一类 $\mathbb{D}$ 型箭图的表示的 Frobenius-Perron 维数

周景珩^{1†}, 王艳华^{2,3*}, 丁静如²

1. 复旦大学上海数学中心, 上海 200433;

2. 上海财经大学数学学院, 上海 200433;

3. 上海市金融信息技术研究重点实验室, 上海 200433

E-mail: jhzhou@msg.sufe.edu.cn, yhw@mail.shufe.edu.cn, jrding@163.sufe.edu.cn

收稿日期: 2020-03-26; 接受日期: 2020-05-29; 网络出版日期: 2020-10-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971289 和 11871071) 资助项目

摘要 本文通过研究一类 $\mathbb{D}$ 型箭图的不可分解表示的砖块 (brick) 集, 给出这些不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数.

关键词 箭图 Frobenius-Perron 维数 砖块集 谱半径 自函子

MSC (2020) 主题分类 18E40, 16G60, 16E45

1 引言

Etingof 等^[1] 于 2005 年在有限张量范畴中引入了一个对象的 Frobenius-Perron 维数. Etingof 和 Ostrik^[2] 研究了 Frobenius-Perron 维数的分类和性质. 近些年的研究表明, Frobenius-Perron 维数是有限张量范畴中的一个重要不变量, 是联系有限张量范畴与半单拟 Hopf 代数 (弱 Hopf 代数) 表示范畴之间的一个重要工具. 设 k 是代数闭域, 2019 年 Chen 等^[3] 把有限张量范畴中对象的 Frobenius-Perron 维数推广到任意 k - 线性范畴中. 文献 [4, 5] 定义了自函子的 Frobenius-Perron 维数, 并研究了射影空间和有限箭图的 Frobenius-Perron 维数. 因此, Frobenius-Perron 维数也成为了研究 Abelian 范畴和导出范畴与表示理论之间关系的一个重要不变量.

众所周知, ADE 型 Dynkin 图在表示理论中占有重要的地位 (参见文献 [6–10]). Zhang 和 Zhou 在文献 [11] 中给出了 A 型 Dynkin 图有限维表示范畴的有界导出范畴中不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数.

设箭图 D_n 具有 n 个顶点: $a, b, 1, \dots, n-2$; α 和 β 分别表示从点 a 和 b 到点 1 的箭向, γ_i ($1 \leq i \leq n-3$) 表示从点 $i+1$ 到点 i 的箭向. 在如上工作的基础上, 本文研究箭图 D_n ($n \geq 4$) 的不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数:

[†]当前地址: 上海财经大学数学学院, 上海 200433.

Gabriel 和 Rouiter^[10] 证明了 ADE 型 Dynkin 图的不可分解表示在同构意义下与 Dynkin 图的正根是一一对应的. 由此可知具有 n 个顶点的 $\mathbb{D}$ 型 Dynkin 图共有 $n(n-1)$ 个互不同构的不可分解表示. 设 $1 \leq i \leq j \leq n-2$, 则箭图 D_n 的不可分解表示为

特别地, 单表示 A^0 和 B^0 分别为

令 k 是特征为 0 的代数闭域, 记 $[x]$ 为向下取整. 设 $M = ((M)_i, (M)_{\alpha_i})$ 是 D_n 的不可分解表示, 用 $\text{fpd}(M)$ 表示 M 的 Frobenius-Perron 维数. 我们得到了 D_n 的互不同构的不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数, 也见文中定理 4.1.

定理 1.1 设 M 是 D_n 的任意不可分解表示, 则

(1) 若 $(M)_1 \neq 0$, 则 $\text{fpd}(M) = \dim(M)_1$.

表 1 当 $n = 5, 6, 7, 8$ 时, 不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数

n	(i, j)	$\text{fpd}(C^{ij})$	n	(i, j)	$\text{fpd}(C^{ij})$
5	(2, 3)	3	8	(2, 3)	4
6	(2, 3)	$2 + \sqrt{2}$		(2, 4)	$3 + \sqrt{5}$
	(2, 4)	4		(2, 5)	6
	(3, 4)	3		(2, 6)	$\frac{7+\sqrt{33}}{2}$
7	(2, 3)	4		(3, 4)	4
	(2, 4)	5		(3, 5)	5
	(2, 5)	$3 + \sqrt{6}$		(3, 6)	$3 + \sqrt{6}$
	(3, 4)	$2 + \sqrt{2}$		(4, 5)	$2 + \sqrt{2}$
	(3, 5)	4		(4, 6)	4
	(4, 5)	3		(5, 6)	3

(2) 若 M 是单表示 A^0 或 B^0 , 则 $\text{fpd}(M) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

(3) 若 $M = C^{ij}$ ($2 \leq i \leq j \leq n-2$), 则有

(i) 如果 $2j-i < n-2$, 则 $\text{fpd}(M) = 2(j-i) + 2$;

(ii) 如果 $2j-i \geq n-2$, 且 $n-i$ 是奇数, 则 $\text{fpd}(M)$ 是多项式

$$f_{u,v}(x) = 3x^u(x-1)^v - 2x^{u+v} - 2ux^{u+v-1} \quad (1.1)$$

的最大实根, 其中 $u = n-2-j$, $v = j+1 - \frac{n+i-1}{2}$;

(iii) 如果 $2j-i \geq n-2$, 且 $n-i$ 是偶数, 则 $\text{fpd}(M)$ 是多项式

$$g_{u,v}(x) = x^u(4x(x-1)^{v+1} - x^2(x-1)^v - 2(x-1)x^{v+1} - 2u(x-1)x^v) \quad (1.2)$$

的最大实根, 其中 $u = n-2-j$, $v = j+1 - \frac{n+i}{2}$.

