周期离散支承钢轨垂向振动带隙特性分析

冯青松¹, 杨舟¹, 郭文杰^{1*}, 陆建飞², 梁玉雄¹, 雷晓燕¹

1. 华东交通大学铁路环境振动与噪声教育部工程研究中心, 南昌 330013;

2. 江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013

* E-mail: guowenjie@ecjtu.jx.cn

收稿日期: 2019-08-02; 接受日期: 2019-11-12; 网络版发表日期: 2020-04-30

国家自然科学基金(批准号: 51878277, 51668020, 51368020)资助项目

摘要 本文将周期轨道结构简化为周期离散支承钢轨结构, 对其垂向振动带隙特性进行了研究. 将钢轨等效为 Timoshenko 梁, 通过平面波展开法计算了周期轨道结构垂向振动带隙特性, 与采用实体单元的有限元法进行了比较, 并进一步分析了各阶带隙频率的物理意义. 结果表明, 0~1500 Hz 范围内, 采用 Timoshenko 梁模型能够准确地表征周期性轨道结构带隙特性. 然后利用有限元法计算了有限周期轨道结构的振动传输特性, 并通过钢轨传输特性实验进一步验证了其带隙特性, 紧接着分析了轨道结构中不同阻尼对带隙特性的影响. 接着采用功率流法分析了有限周期轨道结构中能量的传播特性, 最后分析了轨道结构垂向振动各阶带隙频率与纵向温度力之间的关系, 并探讨了扣件刚度、扣件间距的影响. 分析结果表明, 周期性轨道结构能量流也具有带隙特性, 禁带范围内输入轨道功率流很少, 而通带能大幅度输入功率流; 周期轨道结构垂向振动第二阶带隙起始频率 B(1014.41 Hz)、截止频率 C(1030.06 Hz) 可作为无缝线路钢轨内部温度力大小的主要评价指标. 周期轨道结构中带隙特性有利于更深入地理解轨道结构中振动波的传播特性, 并为铁路振动和噪声控制提供了一个新的思路.

关键词 周期离散支承钢轨, 弹性波带隙, 平面波展开法, 振动传递特性, 功率流, 钢轨温度力

1 引言

振动以弹性波的形式在轨道结构中传播, 对轨道结构构件可能造成损伤. 这些损伤将影响列车的安全性、舒适性以及轨道结构的使用寿命. 因此, 研究轨道结构中振动波传播的行为和控制具有重要意义.

铁路轨道结构直线段通常是由基本单元沿线路纵向周期性排列而成, 可以认为轨道是周期性结构. 周期

结构一个重要的特性即带隙特性^[1]: 当弹性波在周期结构传播时, 特定频率范围内的波在结构中传播时有大幅度的衰减, 可将该频段称为带隙. 1964~1995 年, Mead^[2~6]从波动方程出发, 研究了周期性梁、板结构的振动特性, 证明了周期性约束的梁、板结构中的弹性波也存在带隙特性, 并提出了传递矩阵法、空间谐波法等带隙计算方法. 姜博龙等人^[7]将周期结构引入轨道交通减振降噪领域, 设计了一种局域共振型周期

引用格式: 冯青松, 杨舟, 郭文杰, 等. 周期离散支承钢轨垂向振动带隙特性分析. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 1563–1576

Feng Q S, Yang Z, Guo W J, et al. Analysis of vertical vibration band gap characteristics of periodic discrete support rail (in Chinese). Sci Sin Tech, 2020, 50: 1563–1576, doi: 10.1360/SST-2019-0271

性排桩结构。

已有大量学者从周期特征出发, 对铁路轨道结构开展相应的研究工作. Wu和Thompson^[8]利用多层梁模型研究了有限离散支承轨道在高频范围的横向振动, 得到的加速度响应的预测结果与实测数据吻合较好. Grassie等人^[9]将铁路轨道结构简化为周期梁模型, 并根据广义状态矩阵法计算其传递函数. Thompson^[10]还计算了周期支撑钢轨的振动衰减率并发现了在“pinned-pinned”频率附近会产生衰减区域, 但没有对此特性进行进一步的分析. Sheng等人^[11,12]提出了一种基于波数的周期支撑结构在移动或固定谐波荷载作用下动态响应的计算方法, 得到了周期轨道结构的传播常数和谐振特性. 陆建飞等人^[13,14]将轨道简化为桥梁间的连接弹簧, 利用传递矩阵法研究了移动荷载下周期性高架铁路桥的动力响应, 得到了周期性高架桥的能带结构. Abe等人^[15]在Thompson研究基础上, 考虑铁路轨道为离散支撑约束结构, 并将轨枕视为有限长的Timoshenko梁, 得到铁路轨道结构振动带隙特性曲线, 但是模型中没有完整地考虑钢轨温度力和轨道基础刚度的影响, 因而只得到了周期性轨道结构振动带隙特性的一些初步结论. 王平等人^[16]利用传递矩阵法分析了周期性无砟轨道结构中弹性波的传播特性, 但分析模型中并未考虑轨道结构真实存在的阻尼以及钢轨温度力。

由结构振动理论可知, 梁内部存在纵向力时, 梁振动特性(如自振频率等)会发生改变. 利用这一结构振动原理, 可为钢轨内部温度力的检测提供一种可能途径. 近年来, 一些专家学者进行了这方面的相关研究. Aikawa^[17]建立了有砟轨道的三维梁单元模型, 通过周期结构理论以及Floquet变换方法分析了轨道结构频散特性与温度力之间的关系, 但该方法建模及分析过程比较复杂. 冯青松等人^[18]将有砟轨道结构考虑为周期支承梁, 利用周期结构波数有限元理论, 分析了垂向振动各阶共振频率与轴向温度力的关系, 但并没有结合波动机理对各阶共振频率做进一步的分析。

