_i$.

证明. 以下证明以广义凸点列为例, 广义凹点列的证明类似.

考虑相邻 3 点 $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. 由定义 2, 当 $\Delta_1 x_i > 0$ 时, 点列广义凸的充要条件为点 (x_{i+1}, y_{i+1}) 在点 $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)$ 所在直线的上方, 即

$$y_{i+1} \geq \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x_{i+1} - x_i) + y_i.$$

化简得

$$\Delta_1 y_{i+1} \Delta_1 x_i - \Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_i \geq 0 \quad (4)$$

同理, 当 $\Delta_1 x_i < 0$ 时, 也有式(4)成立. 当 $\Delta_1 x_i = 0$ 时, 式(4)依然成立. 容易验证

$$\Delta_1 y_{i+1} \Delta_1 x_i - \Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_i = \Delta_2 y_i \Delta_1 x_i - \Delta_2 x_i \Delta_1 y_i.$$

因此, 点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 为广义凸点列的充要条件为式(3)成立. 证毕.

需要指出, 引理 3 中的充要条件 $\Delta_2 y_i \Delta_1 x_i - \Delta_2 x_i \Delta_1 y_i \geq 0 (\leq 0), (i=2, 3, \dots, n-1)$ 正是引理 1 中 $y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t) \geq 0 (\leq 0), t \in I$ 的离散形式.

有了这些准备, 下面可以叙述三次 Catmull-Rom 样条的重要结果.

2 主要结果及其证明

首先考虑点列 $P_i(i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 即横坐标均匀时的情形, 有定理 1.

定理 1. 当一个有序凸(凹)点列为 $P_i(i, y_i)$ 时, 三次 Catmull-Rom 样条曲线 $p(t) = \sum_i y_i I_i^3(t)$ 保凸(凹)的充要条件为

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\Delta_2 y_{i+1}}{\Delta_2 y_i} \leq 2 \quad (5)$$

证明. 以下证明以凸点列为例, 凹点列的证明类似. 由式(1)得

$$\begin{aligned} p''(t) &= \sum_i y_i (I_0^3(t-i))'' = \\ &= 3(\Delta_2 y_{j+1} - \Delta_2 y_j)(t-j) - (\Delta_2 y_{j+1} - 2\Delta_2 y_j), \\ & \quad t \in (j, j+1). \end{aligned}$$

熟知 $p(t)$ 是凸曲线的充要条件为 $p''(t) \geq 0$. 利用点列凸条件, 即 $\Delta_2 y_j \geq 0$, 容易检验

$$\begin{aligned} &3(\Delta_2 y_{j+1} - \Delta_2 y_j)(t-j) - (\Delta_2 y_{j+1} - 2\Delta_2 y_j) \geq 0, \\ & \quad t \in (j, j+1). \end{aligned}$$

$$\text{等价于 } \frac{1}{2} \leq \frac{\Delta_2 y_{i+1}}{\Delta_2 y_i} \leq 2. \quad \text{证毕.}$$

现在考虑一般有序点列 $\{P_i(x_i, y_i)\}$ 的情形, 有定理 2.

定理 2. 如果有序点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 为广义凸(凹)点列, 则三次 Catmull-Rom 样条参数曲线表示为

$$P(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sum_i x_i I_i^3(t), \sum_i y_i I_i^3(t) \right).$$

它是保广义凸(凹)的充要条件为

$$\begin{cases} 5A_j - B_j - C_j \geq 0 (\leq 0) \\ -A_j - B_j + 5C_j \geq 0 (\leq 0) \end{cases} \quad (j=2, 3, \dots, n-2) \quad (6)$$

其中,

$$\begin{cases} A_i = \Delta_1 x_i \Delta_1 y_{i+1} - \Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_i \\ B_i = \Delta_1 x_i \Delta_1 y_{i+2} - \Delta_1 x_{i+2} \Delta_1 y_i \\ C_i = A_{i+1} = \Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_{i+2} - \Delta_1 x_{i+2} \Delta_1 y_{i+1} \end{cases}.$$

证明. 以下证明以广义凸点列为例, 广义凹点列的证明类似.