特别地, $\text{fpd}(C^{ii})$ ($2 \leq i \leq n-2$) = 2. 当 $n = 5, 6, 7, 8$ 且 $2 \leq i < j \leq n-2$ 时, 定理 1.1(3) 中不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数如表 1 所示.

本文余下内容结构如下: 第 2 节回顾 k -线性范畴中自函子的 Frobenius-Perron 维数的定义; 第 3 节给出箭图 D_n 的不可分解表示的砖块集; 第 4 节给出 D_n 的不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数.

2 预备知识

令 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是具有有限个顶点和有限个箭向的有限箭图, 其中 Q_0 表示顶点集, Q_1 表示箭向集. 设 $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha) \in Q_0$ 表示箭向 α 的起点, $t(\alpha) \in Q_0$ 表示 α 的终点. 若 M 是有限箭图 Q 的表示, 令 $i \in Q_0$, 顶点 i 上的向量空间记为 $(M)_i$. 令 $\alpha \in Q_1$, 且 $s(\alpha) = i$, $t(\alpha) = j$, 用 $(M)_\alpha$ 表示从 $(M)_i$ 到 $(M)_j$ 的映射. 若 $M = ((M)_i, (M)_\alpha)$ 和 $N = ((N)_i, (N)_\alpha)$ 是 Q 的两个表示, 则 M 与 N 的张量积 $M \otimes N$ 为如下 k -向量空间的张量积所诱导的表示:

$$(M \otimes N)_i = (M)_i \otimes_k (N)_i, \quad (M \otimes N)_\alpha = (M)_\alpha \otimes_k (N)_\alpha. \quad (2.1)$$

可以看出这样定义的张量积是交换的, 即 $M \otimes N = N \otimes M$, 参见文献 [12].

矩阵的谱半径 (spectral radius) 是线性代数中一个重要的概念, 它被广泛应用于拓扑理论、组合理论和概率统计理论中. 下面回顾谱半径的定义:

定义 2.1 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个方阵, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ 是 A 的所有特征值构成的集合, 则矩阵 A 的谱半径定义为

$$\rho(A) := \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\} \in \mathbb{R}.$$

令 $\mathcal{C}$ 是 k - 线性范畴, $\phi := \{X_1, \dots, X_m\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中非零对象构成的有限子集, 下面的定义参见文献 [13, 定义 2.4, 第 7 章].

定义 2.2 若 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 满足 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) = k$, 则称 X 是一个砖块. 设 $\phi := \{X_1, \dots, X_m\}$, 如果 ϕ 中每个 X_i 都是一个砖块, 且对任意的 $1 \leq i \neq j \leq m$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j) = 0$, 则称 ϕ 是 $\mathcal{C}$ 中一个砖块集.

下面给出 k - 线性范畴中自函子 (endofunctor) 的 Frobenius-Perron 维数的定义 (参见文献 [3]).

定义 2.3 设 $\phi := \{X_1, \dots, X_m\}$, $i, j = 1, \dots, m$, σ 是 $\mathcal{C}$ 的自函子, 称矩阵

$$A(\phi, \sigma) = (a_{ij})_{m \times m}, \quad a_{ij} = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, \sigma(X_j))$$

为 (ϕ, σ) 的相邻矩阵.

定义 2.4 令 Φ_b 是范畴 $\mathcal{C}$ 中有限砖块集构成的集合, 称 $\text{fpd}(\sigma) := \sup_{\phi \in \Phi_b} \{\rho(A(\phi, \sigma))\}$ 为自函子 σ 的 Frobenius-Perron 维数.

若 $\mathcal{C}$ 是幺半范畴, $M \in \mathcal{C}$, 显然 $M \otimes -$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个自函子, 定义 M 的 Frobenius-Perron 维数为 $\text{fpd}(M) = \text{fpd}(M \otimes -)$.

下面的引理有助于我们给出 D_n 的砖块集.

引理 2.1 设 M 和 N 是 D_n ($n \geq 5$) 的两个不可分解表示, 如果存在 $s \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, 使得 $(M)_s = (M)_{s+1}$, $(N)_s = (N)_{s+1}$, 则存在 D_{n-1} 的两个不可分解表示 M^s 和 N^s 使得

$$\text{Hom}_{D_n}(M, N) \cong \text{Hom}_{D_{n-1}}(M^s, N^s),$$

其中

$$(M^s)_i = \begin{cases} (M)_{i+1}, & \text{若 } s+1 \leq i \leq n-3, \\ (M)_i, & \text{其他情形,} \end{cases} \quad (N^s)_i = \begin{cases} (N)_{i+1}, & \text{若 } s+1 \leq i \leq n-3, \\ (N)_i, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

证明 注意到

若 $(M)_s = (M)_{s+1}$, $(N)_s = (N)_{s+1}$, 则 $f_s = f_{s+1}$, 此时有

$$\text{Hom}_{D_n}(M, N) = \text{Hom}_{D_{n-1}}(M^s, N^s).$$

证毕. □

在计算 D_n ($n > 5$) 的两个不可分解表示之间的 $\text{Hom}_{D_n}(-, -)$ 时, 多数情形下可以利用引理 2.1 转化为 D_5 的情形. 下面是 D_5 的 Auslander-Reiten 箭图:

3 Brick 集

若 $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, \dots, n-2\}$, 用不等式 $j_1 < \{i_1, i_2\} < j_2$ 表示集合 $\{i_1, i_2\}$ 中的每个元素都介于 j_1 与 j_2 之间, 即 $j_1 < i_1 < j_2$ 且 $j_1 < i_2 < j_2$. 将 $\text{Hom}_{D_n}(-, -)$ 简写为 $\text{Hom}(-, -)$, 下面的引理给出了两个不可分解表示的 $\text{Hom}(-, -) = 0$ 的情形.