本文利用平面波展开法分析了周期离散支承钢轨垂向振动带隙特性, 并与有限元法结果进行了比较, 然后详细分析了阻尼对带隙特性的影响, 并利用功率流法分析了有限周期轨道结构中能量的传递特性; 考虑了钢轨温度力, 分析了温度力对轨道结构带隙特性的影响; 最后探讨了不同温度力下, 无砟轨道结构参数

对带隙特性的影响. 本文研究结论为无缝线路温度力检测提供了一种新的思路, 有利于更深入地理解无砟轨道结构中振动波的传播特性, 为轨道结构振动和噪声的控制提供新的思路与指导。

2 计算模型及原理

2.1 分析模型

在如图1所示的实际轨道结构工程中, 整体道床具有结构简单、施工方便等优点, 对于整体道床轨道, 道床由混凝土整体浇筑而成, 下部结构刚度较大, 由于计算和分析的是周期结构钢轨的振动带隙特性, 故不考虑轨道板等下部结构的影响, 因此假设下部为刚性基础, 轨道结构简化为图2所示的无限长单层弹性点支承梁模型。

2.2 计算原理

本文将钢轨等效为Timoshenko梁, 利用平面波展开法计算其弯曲振动能带结构。

取图2中单胞结构一段长为 dx 的微元体进行受力分析, 如图3所示, 列出微元体的力与力矩的平衡方程:

图1 (网络版彩图)周期性轨道结构

Figure 1 (Color online) Periodic track structure.

图2 (网络版彩图)无限周期轨道结构简化图

Figure 2 (Color online) Simplified diagram of infinite period track structure.

图 3 微元体受力分析示意图

Figure 3 Force analysis diagram of element body.

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa(x)G(x)A(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \right] \\ & - k_v(x)u(x,t), \\ & \rho(x)I(x)\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \\ &= \kappa(x)G(x)A(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x)I(x)\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] + F(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

式中, ρ , A , κ , G , I , E 分别表示钢轨的密度、横截面积、截面几何形状常数、剪切模量、截面二次矩、弹性模量. $u(x, t)$ 表示钢轨梁的垂向位移, $\theta(x, t)$ 表示截面转角. 因为式(1)中的控制方程是连续性方程, 力学量也应该是连续函数, 故将扣件弹簧垂向刚度 $k_v(x)$ 用狄拉克函数表示为

$$k_v(x) = k_v \delta(x - x_r), \quad (2)$$

式中, k_v 表示扣件垂向刚度, $x_r = l/2$ 表示扣件弹簧的位置 (即钢轨元胞跨中位置).

无缝线路纵向温度力可以等效为沿着钢轨纵向分布的均布力, 可以写成与材料参数有相同空间周期性的函数. 构造一个 $m_n(x)$ 函数, 使其满足

$$\left\{ \begin{aligned} m_1(x) &= \rho(x)A(x), \\ m_2(x) &= \kappa(x)G(x)A(x), \\ m_3(x) &= \rho(x)I(x), \\ m_4(x) &= E(x)I(x), \\ m_5(x) &= F(x). \end{aligned} \right. \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)中:

$$\left\{ \begin{aligned} & m_1(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[m_2(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \right] \\ & - k_v(x)u(x,t), \\ & m_3(x)\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = m_2(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[m_4(x)\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] + m_5(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

根据Bloch定理, 梁的垂向位移 $u(x, t)$ 和截面转角 $\theta(x, t)$ 可以表示为

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, t) &= u_k(x)e^{i(kx - \omega t)}, \\ \theta(x, t) &= \theta_k(x)e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

式中, k 是一维波矢, ω 是圆频率. $u_k(x)$ 与 $\theta_k(x)$ 均为位置的周期函数, 可展开为Fourier级数形式:

$$\left\{ \begin{aligned} u_k(x) &= \sum_{\mathbf{G}_1} U_k(\mathbf{G}_1)e^{i\mathbf{G}_1 x}, \\ \theta_k(x) &= \sum_{\mathbf{G}_1} \theta_k(\mathbf{G}_1)e^{i\mathbf{G}_1 x}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中, $\mathbf{G}_1$ 是一维倒格矢; $U_k(\mathbf{G}_1)$, $\theta_k(\mathbf{G}_1)$ 分别是 $u_k(x)$ 和 $\theta_k(x)$ 的Fourier系数.

将式(6)代入式(5)可得

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, t) &= e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}_1} U_k(\mathbf{G}_1)e^{i(k + \mathbf{G}_1)x}, \\ \theta(x, t) &= e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}_1} \theta_k(\mathbf{G}_1)e^{i(k + \mathbf{G}_1)x}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

函数 $m_n(x)$ 、扣件刚度分布函数 $k_v(x)$ 与梁的垂向位移 $u(x, t)$ 和截面转角 $\theta(x, t)$ 有相同空间周期性的函数, 同样可以展开为Fourier级数的形式:

$$\begin{cases} m_n(x) = \sum_{\mathbf{G}_2} M_n(\mathbf{G}_2) e^{i\mathbf{G}_2 x}, n = 1, 2, 3, 4, 5, \\ k_v(x) = \sum_{\mathbf{G}_2} k_v(\mathbf{G}_2) e^{i\mathbf{G}_2 x}. \end{cases} \quad (8)$$

$\mathbf{G}_2$ 是一维倒格矢; $M_n(\mathbf{G}_2)$ 和 $k_v(\mathbf{G}_2)$ 分别是 $m_n(x)$, $k_v(x)$ 的Fourier系数.