由引理 3, 有序点列为广义凸点列时, $A_i \geq 0, C_i \geq 0$. 事实上, 仅需要考虑 2 个插值点上的一段曲线, 如当 $t \in (j, j+1)$ 时, 有

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_i x_i (I_0^3(t-i))' = \\ &= \frac{3}{2}(\Delta_1 x_{j+2} - 2\Delta_1 x_{j+1} + \Delta_1 x_j)(t-j)^2 + \\ & \quad (-\Delta_1 x_{j+2} + 3\Delta_1 x_{j+1} - 2\Delta_1 x_j)(t-j) + \\ & \quad \frac{1}{2}(\Delta_1 x_{j+1} + \Delta_1 x_j); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= \sum_i x_i (I_0^3(t-i))'' = \\ &= 3(\Delta_1 x_{j+2} - 2\Delta_1 x_{j+1} + \Delta_1 x_j)(t-j) + \\ & \quad (-\Delta_1 x_{j+2} + 3\Delta_1 x_{j+1} - 2\Delta_1 x_j). \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{3}{2}(\Delta_1 y_{j+2} - 2\Delta_1 y_{j+1} + \Delta_1 y_j)(t-j)^2 + \\ & \quad (-\Delta_1 y_{j+2} + 3\Delta_1 y_{j+1} - 2\Delta_1 y_j)(t-j) + \\ & \quad \frac{1}{2}(\Delta_1 y_{j+1} + \Delta_1 y_j); \\ y''(t) &= 3(\Delta_1 y_{j+2} - 2\Delta_1 y_{j+1} + \Delta_1 y_j)(t-j) + \\ & \quad (-\Delta_1 y_{j+2} + 3\Delta_1 y_{j+1} - 2\Delta_1 y_j). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
z(t) &= y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t) = \\
&\frac{3}{2}(A_j - B_j + C_j)(t-j)^2 + \\
&\frac{3}{2}(-3A_j + B_j + C_j)(t-j) + \frac{1}{2}(5A_j - B_j - C_j); \\
&\begin{cases} a_j = \frac{3}{2}(A_j - B_j + C_j) \\ b_j = \frac{3}{2}(-3A_j + B_j + C_j) \\ c_j = \frac{1}{2}(5A_j - B_j - C_j) \end{cases}
\end{aligned}$$

由引理 1, 当 $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0 时, $P(t)$ 保广义凸的充要条件为 $z(t) \geq 0$ 在 $(j, j+1)$ 上恒成立. 下面讨论 $z(t) \geq 0$ 在 $t \in (j, j+1)$ 上恒成立的充要条件.

(1) $a_j > 0$ 且 $0 < -\frac{b_j}{2a_j} < 1$, 即

$$\begin{cases} 3A_j - B_j - C_j > 0 \\ -A_j - B_j + 3C_j > 0 \end{cases}$$

由引理 2, 此时 $z(t) \geq 0$ 的充要条件为二次函数 $z(t)$ 的判别式

$$\begin{aligned}
\Delta &= b_j^2 - 4a_jc_j = \frac{3}{4}(7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - \\
&34A_jC_j + 6B_jC_j) \leq 0.
\end{aligned}$$

即

$$7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - 34A_jC_j + 6B_jC_j \leq 0.$$

事实上, 该不等式是恒成立的, 因为

$$\begin{aligned}
7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - 34A_jC_j + 6B_jC_j &= \\
&-(7A_j - B_j - C_j)(-A_j - B_j + 7C_j) + 16A_jC_j \leq \\
&-4A_j \cdot 4C_j + 16A_jC_j = 0.
\end{aligned}$$

(2) 其他情形, 即

$$3A_j - B_j - C_j \leq 0 \text{ 或 } -A_j - B_j + 3C_j \leq 0.$$

由引理 2, 此时 $z(t) \geq 0$ 的充要条件为

$$\begin{cases} z(j) = \frac{1}{2}(5A_j - B_j - C_j) \geq 0 \\ z(j+1) = \frac{1}{2}(-A_j - B_j + 5C_j) \geq 0 \end{cases}$$

此即为式(6).

综上, 当 $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0 时, $z(t) \geq 0$ 在 $(j, j+1)$ 上恒成立或曲线保广义凸的充要条件为式(6)成立.