引理 3.1 设 $1 \leq \{i, i', j, j'\} \leq n-2$.

- (1) 若 $i > i'$, 则 $\text{Hom}(A^i, A^{i'}) = \text{Hom}(B^i, B^{i'}) = \text{Hom}(D^i, D^{i'}) = 0$;
- (2) 若 $i > i'$, 则 $\text{Hom}(A^i, X^{i'j}) = \text{Hom}(B^i, X^{i'j}) = 0$;
- (3) 若 $0 < i' < j$, 则 $\text{Hom}(X^{ij}, A^{i'}) = \text{Hom}(X^{ij}, B^{i'}) = 0$;
- (4) 若 $i > i'$ 或 $j > j'$, 则 $\text{Hom}(X^{ij}, X^{i'j'}) = 0$;
- (5) 若 M 是 D_n 的一个不可分解表示且 $M \neq C^{11}$, 则 $\text{Hom}(M, C^{11}) = 0$.

证明 由引理 2.1 以及 D_4 、 D_5 和 D_6 的情形可知. □

为方便起见, 我们对 D_n 的不可分解表示做如下分类:

- (1) $R_1 = \{C^{ij} \mid 2 \leq i \leq j \leq n-2\}$;
- (2) $R_2 = \{C^{1j} \mid 1 \leq j \leq n-2\}$;
- (3) $R_3 = \{A^i \mid 0 \leq i \leq n-2\}$;
- (4) $R_4 = \{B^i \mid 0 \leq i \leq n-2\}$;
- (5) $R_5 = \{D^i \mid 1 \leq i \leq n-2\}$;
- (6) $R_6 = \{X^{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n-2\}$.

引理 3.2 设 M 和 N 是 D_n 的不可分解表示, 若下列条件之一成立, 则有 $\text{Hom}(M, N) = 0$.

- (1) $M \in \bigcup_{k=3}^6 R_k$, $N \in R_2$;
- (2) $M \in R_5$, $N \in R_2 \cup (R_3 \setminus \{A^0\}) \cup (R_4 \setminus \{B^0\}) \cup R_6$;
- (3) $M \in R_1$, $N \in \bigcup_{k=2}^6 R_k$.

证明 由引理 2.1 以及 D_4 和 D_5 的情形可知. □

下面假设 $1 \leq \{i, i', j, j'\} \leq n-2$, 由引理 2.1、3.1 和 3.2 可以得到 D_n 的二元砖块集.

引理 3.3 设 $1 \leq \{i, i', j, j'\} \leq n-2$, 则 D_n 有如下的二元砖块集:

- (1) $\{A^i, B^{i'}\}$ 是砖块集;

- (2) $\{A^i, D^{i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i > i'$;
- (3) $\{A^i$ (或 B^i , 或 C^{1i} , 或 D^i), $C^{i'j'}$ ($i' \geq 2$) $\}$ 是砖块集当且仅当 $i < i'$ 或 $i > j'$;
- (4) $\{B^i, D^{i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i > i'$;
- (5) $\{C^{ij}, C^{i'j'}\}$ 是砖块集当且仅当 $j < i'$, 或 $j' < i$, 或 $i' < i < j < j'$, 或 $i < i' < j' < j$;
- (6) $\{X^{ij}, A^{i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i < i' < j$;
- (7) $\{X^{ij}, B^{i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i < i' < j$;
- (8) $\{X^{ij}, D^{i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i' < i$;
- (9) $\{X^{ij}, C^{1i'}\}$ 是砖块集当且仅当 $j < i'$;
- (10) $\{X^{ij}, C^{i'j'}\}$ ($i' \geq 2$) 是砖块集当且仅当 $i < i' \leq j' < j$, 或 $j' < i$, 或 $j < i'$;
- (11) $\{X^{ij}, X^{i'j'}\}$ 是砖块集当且仅当 $i < i' < j' < j$ 或 $i' < i < j < j'$.

本节的最后回顾 Herschend^[14] 的关于两个不可分解表示的张量积的结论.

命题 3.1 设 M 和 N 是 D_n 的不可分解表示, 则有

- (1) 若 $M \in R_1$, 则 $M \otimes N$ 是 R_1 中表示的直和;
- (2) 若 $M \in R_2$, $N \in \bigcup_{k=2}^6 R_k$, 则 $M \otimes N$ 是 R_2 中表示的直和;
- (3) 若 $M \in R_3$ (或 R_4), 则 $M \otimes N$ 是 $R_2 \cup R_3$ (或 $R_2 \cup R_4$) 中表示的直和;
- (4) 若 $M \in R_5$, $N \in R_6$, 则 $M \otimes N$ 是 $R_3 \cup R_4$ 或 R_6 中表示的直和.

4 主要定理

本节中一直假设 ϕ 是一个砖块集, 且记 $\phi_i = \phi \cap R_i$, $\forall 1 \leq i \leq 6$. 由引理 3.1 知, 子集 ϕ_2 、 ϕ_3 、 ϕ_4 和 ϕ_5 是空集或只含有一个元素的集合. 此外, 若 x 和 y 是任意两个数, 记

$$x \vee y = \max\{x, y\}, \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

首先, 对单表示的 Frobenius-Perron 维数给出刻画.