将式(7)和(8)代入式(4)中并化简可得

$$\begin{cases} \omega^2 \sum_{\mathbf{G}_1} M_1(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) U_k(\mathbf{G}_1) \\ = \sum_{\mathbf{G}_1} [M_2(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)(k + \mathbf{G}_1)(k + \mathbf{G}_3) + k_v(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)] \\ \cdot U_k(\mathbf{G}_1) + \sum_{\mathbf{G}_1} M_2(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) [i(k + \mathbf{G}_3)] \theta_k(\mathbf{G}_1), \\ \omega^2 \sum_{\mathbf{G}_1} M_3(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) \theta_k(\mathbf{G}_1) \\ = - \sum_{\mathbf{G}_1} [(M_2(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1) + M_5(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)) [i(k + \mathbf{G}_1)]] \\ \cdot U_k(\mathbf{G}_1) + \sum_{\mathbf{G}_1} [M_4(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)(k + \mathbf{G}_1)(k + \mathbf{G}_3) \\ + M_2(\mathbf{G}_3 - \mathbf{G}_1)] \theta_k(\mathbf{G}_1), \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$; 式(9)为无限阶复数矩阵特征值问题. 式(9)可写成广义特征值方程为

$$\omega^2 \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X}. \quad (10)$$

矩阵满足:

$$\mathbf{X} = [U_k(\mathbf{G}_1), \theta_k(\mathbf{G}_1)], \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j) & 0 \\ 0 & M_3(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 中各项满足

$$\begin{cases} b_{11} = M_2(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j)(k + \mathbf{G}_1^i)(k + \mathbf{G}_3^i) + k_v(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j), \\ b_{12} = M_2(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j) [i(k + \mathbf{G}_3^i)], \\ b_{21} = -(M_2(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j) + M_5(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j)) [i(k + \mathbf{G}_1^i)], \\ b_{22} = M_4(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j)(k + \mathbf{G}_1^i)(k + \mathbf{G}_3^i) + M_2(\mathbf{G}_3^i - \mathbf{G}_1^j), \end{cases} \quad (14)$$

式中, $U_k(\mathbf{G}_1)$, $\theta_k(\mathbf{G}_1)$ 为位移和转角Fourier系数列阵; $\mathbf{G}_3^i$ 和 $\mathbf{G}_1^j$ 分别为 $\mathbf{G}_3$ 和 $\mathbf{G}_1$ 倒格矢空间中编号为 i , j 的倒格矢.

沿第一Brillouin区选取波矢(对于一维周期结构, 它的第一Brillouin区范围为 $[0, \pi/l]$ ^[1], l 表示扣件间距)形成矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 求解上述特征值方程, 即可得到周期性无砟轨道的能带结构.

3 温度力 $F=0$ 条件下轨道结构带隙特性分析

3.1 无限周期轨道结构的能带

钢轨采用CHN60轨, 轨道结构相关参数取值见表1, 其中扣件刚度取值参考Aikawa等人^[17]的测试结果. 取201个平面波进行计算, 为了验证Timoshenko梁模型的合理性, 建立图4所示的周期离散支撑钢轨有限元模型. 钢轨建立为实体单元, 扣件简化为点支撑弹簧单元, 相关参数取值与Timoshenko梁解析模型一致(文中表1参数), 单元类型为Lagrange-Quadratic. 为满足波动问题有限元求解精度要求, 网格划分满足: 最大单元为波长的1/6, 最小单元为波长的1/10. 钢轨两端边界分别定义为源边界和目标边界, 在目标边界通过逐点约束的方式施加Floquet周期性边界条件. 由于轨道结构沿钢轨纵向呈现周期性, 属于典型的一维周期结构, 仅在钢轨纵向(x 方向)定义波矢 $\mathbf{k}$, 取遍第一Brillouin区内所有的波矢 k 值, 利用有限元软件COMSOL Multiphysics固体力学模块进行求解. 得到轨道结构垂向振动动能带见图5, 表2列出了0~1500 Hz频率范围内, PWE法和有限元法计算得到的周期离散支撑钢轨垂向振动带隙的频率.

由表2和图5可以发现, 0~1500 Hz范围内, Timoshenko梁理论计算结果与实体单元有限元仿真结果基本一致, 说明了1500 Hz范围内, 用Timoshenko梁模型来表征周期轨道结构的带隙特性是合理的. 同时

表1 轨道结构参数

Table 1 Track structural parameters

参数	数值
钢轨截面积	7745 mm ²
弹性模量	210 GPa
截面惯性矩	3.217×10 ⁻⁵ m ⁴
密度	7850 kg/m ³
剪切模量	80.77 GPa
扣件垂向刚度	25 kN/mm
扣件间距	0.625 m

图 4 (网络版彩图)轨道结构单胞示意图

Figure 4 (Color online) Schematic diagram of single cell of track structure.

图 5 (网络版彩图)垂向振动频散曲线

Figure 5 (Color online) Dispersion curve of vertical vibration.

表 2 PWE法与有限元法结果对比表

Table 2 PWE method and finite element method results comparison table

带隙阶数	PWE法(Timoshenko 梁模型) (Hz)	有限元法(实体单元 模型) (Hz)
1	0~128.69	0~128.69
2	1014.41~1030.06	1013.82~1029.72

还可以看出, 0~1500 Hz范围内, 周期离散支承钢轨垂向振动产生了两阶带隙(图5中灰色阴影部分), 第一阶带隙(0~128.69 Hz)在低频产生, 带宽为128.69 Hz; 第二阶带隙(1014.41~1030.06 Hz)在高频产生, 带宽为15.65 Hz.

对于有限长度轨道结构, 系统的固有频率反映结构的固有振动特性; 对于无限长轨道结构, 频散曲线仍然反映结构固有属性, 表示弹性波在结构中的传播状态. 因此, 二者之间必然存在一些联系. 下面进一步说明两阶带隙频率的物理意义.