若存在 $t_0 \in (j, j+1)$, 使 $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, 由推论 1, 曲线广义凸必须有 $x''(t_0) = y''(t_0) = 0$, 此时参数曲线 L 为直线. 故需要排除 $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ 成立而 $x''(t_0) = y''(t_0) = 0$ 不成立的情况.

事实上, $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, 就是

$$\begin{cases} 3(\Delta_1 x_{j+2} - 2\Delta_1 x_{j+1} + \Delta_1 x_j)t^2 + 2(-\Delta_1 x_{j+2} + \\ 3\Delta_1 x_{j+1} - 2\Delta_1 x_j)t + (\Delta_1 x_{j+1} + \Delta_1 x_j) = 0 \\ 3(\Delta_1 y_{j+2} - 2\Delta_1 y_{j+1} + \Delta_1 y_j)t^2 + 2(-\Delta_1 y_{j+2} + \\ 3\Delta_1 y_{j+1} - 2\Delta_1 y_j)t + (\Delta_1 y_{j+1} + \Delta_1 y_j) = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 1)$ 上有解.

由消元法可得

$$\begin{cases} 2(A_j - B_j + C_j)t - (3A_j - B_j - C_j) = 0 \\ 3(A_j - B_j + C_j)t^2 - (5A_j - B_j - C_j) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

下面分 2 种情形讨论.

(1) $A_j - B_j + C_j = 0$. 方程组式(7)恒成立当且仅当 $3A_j - B_j - C_j = 5A_j - B_j - C_j = 0$. 从而得 $A_j = B_j = C_j = 0$. 此时, 参数曲线 L 为直线且 $x''(t_0) = y''(t_0) = 0$ 成立.

(2) $A_j - B_j + C_j \neq 0$. 由方程组式(7)容易解得

$$t^2 = \frac{5A_j - B_j - C_j}{3(A_j - B_j + C_j)}, \quad t = \frac{3A_j - B_j - C_j}{2(A_j - B_j + C_j)}.$$

注意到 $t \in (0, 1)$, 从而

$$\begin{cases} \frac{5A_j - B_j - C_j}{3(A_j - B_j + C_j)} = \left[\frac{3A_j - B_j - C_j}{2(A_j - B_j + C_j)} \right]^2 \\ 0 < \frac{3A_j - B_j - C_j}{2(A_j - B_j + C_j)} < 1 \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} 7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - 34A_jC_j + 6B_jC_j = 0 \\ (3A_j - B_j - C_j)(-A_j - B_j + 3C_j) > 0 \end{cases} \quad (8)$$

当满足式(6)时, 由 $t^2 = \frac{5A_j - B_j - C_j}{3(A_j - B_j + C_j)} \in (0, 1)$ 可知,

$A_j - B_j + C_j > 0$. 又由 $t = \frac{3A_j - B_j - C_j}{2(A_j - B_j + C_j)} \in (0, 1)$ 可

知, $3A_j - B_j + C_j > 0$. 由式(8)可得 $-A_j - B_j + 3C_j > 0$. 从而

$$\begin{aligned}
7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - 34A_jC_j + 6B_jC_j &= \\
&-(7A_j - B_j - C_j)(-A_j - B_j + 7C_j) + 16A_jC_j < \\
&-4A_j \cdot 4C_j + 16A_jC_j = 0.
\end{aligned}$$

这与 $7A_j^2 - B_j^2 + 7C_j^2 + 6A_jB_j - 34A_jC_j + 6B_jC_j = 0$ 矛盾, 故式(8)无解, 从而只有情形(1)成立.

综上所述, $P(t)$ 为广义凸曲线的充要条件为式(6)成立. 证毕.

容易验证, 式(6)可用点列坐标的一阶差分形式明确表示为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ \Delta_1 x_j & \Delta_1 x_{j+1} & \Delta_1 x_{j+2} \\ \Delta_1 y_j & \Delta_1 y_{j+1} & \Delta_1 y_{j+2} \end{vmatrix} \geq 0 (\leq 0) \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ \Delta_1 x_j & \Delta_1 x_{j+1} & \Delta_1 x_{j+2} \\ \Delta_1 y_j & \Delta_1 y_{j+1} & \Delta_1 y_{j+2} \end{vmatrix} \geq 0 (\leq 0) \end{cases} \quad (9)$$

其中, $j = 2, 3, \dots, n-2$.