引理 4.1 若 M 是一个单表示, 则

$$\text{fpd}(M) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{若 } M = A^0 \text{ 或 } M = B^0, \\ 1, & \text{若 } M = C^{11}, \\ 2, & M = C^{ss}, \text{ 其中 } 2 \leq s \leq n-2. \end{cases}$$

证明 设 ϕ 是一个砖块集. 若 M 是一个单表示, 则 M 是 A^0 、 B^0 或 C^{ss} ($1 \leq s \leq n-2$).

(1) 当 $M = A^0$ 时, 由张量积的定义 (2.1) 知, A^0 与 ϕ_1 、 ϕ_2 和 ϕ_4 中元素的张量为 0, 不妨设 $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = \emptyset$. 于是对任意 $N \in \phi$, 都有 $M \otimes N = M$ 和 $\text{Hom}(N, M) = k$. 故

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = |\phi_3| + |\phi_5| + |\phi_6| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \quad (4.1)$$

注意到当 $n-2 = 2p \geq 2$ 时, 可取 $\phi = \{D^1, X^{2,2p}, X^{3,2p-1}, \dots, X^{p,p+2}, A^{p+1}\}$; 当 $n-2 = 2p+1$ 时, 可取 $\phi = \{D^1, X^{2,2p+1}, X^{3,2p}, \dots, X^{p+1,p+2}\}$. 因此, (4.1) 中等号成立, 可知 $\text{fpd}(A^0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 当 $M = B^0$ 时, 同理可证 $\text{fpd}(B^0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

(2) 当 $M = C^{11}$ 时, 由张量积的定义可知, 对任意 D_n 的表示 N , 有 $M \otimes N = M^{\oplus \dim(N)_1}$. 再由引理 3.1 可知 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 1$, 且当 $\phi = \{C^{11}\}$ 时等号成立, 因此 $\text{fpd}(C^{11}) = 1$.

(3) 当 $M = C^{ss}$ ($2 \leq s \leq n-2$) 时, 由张量积的定义可知, 对 D_n 的任意表示 N , 都有 $M \otimes N = M^{\oplus \dim(N)_s}$. 再由引理 3.3 可知此时只需要考虑如下的砖块集:

- (i) $\phi = \{A^s, B^s\}$ 时, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 2$;
- (ii) $\phi = \{C^{is}\}$ 时, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$;
- (iii) $\phi = \{D^s\}$ 时, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$;
- (iv) $\phi = \{X^{is}\}$ 时, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$;
- (v) $\phi = \{X^{sj}\}$ 时, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 2$.

故 $\text{fpd}(M) = 2$. □

命题 4.1 若 $M \in R_2$, 则 $\text{fpd}(M) = 1$.

证明 由引理 3.2 和命题 3.1 可得

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_1, M \otimes -)), \rho(A(\phi_2, M \otimes -))\} \leq 1.$$

若 $\phi = \{C^{11}\}$, 则有 $M \otimes C^{11} = C^{11}$, 即可得 $A(\phi, M \otimes -) = (1)_{1 \times 1}$, 则 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$, 此时 $\text{fpd}(M) = 1$. □

命题 4.2 设 $M \in R_3$, 则

$$\text{fpd}(M) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{若 } M \text{ 是单表示,} \\ 1, & \text{其他情形.} \end{cases}$$

证明 记 $M = A^s$. 当 $M = A^0$ 时, 由引理 4.1 可知 $\text{fpd}(M) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 当 $s > 0$ 时, 由引理 3.2 和命题 3.1 可知,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_1, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_1, M \otimes -))\}.$$

由文献 [11, 定理 0.8] 可知 $\rho(A(\phi_1, M \otimes -)) \leq 1$. 因此下面可设 $\phi_1 = \emptyset$.

若 $\phi_2 = \{C^{1j}\} \neq \emptyset$, 由命题 3.1 知 $M \otimes C^{1j} = C^{1, s \wedge j}$. 再由引理 3.2 知, 对任意 $N \in \phi$ 且 $N \neq C^{1j}$, 都有 $\text{Hom}(N, M \otimes C^{1j}) = 0$. 于是,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_2, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_2, M \otimes -))\},$$

且 $\rho(A(\phi_2, M \otimes -)) \leq 1$. 因此进一步可设 $\phi_2 = \emptyset$.

由引理 3.2、3.3 和命题 3.1 知, 对任意 $N \in \phi_4$, $N' \in \phi$, 都有 $\text{Hom}(N, M \otimes N') = 0$. 因此不妨设 $\phi_4 = \emptyset$.

当 $A^0 \in \phi$ 时必有 $\phi = \{A^0\}$, 故 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$. 当 $A^0 \notin \phi$ 时, 若 $\phi_3, \phi_5, \phi_6 \neq \emptyset$, 则可设 $\phi = \{A^{i_2}, D^{i_3}, X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}\}$, 且有 $i_3 < l_1 < \dots < l_p < i_2 < r_p < \dots < r_1$. 如果 $s < r_1$, 则对任意的 t 都有 $M \otimes X^{l_t r_t} = A^{r_t \wedge s} \oplus C^{1, l_t \wedge s}$, 且 $M \otimes A^{i_2} = A^{s \wedge i_2}$, $M \otimes D^{i_3} = A^{s \wedge i_3}$. 由引理 3.1 和 3.3 知, 对任意的 $N \in \phi$, 有 $\text{Hom}(X^{l_1 r_1}, M \otimes N) = 0$. 因此可以假设 $r_1 \leq s$. 于是有

$$M \otimes A^{i_2} = A^{i_2}, \quad M \otimes D^{i_3} = A^{i_3}, \quad M \otimes X^{l_t r_t} = A^{r_t} \oplus C^{1 l_t}.$$

重排 ϕ 中元素, 记 $\phi = \{X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}, D^{i_3}, A^{i_2}\}$, 则 $A(\phi, M \otimes -)$ 是一个对角线元素均为 1 的下三角阵.