3.1.1 第一阶带隙

轨道结构一阶共振频率经验公式为

$$f_t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (15)$$

其中, k 为轨下分布刚度, m 为单位长度钢轨质量. k 取扣件垂向刚度为25 kN/mm, 钢轨的质量为60 kg/m, 计算可得轨道结构垂向振动第一阶共振频率为129 Hz. 而上述计算得到的周期性轨道结构垂向振动第一阶段带隙的截止频率为128.69 Hz, 这与轨道结构垂向振动第一阶共振频率基本吻合.

3.1.2 第二阶带隙

当钢轨弯曲波驻波节点刚好在扣件处时, 钢轨将发生“pinned-pinned”共振, 图6表示“pinned-pinned”共振的振型示意图. 图7给出了图5中A(第一阶带隙截止频率)、B(第二阶带隙起始频率)、C(第二阶带隙截止频率)三点频率对应的模态. 可以发现, 模态B(第二阶带隙起始频率)就是一阶“pinned-pinned”模态.

3.2 有限周期轨道结构的传输特性

周期结构的带隙特性表征方法主要有无限周期结构的能带和有限周期结构的传输特性^[1]. 振动传输特性是指轨道结构对不同频率的振动输入的传递能力. 通过考察从有限周期轨道结构一端到另一端的频响函数, 考察其振动传输特性.

3.2.1 基于有限元法的传输特性分析

建立如图2所示的包含10个钢轨元胞的无砟轨道结构有限元分析模型, 在钢轨起始端(激励点)施加谐波单位位移的激励, 提取钢轨末端(响应点)的位移响应. 将有限结构中的弯曲波透射率定义为

$$T_n = 20 \log_{10} |w_n / w_0|, \quad (16)$$

式中, w_n 和 w_0 分别是激励点和响应点的垂向位移. 利用式(16)计算并绘制传输特性曲线, 如图8所示.

在0~129 Hz范围内, 振动传输特性曲线中存在一

图 6 (网络版彩图)一阶“pinned-pinned”振型

Figure 6 (Color online) The first-order “pinned-pinned” modes.

图7 (网络版彩图)带隙频率对应振型

Figure 7 (Color online) The modes correspond to band gap frequency.

图8 (网络版彩图)传输特性曲线(有限元法)

Figure 8 (Color online) Transmission characteristic curve (finite element method).

个明显的振动衰减区域(图8中E区域),这与前述理论分析中第一阶带隙(0~128.69 Hz)的位置基本一致,说明了理论分析的正确性。同时第二阶带隙范围内(1014.41~1030.06 Hz)并未出现明显的衰减域,表明在点激励作用下难以激发出“pinned-pinned”波形,这与文献[19]相关研究结论一致,其仿真结果表明第二阶带隙处无明显衰减域。因此在后续的钢轨振动传输特性测试中仅对钢轨垂向振动第一阶带隙进行验证。

3.2.2 钢轨振动传输特性实验

为了验证周期轨道结构带隙的存在,采用力锤激振法对钢轨的垂向振动传输特性进行了测试。

传感器的布置以及锤击点位置如图9所示,竖向测试传感器选择布置在轨头正上方。以装配WJ-7扣件的轨道系统为试验对象,选取钢轨的跨度作为参考位置,标为跨度0。在0跨跨中、29跨跨中设置垂直加速度传感器。选取跨度为0的跨中响应作为分析轨道结构弹性波传播特性的参考值。参考位置处的加速度响应记为 u_0 ,跨度 i 处的加速度响应记为 u_i 。利用力锤在第0跨跨中位置锤击,得到第0跨跨中加速度响应 u_0 和第29跨跨中加速度响应 u_{29} ,再利用式(16)分别计算得到钢轨振动传输特性曲线,如图10所示。

由图10可以看出,0~500 Hz范围内,钢轨垂向振动传输特性曲线中产生一个明显的振动衰减区域(0~130 Hz),这与理论分析得到的周期轨道结构垂向振动一阶带隙的范围(0~128.93 Hz)基本一致,证明了周期轨道结构中带隙的存在。

3.3 阻尼对带隙特性的影响

前述分析并没有考虑阻尼的影响。但无阻尼的自由振动只是一种理想情况,在实际的轨道系统中不可避免存在阻尼因素,因此需分析轨道结构部件阻尼的影响。梁自身的阻尼可以累加,即把弹性模量 E 写成

图9 (网络版彩图)传感器及锤击点布置断面

Figure 9 (Color online) Sensor and hammer point layout section.

图 10 (网络版彩图) 实测钢轨垂向振动传输特性曲线
Figure 10 (Color online) The actual transmission characteristic curve of rail vertical vibration.

$E \cdot (1 + \eta_1)$ 的形式, 其中 η_1 为钢轨的阻尼损耗因子, 用考虑了阻尼损耗因子 η_2 的复刚度来取代扣件刚度, 即 $k_v(x)$ 由 $k_v(x) \cdot (1 + \eta_2)$ 替代. 同样地, η_1 和 η_2 的取值参考文献[10].

3.3.1 钢轨阻尼的影响

钢轨的阻尼损耗因子一般取 0.02, 取扣件阻尼损耗因子 $\eta_2 = 0$, 计算得到有无钢轨阻尼两种情况下, 轨道结构垂向振动带结构和振动传输特性见图 11 和 12.

图 11 (网络版彩图) 不同钢轨阻尼损耗因子频散曲线
Figure 11 (Color online) Dispersion curves of different rail damping loss factors.

图 12 (网络版彩图) 不同钢轨阻尼损耗因子传输特性曲线
Figure 12 (Color online) Transmission characteristics of different rail damping loss factors.

表 3 列出了不同钢轨阻尼损耗因子对应的带隙频率. 由图 11 和表 3 可以看出, 钢轨阻尼损耗因子 η_2 对轨道结构垂向振动带隙频率没影响.