当 $x_i = i$, 即点列的横坐标均匀的情形时, 式(6)或式(9)就退化为定理 1 中的式(5).

推论 2. 若有序点列 $\{P_i(x_i, y_i)\} (i=1, 2, \dots, n)$ 为广义凸(凹)点列, 存在相邻 3 点共线, 且所有点不在同一条直线上, 则三次 Catmull-Rom 样条参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ 是非广义凸或凹的.

证明. 以下证明以广义凸点列为例, 广义凹点列的证明类似.

仅需考虑相邻 4 点, 不妨设相邻 3 点 P_{j-1}, P_j, P_{j+1} 共线, 4 点 $P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}$ 不共线. 由 P_{j-1}, P_j, P_{j+1} 3 点共线可知 $A_j = 0$, $\Delta_1 x_{j+1} \cdot \Delta_1 x_j \geq 0$, 由 3 点 P_{j-1}, P_j, P_{j+1} 不共线可知 $C_j > 0$. 对于 4 点 $P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}$, 有

$$\begin{aligned} A_j \Delta_1 x_{j+2} - B_j \Delta_1 x_{j+1} + C_j \Delta_1 x_j = \\ (\Delta_1 x_i \Delta_1 y_{i+1} - \Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_i) \Delta_1 x_{j+2} - \\ (\Delta_1 x_i \Delta_1 y_{i+2} - \Delta_1 x_{i+2} \Delta_1 y_i) \Delta_1 x_{j+1} + \\ (\Delta_1 x_{i+1} \Delta_1 y_{i+2} - \Delta_1 x_{i+2} \Delta_1 y_{i+1}) \Delta_1 x_j \equiv 0. \end{aligned}$$

则 $B_j \geq 0$, 从而 $5A_j - B_j - C_j < 0$, 这与定理 2 的保凸条件相悖, 故 4 点 $P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, P_{j+2}$ 所得的这一段三次 Catmull-Rom 样条参数曲线是非广义凸或凹的. 证毕.

由该推论可知, 为确保所得的 Catmull-Rom 样条参数曲线是广义凸(凹)的, 点列中任意相邻 3 点必须是非共线的, 即有序点列是严格广义凸(凹)的.

3 实 例

首先验证定理 1.

例 1. 设凹点列 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (0.00, 4.00, 6.00, 6.50, 5.50, 3.50)$, 不难计算得到 $(\Delta_2 y_2, \Delta_2 y_3, \Delta_2 y_4, \Delta_2 y_5) = (-2.00, -1.50, -1.50, -1.00)$. 容易

验证定理 1 的保凹条件得到满足, 故三次 Catmull-Rom 样条曲线是凹的, 如图 3 所示.

图 3 例 1 的插值曲线图

例 2. 设凹点列 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (0.00, 3.00, 3.80, 4.00, 3.00, 1.00)$. 不难计算得到 $(\Delta_2 y_2, \Delta_2 y_3, \Delta_2 y_4, \Delta_2 y_5) = (-2.20, -0.60, -1.20, -1.00)$. 容易验证定理 1 的保凹条件不满足, 故三次 Catmull-Rom 样条曲线是非凹的, 如图 4 所示.

图 4 例 2 的插值曲线图

现在验证定理 2.

例 3. 取有序广义凹点列 $P_1(0.00, 0.00)$, $P_2(1.00, 3.00)$, $P_3(3.00, 5.00)$, $P_4(7.00, 5.00)$, $P_5(9.00, 4.00)$, $P_6(10.00, 1.00)$. 不难计算得到

$$\begin{aligned} (A_2, A_3, A_4) &= (-4.00, -8.00, -4.00), \\ (B_2, B_3, B_4) &= (-12.00, -6.00, -12.00), \\ (C_2, C_3, C_4) &= (-8.00, -4.00, -5.00). \end{aligned}$$

其中, A_i, B_i, C_i 对应的曲线段是 $\widehat{P_i P_{i+1}}$, $i = 2, 3, 4$. 容易验证定理 2 的保凹条件得到满足, 故三次 Catmull-Rom 样条曲线是广义凹的, 如图 5 实线所示. 如将点 $P_3(3.00, 5.00)$ 移动至 $P'_3(5.00, 5.90)$, 其余各点保持不变, 不难计算得到

$$(A'_2, A'_3, A'_4) = (-9.10, -9.40, -0.20),$$

$$(B'_2, B'_3, B'_4) = (-6.90, -9.80, -5.10),$$

$$(C'_2, C'_3, C'_4) = (-9.40, -0.20, -5.00).$$

容易验证 $\widehat{P_2 P_3}$ 满足定理 2 的保凹条件, 而 $\widehat{P_3 P_4}$, $\widehat{P_4 P_5}$ 不满足定理 2 的保凹条件. 故三次 Catmull-Rom 样条曲线是非广义凹的, 如图 5 虚线所示.