若 ϕ_3 、 ϕ_5 和 ϕ_6 中有空集, 同理可得 $A(\phi, M \otimes -)$ 是一个对角线元素均为 1 的下三角阵. 综上所述, $\text{fpd}(M) = 1$. $\square$

命题 4.3 设 $M \in R_5$, 则 $\text{fpd}(M) = 1$.

证明 记 $M = D^s$ ($1 \leq s \leq n-2$). 类似于命题 4.2, 有

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_1, M \otimes -)), \rho(A(\phi_2, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus (\phi_1 \cup \phi_2), M \otimes -))\},$$

且 $\rho(A(\phi_i, M \otimes -)) \leq 1$, $i = 1, 2$, 因此不妨设 $\phi_1 = \phi_2 = \emptyset$.

由引理 3.2 和命题 3.1 知, 对任意 $N \in \phi_5$, $N' \in \phi \setminus \phi_5$, 都有 $\text{Hom}(N, M \otimes N') = 0$. 于是,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_5, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_5, M \otimes -))\},$$

且有 $\rho(A(\phi_5, M \otimes -)) \leq 1$, 故进一步假设 $\phi_5 = \emptyset$.

若 $A^0 \in \phi$ 或 $B^0 \in \phi$, 由引理 3.3, 不妨设 $\phi = \{A^0, B^i\}$, 则易知 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$. 若 $A^0 \notin \phi$, $B^0 \notin \phi$, $\phi_6 \neq \emptyset$, 设 $\phi_6 = \{X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}\}$, 且 $l_1 < \dots < l_p < r_p < \dots < r_1$. 进一步还可以假设 $l_p < s$. 事实上, 若 $l_p \geq s$, 则 $M \otimes X^{l_p r_p} = A^s \oplus B^s$. 于是, 由引理 3.1 和 3.3 可知, 对任意的 $N \in \phi$, 有 $\text{Hom}(N, M \otimes X^{l_p r_p}) = 0$. 此时由引理 3.1 可知,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_3, M \otimes -)), \rho(A(\phi_4, M \otimes -)), \rho(A(\phi_6, M \otimes -))\}.$$

注意到此时 $A(\phi_6, M \otimes -)$ 是一个严格下三角阵, 因此不妨设 $\phi_6 = \emptyset$, 故有

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_3, M \otimes -)), \rho(A(\phi_4, M \otimes -))\} \leq 1.$$

综上所述, $\text{fpd}(M) = 1$. $\square$

命题 4.4 若 $M \in R_6$, 则 $\text{fpd}(M) = 2$.

证明 设 $M = X^{sm} \in R_6$, $1 \leq s < m \leq n-2$. 与命题 4.3 同理, 有 $\rho(A(\phi_i, M \otimes -)) \leq 2$, $i = 1, 2$, 且若 $A^0 \in \phi$ 或 $B^0 \in \phi$ 时, 易得 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 1$. 下设 $\phi_1 = \phi_2 = \emptyset$.

若 $A^0 \notin \phi$, $B^0 \notin \phi$, 且 $\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6 \neq \emptyset$, 则设 $\phi = \{A^{i_1}, B^{i_2}, D^{i_3}, X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}\}$, 其中 $i_3 < l_1 < \dots < l_p < \{i_1, i_2\} < r_p < \dots < r_1$. 又

$$M \otimes D^{i_3} = \begin{cases} A^{i_3} \oplus B^{i_3}, & \text{若 } i_3 \leq s, \\ X^{s, i_3 \wedge m}, & \text{若 } i_3 > s, \end{cases}$$

且

$$\text{Hom}(A^{i_1}, M \otimes D^{i_3}) = \text{Hom}(B^{i_2}, M \otimes D^{i_3}) = \text{Hom}(D^{i_3}, M \otimes D^{i_3}) = \text{Hom}(X^{l_t r_t}, M \otimes D^{i_3}) = 0,$$

故可设 $\phi_5 = \emptyset$. 此外, 用符号 “ $\equiv$ ” 来表示 “ $\equiv \text{mod}(R_2)$ ”. 对任意的 t , 由文献 [14] 有 $M \otimes X^{l_t r_t} \equiv A^{s \wedge l_t} \oplus B^{s \wedge l_t}$. 注意到对任意的 $q \in \{1, \dots, p\}$, 都有 $s \wedge l_t \leq l_t < l_p < \{i_1, i_2\} < r_q$, 所以,

$$\text{Hom}(A^{i_1}, M \otimes X^{l_t r_t}) = \text{Hom}(B^{i_2}, M \otimes X^{l_t r_t}) = \text{Hom}(X^{l_q r_q}, M \otimes X^{l_t r_t}) = 0,$$

故可设 $\phi_6 = \emptyset$. 另外, $M \otimes A^{i_1} \equiv A^{i_1 \wedge m}$, $M \otimes B^{i_2} \equiv B^{i_2 \wedge m}$, 故 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 1$.