图 11 中的每一条频散曲线代表一条通带, 表 4 列出了图 11 中不同波矢 k 对应的特征频率. 由于阻尼的存在, 轨道结构垂向振动特征频率出现负虚部 (表示阻尼衰减项), 这表明通带范围内的弯曲波也会出现衰减,

表 3 不同钢轨阻尼损耗因子对应带隙频率

Table 3 Different damping loss factors correspond to band gap frequency

带隙阶数	$\eta_1=0$ 带隙频率 (Hz)	$\eta_1=0.02$ 带隙频率 (Hz)
1	0~128.69	0~128.69
2	1014.41~1030.06	1014.46~1030.10

表 4 不同钢轨阻尼损耗因子条件下不同波矢对应的特征频率

Table 4 The characteristic frequencies of different wave vectors corresponding to different rail damping loss factors

波数	$\eta_1=0$ 特征频率 (Hz)	$\eta_1=0.02$ 特征频率
0	128.69	128.69-0.008i
0.50265	129.31	129.31-0.022i
1.00531	138.85	138.85-0.21i
3.01593	445.64	445.66-4.10i
4.02124	715.42	715.45-6.94i
5.02655	1014.41	1014.46-10.14i

在图12中体现为通带内的幅值出现明显的降低(图12中F1降至F2点), 且在低频处阻尼衰减项很小, 通带内的衰减不明显, 随着频率的增大, 阻尼衰减项增大, 通带内的衰减增大, 在图12中体现为, 频率越高, 通带内幅值的衰减越明显. 由图12可以看出, 0~128.69 Hz频率范围内, 有无钢轨阻尼的传输特性曲线完全重合, 这说明了0~128.69 Hz范围内产生的振动衰减是由带隙特性引起的, 而不是阻尼产生的衰减.

3.3.2 扣件阻尼的影响

无砟轨道结构常用的扣件有SFC型扣件、WJ-7型扣件以及WJ-8型扣件, 不同扣件的阻尼特性也不一样. 取钢轨阻尼损耗因子 $\eta_1=0$, 扣件阻尼损耗因子分别取0, 0.1, 1, 计算得到的能带结构和振动传输特性见图13和14.

表5列出了不同扣件阻尼损耗因子对应的带隙频率. 由图13和表5可以看出, 扣件阻尼损耗因子 η_2 主要影响第一阶带隙, 对第二阶带隙的影响较小. 随着 η_2 的增大, 第一阶带隙的截止频率增大, 带宽也随之增大.

表6列出了图13中不同波矢 k 对应的特征频率. 与钢轨阻尼类似, 扣件阻尼的存在也会使轨道结构垂向振动特征频率出现负虚部(表示阻尼衰减项), 这表明处在通带范围内的弯曲波也会出现衰减(图14中H1降至H3点), 不同的是, 扣件阻尼损耗因子会使得较低频的特征频率产生较大的阻尼衰减项, 随着频率的增大,

图13 (网络版彩图)不同扣件阻尼损耗因子频散曲线
Figure 13 (Color online) Dispersion curves of different damping loss factors of fastener.

图14 (网络版彩图)不同扣件阻尼损耗因子传输特性曲线
Figure 14 (Color online) Transmission characteristic curves of different damping loss factors of fastener.

阻尼衰减项减小, 在图14中体现为: 在较低频处的阻尼衰减大, 拓宽了原本一阶带隙的振动衰减范围, 随着频率的增大, 阻尼衰减量减小, 通带内振动幅值的衰减幅度明显下降.

3.4 周期性无砟轨道结构功率流分析

功率流方法综合了力和速度响应的大小及相位关系, 给出了振动传输的一个绝对度量^[20]. 通过对功率流分析可以更加深入地研究弹性波能量在轨道结构中的传播, 揭示振动传输机制.

利用有限元法, 建立如图2所示的包含10个钢轨元胞的有限周期轨道结构有限元分析模型, 在钢轨起始端加载单位谐波荷载, 在钢轨激励点处、第4个元胞末端以及第8个元胞末端定义三个位置点, 分别为响应点0, 1, 2, 轨道结构各参数取值同表1, 钢轨阻尼损耗因子 η_1 取0.02, 扣件阻尼损耗因子 η_2 取0.1. 计算得到有限周期无砟轨道结构不同位置的功率流如图15和16

表5 不同扣件阻尼损耗因子对应带隙频率

Table 5 Different damping loss factors of fastener correspond to band gap frequency

带隙阶数	$\eta_2=0$ 带隙频率 (Hz)	$\eta_2=0.1$ 带隙频率 (Hz)	$\eta_2=1$ 带隙频率 (Hz)
1	0~128.69	0~128.85	0~141.57
2	1014.41~1030.06	1014.41~1030.06	1014.41~1034.22

表 6 不同扣件阻尼损耗因子条件下不同波矢对应的特征频率

Table 6 The characteristic frequencies corresponding to different wave vectors under different damping loss factors of fastener

波数	$\eta_2=0$ 特征频率 (Hz)	$\eta_2=0.1$ 特征频率	$\eta_2=1$ 特征频率
0	128.69	128.85–6.39i	141.57–58.12i
0.50265	129.31	129.47–6.35i	142.03–57.86i
1.00531	138.85	138.98–5.89i	149.61–54.75i
3.01593	445.64	445.65–1.79i	446.17–17.89i
4.02124	715.42	715.42–1.09i	715.67–10.92i
5.02655	1014.41	1014.41–0.51i	1014.41–5.07i

图 15 (网络版彩图)轨道结构不同位置功率流x分量
Figure 15 (Color online) x component of power flow at different positions of track structure.