图 5 例 3 的插值曲线图

例 4. 数据^[6]为 $P_1(-0.50, 1.00)$, $P_2(0.00, 2.00)$, $P_3(1.00, 2.50)$, $P_4(1.60, 1.90)$, $P_5(1.00, 1.30)$, $P_6(0.90, 2.20)$, $P_7(1.70, 3.00)$, $P_8(3.00, 3.20)$, $P_9(3.50, 2.30)$, $P_{10}(3.20, 1.85)$, $P_{11}(2.50, 2.50)$, $P_{12}(5.00, 2.80)$, $P_{13}(5.40, 1.50)$. 不难计算得到

$$(A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}) = (-0.75, -0.90, -0.72, -0.60, -0.80, -0.88, -1.27, -0.50, -0.51, -1.84),$$

$$(B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}) = (-0.90, -0.30, 0.48, 0.00, -1.19, -1.12, -0.53, -0.31, 1.04, 0.65),$$

$$(C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}) = (-0.90, -0.72, -0.60, -0.80, -0.88, -1.27, -0.50, -0.51, -1.84, -3.37).$$

其中, A_i, B_i, C_i 对应的曲线段是 $\widehat{P_i P_{i+1}}$, $i = 2, 3, \dots, 11$. 容易验证定理 2 的保凹条件得到满足, 故三次 Catmull-Rom 样条曲线是广义凹的, 如图 6 所示.

例 5. 依次取 3 个有序广义凸点列

$$P^1 = \{P_1^1(-0.73, 0.73), P_2^1(-0.65, 0.30), P_3^1(-0.43, 0.08), P_4^1(0.00, 0.00), P_5^1(0.55, 0.15), P_6^1(0.75, 0.60), P_7^1(0.55, 1.00), P_8^1(0.00, 1.12), P_9^1(-0.50, 0.95), P_{10}^1(-0.70, 0.45), P_{11}^1(-0.46, -0.02)\};$$

图 6 例 4 的插值曲线图

$$P^2 = \{P_1^2(-1.13, 0.25), P_2^2(-0.80, 0.37), P_3^2(-1.00, 0.35), P_4^2(-0.65, 0.30), P_5^2(-0.30, 0.30), P_6^2(-0.20, 0.30), P_7^2(-0.40, 0.40), P_8^2(-0.70, 0.45), P_9^2(-1.00, 0.45), P_{10}^2(-0.80, 0.40), P_{11}^2(-0.40, 0.37), P_{12}^2(-0.20, 0.37)\};$$

$$P^3 = \{P_1^3(-0.12, 0.13), P_2^3(-0.43, 0.08), P_3^3(-0.74, -0.20), P_4^3(-0.82, -0.50), P_5^3(-0.60, -0.83), P_6^3(0.10, -0.95), P_7^3(1.00, -0.81), P_8^3(1.29, -0.25), P_9^3(0.95, 0.25), P_{10}^3(0.55, 0.15), P_{11}^3(0.49, -0.45)\}.$$

容易验证定理 2 的保凸条件均得到满足, 故这 3 条三次 Catmull-Rom 样条曲线均为广义凸的. 图 7a~图 7c 依次为小鸭子的原始轮廓图、Catmull-Rom 样条曲线和拟合效果图(其中, 为便于构造参数曲线, 对轮廓图的嘴和脖子处进行了修改; 为满足定理 2 保广义凸的条件, 插值点 P_6^3 为轮廓图中对应点向下移动 0.02 个单位后所得; 为满足各点列首末两点的插值效果, 已向外做了一次点列延拓).