综上, $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 2$, 且 $\phi = \{C^{11}\}$ 时有 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 2$, 故 $\text{fpd}(M) = 2$. $\square$

令矩阵

$$P(u, v) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline 3 & \cdots & 3 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \end{array} \right),$$

其中 (1, 1)- 位置是 u 阶方阵, (2, 2)- 位置是 v 阶方阵. 再令矩阵

$$Q(u, v) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & \cdots & 3 & 3 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

其中 (1, 1)- 位置是 u 阶方阵, (2, 2)- 位置是 v 阶方阵. 易知定理 1.1 中多项式 (1.1) 是 $P(u, v)$ 的特征多项式, (1.2) 是 $Q(u, v)$ 的特征多项式. 由 Gershgorin 圆盘定理^[15] 有

$$\rho(P(u, v)) \leq 2u + 3v, \quad \rho(Q(u, v)) \leq 2u + 3v + 2.$$

命题 4.5 若 $M = C^{i_0 j_0} \in R_1$, $2 \leq i_0 \leq j_0 \leq n - 2$, 则存在非负整数 u 和 v 使得 $\text{fpd}(M)$ 是多项式 (1.1) 或 (1.2) 的最大实根.

证明 注意到, 若存在 $N \in \phi$ 使得 $M \otimes N = 0$, 则由定义 2.3 可知,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \rho(A(\phi \setminus \{N\}, M \otimes -)).$$

另外, 若存在 $N \in \phi$ 使得 $M \otimes N = N$, 则由定义 2.2 和 2.3 可知,

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{1, \rho(A(\phi \setminus \{N\}, M \otimes -))\}.$$

因此, 下面不妨假设任意 $N \in \phi$ 满足

$$M \otimes N \neq 0, \quad M \otimes N \neq N. \quad (4.2)$$

若 M 是一个单表示, 则由引理 4.1 有 $\text{fpd}(M) = 2$. 下设 $M = C^{i_0 j_0}$ 不是单表示, 即 $i_0 < j_0$.

若 $\phi_2 = \{C^{1i}\} \neq \emptyset$, 则由引理 3.2 和 3.3 知, 对任意的 $N \in \phi \setminus \phi_2$, 都有 $\text{Hom}(N, M \otimes C^{1i}) = 0$, 即 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_2, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_2, M \otimes -))\}$, 且有 $\rho(A(\phi_2, M \otimes -)) \leq 1$. 因此下设 $\phi_2 = \emptyset$.

注意到 N 满足 (4.2), 则可进一步对 ϕ_1 进行分解, 令

$$\begin{aligned}\phi_1^1 &= \{C^{ij} \in \phi_1 \mid i \leq i_0 \leq j < j_0\}, \\ \phi_1^2 &= \{C^{ij} \in \phi_1 \mid i \leq i_0 \leq j_0 \leq j\}, \\ \phi_1^3 &= \{C^{ij} \in \phi_1 \mid i_0 < i \leq j_0 \leq j\}.\end{aligned}$$

另外, 若 $N \in \phi_1^3$, $N' \in \phi \setminus \phi_1^3$, 则有 $\text{Hom}(N, M \otimes N') = 0$, 故

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_1^3, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_1^3, M \otimes -))\},$$

且 $\rho(A(\phi_1^3, M \otimes -)) \leq 1$. 因此下设 $\phi_1^3 = \emptyset$, 则对任意的 $N \in \phi$, 有 $(N)_{i_0} \neq 0$. 事实上, 由 D_n 的不可分解表示的形式可知, 若 $(N)_{i_0} = 0$, 则 $N \in \phi_1^3$ 或 $M \otimes N = 0$.

若 $\phi_3 \neq \emptyset$, 即 $\phi_3 = \{A^{i_1}\}$, 则可设 $i_1 \leq j_0$. 事实上, 若 $i_1 > j_0$, $\forall N \in \phi$, 则 $\text{Hom}(A^{i_1}, M \otimes N) = 0$. 此外, 可设 $\phi_4 \neq \emptyset$. 若 $\phi_4 = \emptyset$, 则由引理 3.3 可知, $\phi \cup \{B^{i_1}\}$ 也是一个砖块集, 记为 ϕ' . 此时有 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq \rho(A(\phi', M \otimes -))$. 于是可用砖块集 ϕ' 代替砖块集 ϕ . 因此, 若 $\phi_4 = \{B^{i_2}\}$, 则同理可设 $i_2 \leq j_0$. 进一步地, 若 $A^{i_1} \in \phi, B^{i_2} \in \phi$, 则用 B^{i_1} 替换 B^{i_2} 后得到的集合 ϕ' 仍是砖块集, 且由引理 3.3 知替换前后的相邻矩阵的谱半径不变, 因此不妨设 $i_2 = i_1$.

若 $\phi_5 \neq \emptyset$, 设 $\phi_5 = \{D^{i_3}\}$, 则同理可假设 $i_0 \leq i_3 \leq j_0$, 且对任意的 $C^{ij} \in \phi_1$, 有 $i_0 \leq j < i_3$. 因此, 对任意的 $N \in \phi$ 且 $N \neq D^{i_3}$, 由 $M \otimes D^{i_3} = C^{i_0 i_3}$ 可知 $\text{Hom}(N, M \otimes D^{i_3}) = 0$, 故

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_5, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_5, M \otimes -))\}.$$

而 $\rho(A(\phi_5, M \otimes -)) \leq 1$, 故下设 $\phi_5 = \emptyset$.

若 $\phi_6 \neq \emptyset$, 则设 $\phi_6 = \{X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}\}$, 其中 $l_1 < l_2 < \dots < l_p < r_p < \dots < r_2 < r_1$. 那么不妨设 $l_p \leq j_0$, 这是因为若 $l_p > j_0$, 则对任意 $N \in \phi$, 有 $\text{Hom}(X^{l_p r_p}, M \otimes N) = 0$.