所示。

图15和16中点0处的功率流即输入轨道结构的功率流。输入轨道结构中的功率流由3个方向分量 W_x 、 W_y 、 W_z 组成, W_z 表示向下传递的功率流, 即能得到输入轨道结构总的功率流在数值上等于3个方向分量的数值之和:

$$W = W_x + W_y + W_z. \quad (17)$$

三个方向功率流分量占比满足:

$$\alpha_i = \frac{W_i}{W_x + W_y + W_z} \times 100\%, \quad i = x, y, z. \quad (18)$$

可以看出, 轨道结构的功率流同样具有带隙特性, 第一阶带隙范围内(0~128.85 Hz, 图15和16中阴影部分)输入功率流很小, 且由式(18)计算可得, 第一阶带

图 16 轨道结构输入功率流z分量
Figure 16 z component of track structure input power flow.

隙范围(0~128.85 Hz)内输入轨道结构的功率流中约有98.1%的能量流往下部基础传递, 仅有1.8%的能量流能够沿着钢轨纵向传递。而通带范围内(128.85~1500 Hz, 第二阶带隙衰减效果很差, 可并入通带)输入功率流约为禁带范围内输入功率流的13.4倍, 且通带范围内输入轨道结构中约有89.8%的功率流往下部基础传递, 仅有10.1%的功率流能够沿着钢轨纵向传递。

图17给出了两个频率(一个在禁带, 一个在通带)下有限周期无砟轨道结构功率流密度矢量图(图中箭头表示功率流密度矢量)。图17(a)可以看出, 在禁带范围内输入轨道结构的功率流大部分往下部基础传递, 沿着钢轨纵向传播的功率流很小且传递的距离很近,

图 17 (网络版彩图)不同频率轨道结构功率流密度矢量图。
(a) $f=50$ Hz, 局部放大(比例因子30000); (b) $f=385$ Hz, 局部放大(比例因子6000)

Figure 17 (Color online) Power flow density vector diagram of track structure with different frequencies. (a) $f=50$ Hz, partial enlarged drawing (scale factor: 30000); (b) $f=385$ Hz, partial enlarged drawing (scale factor: 6000).

传递至第二个钢轨元胞处几乎衰减为0; 而图17(b)中, 处在通带范围内的功率流, 沿着钢轨纵向的传递量明显增大, 并且传递的距离更远。

4 温度力对带隙特性的影响

4.1 影响分析

梁的两端作用轴向温度力时其振动特性将会发生改变, 如结构的共振频率。由上述分析可知, 无缝轨道结构两阶带隙频率均与结构共振频率有着联系, 故纵向温度力对带隙特性也有着相应的影响。

无缝线路中钢轨温度力计算公式^[21]为

$$F = 2.48\Delta t \cdot A, \quad (19)$$

式中, Δt 为温度变化量, A 为钢轨横截面积。本节根据无缝线路钢轨在使用过程中可能出现的温升或温降幅度, 确定了相应的温度力幅值, 分析钢轨内部轴向温度力变化对其带隙频率的影响。温升幅度及温度力幅值的具体取值如表3所示。分析中钢轨为CHN60钢轨, 轨枕间距为0.625 m, 钢轨阻尼损耗因子 η_1 取0.02, 扣件阻尼损耗因子 η_2 取0.1, 各部件的材料参数与表1一致。

图18为周期轨道结构垂向振动带隙频率A, B, C与轴向温度力之间的变化关系。从图中可以看出, 温度力对垂向振动一阶带隙截止频率没有影响, 对第二阶带隙频率影响较大, 第二阶带隙频率均随纵向温度拉力的增大而增大, 随纵向温度压力的增大而减小。第二阶带隙起始频率B、截止频率C随温度变化率分别约为0.093和0.092 Hz/°C, 两个频率的变化率接近, 故第二阶带隙带宽不会产生太大变化。因此, 可以将第二阶带隙起始频率B、截止频率C作为无缝线路钢轨内部

温度力大小的主要评价指标。

4.2 机理分析

带隙频率与钢轨自振频率有着密不可分的关系, 纵向温度力对带隙特性的影响就是对钢轨自振频率的影响, 以最简单的简支欧拉梁为例, 分析轴向力对梁自振频率的影响。

考虑轴向压力时, 欧拉梁弯曲振动微分方程可写为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (20)$$

式中, EI , N , $\bar{m}$ 分别表示梁的抗弯刚度、质量集度及轴向压力。 $y(x, t)$ 为梁的挠曲线方程, 令

$$y(x, t) = \phi(x)Y(t). \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)并简化可得

$$\phi''''(x) + g^2 \phi''(x) - \alpha^4 \phi(x) = 0, \quad (22)$$

其中,

$$\begin{cases} \alpha^4 = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI}, \\ g^2 = \frac{N}{EI} = \frac{N}{N_{KP}} \cdot \frac{N_{KP}}{EI}, \end{cases} \quad (23)$$

式中, N_{KP} 表示梁体系的临界压力。

方程(22)的通解可写为

$$\phi(x) = A \sin \delta x + B \cos \delta x + C \sinh \epsilon x + D \cosh \epsilon x. \quad (24)$$

根据简支梁的边界条件可以解得

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{N}{N_{KP}} \right), \quad (25)$$

图18 温度力对带隙频率的影响

Figure 18 Influence of temperature force on bandgap frequency.

其中, ω_0 为无轴向力时梁的自振频率. 由式(25)可以看出, 由于轴向压力的作用, 梁抗弯刚度减小, 同阶次的特征频率也随之减小, 同理, 若作用轴向拉力时, 梁的抗弯刚度增大, 同阶次的特征频率随之增大.

第二阶带隙频率本质上属于钢轨“pinned-pinned”共振频率, 由上述分析即可得出: 带隙频率随纵向温度拉力的增大而增大, 随纵向温度压力的增大而减小.

5 温度力作用下不同参数轨道结构带隙频率敏感性分析

由上述分析可知, 轨道结构垂向振动第二阶带隙的起止频率对温度力的变化较敏感, 故本节进一步分析不同扣件刚度、扣件间距的轨道结构垂向振动第二阶带隙的起止频率对温度力变化的敏感程度.