图 7 例 5 的插值曲线图

4 结 语

本文导出了三次 Catmull-Rom 样条曲线保凸插值的充要条件为被插值的点列坐标满足一个简单的不等式组, 进而利用广义凸点列与广义凸曲

线的概念, 导出三次 Catmull-Rom 样条参数曲线保广义凸插值的充要条件. 对于任意有序点列, 本文展示了一些实例佐证了理论的正确性. 本文方法的突出优点是简单可靠, 无需解方程组即可直接得出插值曲线的方程. 其不足是构造的曲线定型, 总体仅 G^1 连续. 为克服曲线定型的缺点, 可人为加入插值点调节曲线的形状, 如何自动地加入插值点并不破坏曲线的广义凸性, 是待研究的课题.

参考文献(References):

- [1] Farin G. Curves and surfaces for CAGD: a practical guide[M]. 5th ed. New York: Academic Press, 2002: 147-176
- [2] Zhang Caiming, Wang Jiaye. C^2 quartic spline surface interpolation[J]. Science in China: Series E, 2003, 33(2): 116-126(in Chinese)
(张彩明, 汪嘉业. C^2 连续的四次样条曲面插值[J]. 中国科学: E 辑, 2003, 33(2): 116-126)
- [3] Schweikert D G. An interpolation curve using a spline in tension[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1966, 45: 312-317
- [4] Manni C, Sablonnière P. Monotone interpolation of order 3 by C^2 cubic splines[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 1997, 17(2): 305-320
- [5] Romani L. A circle-preserving C^2 Hermite interpolatory subdivision scheme with tension control[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(1): 36-47
- [6] Zhang Renjiang, Kan Dunzhi. Convexity-preserving interpolation using the polygonal line of data points[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2015, 27(7): 1167-1171(in Chinese)
(章仁江, 阚敦芝. 利用点列折线的保凸插值[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(7): 1167-1171)
- [7] Jiang Wei, Zhang Renjiang. Interpolation curves with generalized convexity-preserving[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2018, 30(9): 1686-1691(in Chinese)
(江伟, 章仁江. 保广义凸的曲线插值方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(9): 1686-1691)
- [8] Catmull E, Rom R. A class of local interpolating splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 1974, 74: 317-326
- [9] Goldman R. Pyramid algorithms: a dynamic programming approach to curves and surfaces for geometric modeling[M]. San Francisco: Elsevier, 2003: 276-287
- [10] Dyn N, Levin D, Liu D. Interpolatory convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces[J]. Computer Aided Design, 1992, 24(4): 211-216
- [11] Romani L, Albrecht G. Convexity preserving interpolatory subdivision with conic precision[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(8): 4049-4066
- [12] Trillo J C, Donat R, Amat S. Proving convexity preserving properties of interpolatory subdivision schemes through reconstruction operators[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(14): 7413-7421
- [13] Ding Youdong. A type of nonlinear 4-point convexity-preserving interpolatory discrete subdivision scheme and its application[J]. Journal of Fudan University: Natural Science, 2000, 39(1): 9-14
(丁友东. 一类非线性保凸插值离散细分格式及其性质[J]. 复旦学报: 自然科学版, 2000, 39(1): 9-14)
- [14] Zhu Y P, Han X L. C^2 rational quartic interpolation spline with local shape preserving property[J]. Applied Mathematics Letters, 2015, 46: 57-63
- [15] Zhou Qiang, Zhang Minxiong, Wu Xinli, et al. Immersion evaluation of virtual roaming with proprioceptive interaction[J]. Journal of Graphics, 2020, 41(3): 342-349(in Chinese)
(周强, 张敏雄, 吴新丽, 等. 体感交互虚拟漫游的沉浸感评价[J]. 图学学报, 2020, 41(3): 342-349)
- [16] Jiang Ze, Dong Yu. Rail detection algorithm based on hough transform and Catmull-Rom spline curve[J]. Journal of Graphics, 2018, 39(6): 1078-1083(in Chinese)
(姜泽, 董昱. 基于 Hough 变换和 Catmull-Rom 样条曲线的钢轨检测算法[J]. 图学学报, 2018, 39(6): 1078-1083)
- [17] Zhang R J, Ma W Y. An efficient scheme for curve and surface construction based on a set of interpolatory basis functions[J]. ACM Transaction on Graphics, 2011, 30(2): Article No.10