若存在 $C^{ij} \in \phi_1$ 使得 $j < l_1$, 则必有 $i_0 < l_1$, 且对任意的 $N \in \phi_1$ 和 $N' \in \phi \setminus \phi_1$, 都有 $\text{Hom}(N', M \otimes N) = 0$. 故

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) = \max\{\rho(A(\phi_1, M \otimes -)), \rho(A(\phi \setminus \phi_1, M \otimes -))\},$$

且有 $\rho(A(\phi_1, M \otimes -)) \leq 1$.

同样地, 若存在 $C^{ij} \in \phi_1$, 使得 $l_p < i \leq j < r_p$, 则设 $\phi_1 = \{C^{l'_1 r'_1}, \dots, C^{l'_q r'_q}\}$ 满足 $l'_1 < l'_2 < \dots < l'_q \leq r'_q < \dots < r'_1$, 则有 $l_p < l'_1 < l'_2 < \dots < l'_q \leq i_0 \leq r'_q < \dots < r'_1 < i_1$. 于是此时用 $X^{l'_1 i_1}$ 、 $A^{r'_1}$ 和 $B^{r'_1}$ 分别替换原来 ϕ 中的 $C^{l'_1 r'_1}$ 、 A^{i_1} 和 B^{i_1} (若 $\phi_3 = \phi_4 = \emptyset$, 则用 $X^{l'_1 r'_1}$ 替换 $C^{l'_1 r'_1}$) 组成新的砖块集 ϕ' . 此时矩阵 $A(\phi', M \otimes -)$ 中的元素都大于或等于矩阵 $A(\phi, M \otimes -)$ 中对应位置的元素, 即

$$\rho(A(\phi', M \otimes -)) \geq \rho(A(\phi, M \otimes -)).$$

由以上分析及引理 3.3, 现可设 $\phi_1 = \emptyset$.

当 $\phi_3 \neq \emptyset$ 时, 由前面的讨论可知此时 $\phi_4 \neq \emptyset$. 若 $\phi_6 = \emptyset$, 则 $\phi = \{A^{i_1}, B^{i_1}\}$. 此时有 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 2$. 若 $\phi_6 \neq \emptyset$, 则有 $\phi = \{X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}, A^{i_1}, B^{i_1}\}$. 若 $l_1 < i_0$, 则对任意的 $N \in \phi$, 有 $\text{Hom}(X^{l_1 r_1}, M \otimes N) = 0$. 于是可以假设 $i_0 \leq l_1$. 令 $r_{p+1} = i_1$, 则存在某个 $r_t = j_0$. 事实上, 若 $r_{s+1} < j_0 < r_s$, 便可以用 $X^{l_s j_0}$ 替代 ϕ 中的 $X^{l_s r_s}$ 得到一个新的砖块集 ϕ' , 且满足 $A(\phi', M \otimes -)$ 中元素都不小于 $A(\phi, M \otimes -)$ 中对应位置的元素, 即 $\rho(A(\phi', M \otimes -)) \geq \rho(A(\phi, M \otimes -))$. 因此可以假设存在某个 r_t ($1 \leq t \leq p+1$), 使得 $r_t = j_0$. 故此时有关系式

$$i_0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_p < i_1 < r_p < \dots < r_t = j_0 < r_{t-1} < \dots < r_1, \quad (4.3)$$

且 $A(\phi, M \otimes -) = Q(t-1, p-t+1)$.

当 $\phi_3 = \phi_4 = \emptyset$ 时, 有 $\phi = \{X^{l_1 r_1}, \dots, X^{l_p r_p}\}$. 令 $r_{p+1} = l_p$, 同样也可以假设 $i_0 \leq l_1$, 以及存在某个 r_t ($1 \leq t \leq p+1$), 使得 $r_t = j_0$. 故此时有关系式

$$i_0 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_p < r_p < \dots < r_t = j_0 < r_{t-1} < \dots < r_1, \quad (4.4)$$

且 $A(\phi, M \otimes -) = P(t-1, p-t+1)$.

下面分情形进行讨论.

情形 (i) $j_0 - i_0 < (n-2) - j_0$, 即 $j_0 < \frac{i_0+n-2}{2}$.

设 $u = j_0 - i_0 + 1$, 对满足 (4.3) 的砖块集 ϕ , 有 $p \leq u-1$, 且 $t \geq \max\{1, 2p-u+2\}$, 故

$$\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 2(t-1) + 3(p-t+1) + 2 = 3p-t+3 \leq 2u.$$

同样地, 对满足 (4.4) 的砖块集 ϕ , 仍然有 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) \leq 2u$.

另一方面, 取砖块集 $\phi = \{X^{i_0, i_0+2u-1}, X^{i_0+1, i_0+2u-2}, \dots, X^{j_0, j_0+1}\}$, 则 $A(\phi, M \otimes -) = P(u, 0)$, 这是一个所有元素均为 2 的 u 阶方阵, 即有 $\rho(A(\phi, M \otimes -)) = 2u$. 故此时 $\text{fpd}(M) = 2u$ 是多项式 $f_{u,0}(x)$ 的最大实根.

情形 (ii) $j_0 - i_0 \geq (n-2) - j_0$ 且 $(n-2) - i_0$ 是奇数.