5.1 扣件刚度的影响

分析中, 扣件刚度取值为25~45 kN/mm. 无缝线路钢轨内部温度力取值同表7. 轨道结构参数取值同表1.

图19(a)和(b)分别反映了不同温升幅度下, 扣件变化对周期轨道垂向振动第二阶带隙起始频率B、截止频率C的影响. 可以看出, 起始频率B对扣件垂向刚度的变化敏感性差, 扣件刚度从25 kN/mm增大到45 kN/mm, 起始频率B没有发生变化, 而截止频率C随着扣件刚度的增大而增大, 表现为第二阶带隙的带宽随着扣件刚度的增大而增大.

不同扣件刚度下垂向振动第二阶带隙的截止频率对温度表现出不同的敏感性: 扣件刚度从25 kN/mm增大至45 kN/mm, 由于起始频率B并不受扣件刚度的影响, 所以它随钢轨温升幅度变化的平均变化率始终为0.093 Hz/°C; 而25~45 kN/mm 5种扣件刚度工况下, 截

表 7 温度力工况

Table 7 Temperature force conditions

温度变化 (°C)	对应温度力幅值 (N)
-30	-576228
-20	-384152
-10	-192076
0	0
10	192076
20	384152
30	576228

止频率C随钢轨温升幅度变化的平均变化率分别为0.092, 0.092, 0.091, 0.091, 0.09 Hz/°C, 平均变化率随着扣件刚度的增大呈一个逐渐减小的趋势.

5.2 扣件间距的影响

分析中, 扣件间距取值为0.615~0.655 mm. 无缝线路钢轨内部温度力取值同表7. 轨道结构参数取值同表1.

图20(a)和(b)反映了不同温升幅度下, 扣件间距变化对周期轨道垂向振动第二阶带隙起始频率B、截止频率C的影响. 可以看出, 随着扣件间距的增大, 第二阶带隙的起始和截止频率均出现了大幅度的减小.

周期轨道结构第二阶带隙起始频率B与截止频率C随轴向温度力变化的平均变化率均随扣件间距的增大而减小: 0.615~0.655 mm 五种扣件间距工况下, 起始频率B随钢轨温升幅度变化的平均变化率分别为0.095, 0.093, 0.092, 0.091, 0.09 Hz/°C; 截止频率C随钢轨温升幅度变化的平均变化率分别为0.093, 0.092, 0.091, 0.09, 0.089 Hz/°C.

图 19 (网络版彩图)不同温度力下扣件刚度对带隙频率的影响
Figure 19 (Color online) Influence of fastener stiffness on bandgap frequency under different temperature force.

图 20 (网络版彩图)不同温度力下扣件间距对带隙频率的影响

Figure 20 (Color online) Influence of fastener spacing on band gap frequency under different temperature force.

6 结论

本文基于周期结构带隙理论, 利用平面波展开法分析了无限周期轨道结构的带隙特性, 并与有限元法结果进行了比较, 然后详细分析了阻尼对带隙特性的影响, 并利用功率流法分析了有限周期轨道结构中能量的传递特性; 考虑了钢轨温度力, 分析了温度力对钢轨垂向振动带隙特性的影响; 最后探讨了不同温度力下, 扣件刚度、扣件间距对带隙特性的影响. 得到如下结论.

(1) 0~1500 Hz 范围内, 采用 Timoshenko 梁模型能够较为准确地表征周期轨道结构垂向振动带隙特性, 且垂向弯曲波具有两条带隙(0~128.69 Hz, 1014.41~1030.06 Hz). 带隙范围内弹性波会产生衰减, 相较于第二阶带隙, 第一阶带隙的衰减更为明显. 钢轨振动传输特性实验证明了周期性轨道结构带隙的存在.

(2) 钢轨损耗因子对带隙频率的影响不大, 但会降低弯曲振动幅值, 且频率越高, 幅值衰减幅度越大; 扣件阻尼损耗因子主要影响垂向振动第一阶带隙频率, 垂向第一阶带隙截止频率随扣件阻尼损耗因子增大而增大. 同时, 扣件阻尼损耗因子会在低频产生较大的阻尼衰减, 从而能够拓宽第一阶带隙的衰减频率范围, 随着频率增大, 阻尼衰减项减小, 高频处弯曲振动幅值衰

减不明显.

(3) 周期轨道结构功率流也存在带隙特性. 在禁带频率范围内(0~128.85 Hz), 振源向轨道结构输入的功率流很小, 且输入的功率流主要往轨道下部基础传递, 沿着钢轨纵向传播很少, 且传播的距离很近; 在通带频率范围内, 振源能够大幅度向轨道结构输入的功率流, 相比于禁带, 沿着钢轨纵向传递的功率流更多, 且传播的距离更远.

(4) 周期轨道结构垂向振动第一阶带隙截止频率不受纵向温度力的影响, 第二阶带隙起始和截止频率均随纵向拉力的增大而增大, 随纵向压力的增大而减小. 其中, 第二阶带隙起始频率 B(1014.41 Hz)、截止频率 C(1030.05 Hz) 随纵向温度力变化率分别约为 0.093 和 0.092 Hz/°C, 这两个特征频率可以作为无缝线路钢轨内部温度力大小的主要评价指标.

(5) 周期轨道垂向振动第二阶带隙频率(B, C)对于纵向温度力的敏感性(即平均变化率)随轨枕间距的增大而减小. 因而, 采用振动法分析无缝线路钢轨内部温度力时需事先确定准确的扣件间距.

(6) 本文研究结论有利于更深入地理解轨道结构中振动波的传播特性, 同时对轨道的振动噪声有不同角度的深刻理解, 为轨道结构振动和噪声的控制提供新的思路与指导.

参考文献

- Wen J H. Propagation of Elastic Waves in Artificial Periodic Structures—Vibration and Acoustic Characteristics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [温激鸿. 人工周期结构中弹性波的传播——振动与声学特性. 北京: 科学出版社, 2015]
- Mead D J. Free wave propagation in periodically supported, infinite beams. *J Sound Vib*, 1970, 11: 181–197
- Mead D J. Vibration response and wave propagation in periodic structures. *J Manuf Sci Eng*, 1971, 93: 783–792
- Mead D J, Markuš Š. Coupled flexural-longitudinal wave motion in a periodic beam. *J Sound Vib*, 1983, 90: 1–24

- 5 Mead D J, Yaman Y. The harmonic response of uniform beams on multiple linear supports: A flexural wave analysis. *J Sound Vib*, 1990, 141: 465–484
- 6 Mead D M. Wave propagation in continuous periodic structures: Research contributions from Southampton, 1964–1995. *J Sound Vib*, 1996, 190: 495–524
- 7 Jiang B L, Liu W N, Ma M, et al. Application of periodic pile in vibration isolation of rail transit based on bloch-floquet theory (in Chinese). *J China Railway Soc*, 2018, 3: 146–152 [姜博龙, 刘维宁, 马蒙, 等. 基于Bloch-Floquet理论的周期性排桩在轨道交通隔振中的应用研究. 铁道学报, 2018, 3: 146–152]
- 8 Wu T X, Thompson D J. Application of a multiple-beam model for lateral vibration analysis of a discretely supported rail at high frequencies. *J Acoust Soc Am*, 2000, 108: 1341
- 9 Grassie S L, Gregory R W, Harrison D, et al. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *J Mech Eng Sci*, 1982, 24: 77–90
- 10 Thompson D J. *Railway Noise and Vibration: Mechanisms, Modelling and Means of Control*. Oxford: Elsevier, 2009
- 11 Sheng X, Li M H. Propagation constants of railway tracks as a periodic structure. *J Sound Vib*, 2007, 299: 1114–1123
- 12 Sheng X, Jones C J C, Thompson D J. Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads. *J Sound Vib*, 2005, 282: 125–149
- 13 Lu J F, Mei H, Zhong L. Dynamic response of a periodic viaduct to a moving loading with consideration of the pile-soil-structure interaction. *Acta Mech*, 2015, 226: 2013–2034
- 14 Lu J F, Zhong L, Zhang R. Dynamic response of a periodic viaduct to a moving point loading. *Arch Appl Mech*, 2015, 85: 149–169
- 15 Abe K, Fujishita S, Koro K. Development of transmitting boundary for periodically supported rails. *J Mech Syst Transp Logist*, 2010, 3: 44–52
- 16 Wang P, Yi Q, Zhao C, et al. Elastic wave propagation characteristics of periodic track structure in high-speed railway. *J Vib Control*, 2019, 25: 517–528
- 17 Aikawa A, Sakai H, Abe K. Numerical and experimental study on measuring method of rail axial stress of continuous welded rails based on use of resonant frequency. *Q R RTRI*, 2013, 54: 118–125
- 18 Feng Q S, Wang W, Liu Q J. Analysis of vertical vibration characteristics of periodic discrete supported rail under axial temperature force (in Chinese). *J China Railw Soc*, 2018, 40: 126–133 [冯青松, 汪玮, 刘庆杰. 轴向温度力影响下周期离散支承钢轨竖向振动特性分析. 铁道学报, 2018, 40: 126–133]
- 19 Wang P, Yi Q, Zhao C, et al. Wave propagation in periodic track structures: Band-gap behaviours and formation mechanisms. *Arch Appl Mech*, 2017, 87: 503–519
- 20 Mandal N K, Biswas S. Vibration power flow: A critical review. *Shock Vib Digest*, 2005, 37: 3–11
- 21 Lian S L. *Track Engineering* (in Chinese). Shanghai: Tongji University Press, 2006 [练松良. 轨道工程. 上海: 同济大学出版社, 2006]

Analysis of vertical vibration band gap characteristics of periodic discrete support rail

FENG QingSong¹, YANG Zhou¹, GUO WenJie¹, LU JianFei², LIANG YuXiong¹ & LEI XiaoYan¹

¹ Engineering Research Center of Railway Environment Vibration and Noise, Ministry of Education, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

² Department of Civil Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

In this paper, a periodic track structure is simplified as a periodic, discrete, support rail structure, and the vertical vibration band gap characteristics are studied. Treating the rail as a Timoshenko beam, the plane wave expansion method is used to calculate the periodic track structure vertical vibration band gap characteristics. These characteristics are compared using the entity unit finite element method, followed by further analysis of the physical meaning of each order frequency band gap. Results show that within the range of 0–1500 Hz, the band gap characteristics of periodic track structures can be accurately characterized using a Timoshenko beam model. The vibration transmission characteristics of the track structure with finite period are then calculated by the finite element method, and the band gap characteristics are further verified by a rail transmission characteristics experiment. Next, the influence of different dampers on the band gap characteristics in the track structure is analyzed. Then the power flow method is used to analyze the energy propagation characteristics in the finite-period track structure, and finally the relationship between the vertical temperature force and the band gap frequency of the track structure's vertical vibration is analyzed. The analysis results show that the energy flow of the periodic track structure also has band gap characteristics. The starting frequency B (1014.41 Hz) and cut-off frequency C (1030.06 Hz) of the second-order band gap of the periodic track structure's vertical vibration can be used as the main evaluation indices of the temperature force inside the rail of the seamless track. The band gap characteristics in the periodic track structure provide a deeper understanding of the propagation characteristics of vibration waves in the track structure and provide a new concept for railway vibration and noise control.

periodic discrete support rail, the band gap of elastic wave, plane wave expansion method, vibration transfer characteristics, power flow, rail temperature force

doi: [10.1360/SST-2019-0271](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0271)