设 $(n-2) - i_0 = 2m-1$, 此时仿照情形 (i) 可知 $\text{fpd}(M)$ 是矩阵 $P(n-2-j_0, m+j_0-n+2)$ 的谱半径, 对应的砖块集为 $\phi = \{X^{i_0, n-2}, X^{i_0+1, n-3}, \dots, X^{i_0+m-1, i_0+m}\}$. 令 $u = n-2-j_0$, $v = m+j_0-n+2$, 则 $\text{fpd}(M)$ 就是多项式 $f_{u,v}(x)$ 的最大实根.

情形 (iii) $j_0 - i_0 \geq (n-2) - j_0$ 且 $(n-2) - i_0$ 是偶数.

设 $(n-2) - i_0 = 2m$, 此时仿照情形 (i) 可知 $\text{fpd}(M)$ 是矩阵 $Q(n-2-j_0, m+j_0-n+2)$ 的谱半径, 对应的砖块集为

$$\phi = \{X^{i_0, n-2}, X^{i_0+1, n-3}, \dots, X^{i_0+m-1, i_0+m+1}, A^{i_0+m}, B^{i_0+m}\}.$$

令 $u = n-2-j_0$, $v = m+j_0-n+2$, 则 $\text{fpd}(M)$ 就是多项式 $g_{u,v}(x)$ 的最大实根. □

结合命题 4.2-4.5, 可以得到定理 4.1.

定理 4.1 设 M 是 D_n 的任意不可分解表示, 则有

- (1) 若 $(M)_1 \neq 0$, 则 $\text{fpd}(M) = \dim(M)_1$.
- (2) 若 M 是单表示 A^0 或 B^0 , 则 $\text{fpd}(M) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- (3) 若 $M = C^{ij}$ ($2 \leq i \leq j \leq n-2$), 则有
 - (i) 如果 $2j-i < n-2$, 则 $\text{fpd}(M) = 2(j-i)+2$;

(ii) 如果 $2j - i \geq n - 2$ 且 $n - i$ 是奇数, 则 $\text{fpd}(M)$ 是多项式 (1.1) 的最大实根, 其中 $u = n - 2 - j$, $v = j + 1 - \frac{n+i-1}{2}$;

(iii) 如果 $2j - i \geq n - 2$ 且 $n - i$ 是偶数, 则 $\text{fpd}(M)$ 是多项式 (1.2) 的最大实根, 其中 $u = n - 2 - j$, $v = j + 1 - \frac{n+i}{2}$.

特别地, 对于定理 4.1(3) 中的不可分解表示的 Frobenius-Perron 维数易得如下的推论:

推论 4.1 设 C^{ij} ($2 \leq i \leq j \leq n - 2$) 和 C'^{st} ($2 \leq s \leq t \leq n' - 2$) 分别是 D_n 和 $D_{n'}$ 的两个不可分解表示, 如果 $n - i = n' - s$, $n - j = n' - t$, 则 $\text{fpd}(C^{ij}) = \text{fpd}(C'^{st})$. 特别地,

$$\text{fpd}(C^{ii} \ (2 \leq i \leq n - 2)) = 2, \quad \text{fpd}(C^{(n-3)(n-2)}) = 3, \quad \text{fpd}(C^{(n-4)(n-2)}) = 4.$$

致谢 非常感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参考文献

- 1 Etingof P, Nikshych D, Ostrik V. On fusion categories. *Ann of Math* (2), 2005, 162: 581–642
- 2 Etingof P, Ostrik V. Finite tensor categories. *Mosc Math J*, 2004, 4: 627–654
- 3 Chen J M, Gao Z B, Wicks E, et al. Frobenius-Perron theory of endofunctors. *Algebra Number Theory*, 2019, 13: 2005–2055
- 4 Chen J M, Gao Z B, Wicks E, et al. Frobenius-Perron theory for projective schemes. *arXiv:1907.02221*, 2019
- 5 Wicks E. Frobenius-Perron theory of modified ADE bound quiver algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2019, 223: 2673–2708
- 6 Gabriel P. Des catégories abéliennes. *Bull Soc Math France*, 1962, 90: 323–448
- 7 Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math*, 1972, 6: 71–103
- 8 Gabriel P. Représentations indécomposables. In: *Séminaire Bourbaki. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 431. Berlin: Springer, 1975, 143–169
- 9 Gabriel P. Indecomposable representations. II. In: *Symposia Mathematica*, vol. 11. London: Academic Press, 1973, 81–104
- 10 Gabriel P, Rouiter A V. Representations of Finite-Dimensional Algebras. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 73. Berlin: Springer, 1992
- 11 Zhang J J, Zhou J H. Frobenius-Perron theory of representations of quivers. *arXiv:2004.09111*, 2020
- 12 Strassen V. Asymptotic degeneration of representations of quivers. *Comment Math Helv*, 2000, 75: 594–607
- 13 Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory. *London Mathematical Society Student Texts*, vol. 65. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 14 Herschend M. On the representation ring of a quiver. *Algebr Represent Theory*, 2009, 12: 513–541
- 15 Geršgorin S. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *Bull Acad Sci URSS*, 1931, 6: 749–754

Frobenius-Perron dimension of representations of a class of $\mathbb{D}$ -type quivers

Jingheng Zhou, Yanhua Wang & Jingru Ding

Abstract In this paper, we investigate brick sets of indecomposable representations of a class of $\mathbb{D}$ -type quivers. Frobenius-Perron dimension of these representations are given.

Keywords quiver, Frobenius-Perron dimension, brick set, spectral radius, endofunctor

MSC(2020) 18E40, 16G60, 16E45

doi: 10.1360/SSM-2020-0093