中国科学: 数学　2020 年　第 50 卷　第 3 期: 339 ～ 366
SCIENTIA SINICA Mathematica
创刊 70 周年特邀综述

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

正定第一 Chern 类的复流形上 Kähler-Einstein 度量的研究

朱小华

北京大学数学科学学院, 北京 100871
E-mail: xhzhu@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2019-10-28; 接受日期: 2020-01-08; 网络出版日期: 2020-02-24
国家自然科学基金 (批准号: 11771019) 和北京市自然科学基金 (批准号: Z180004) 资助项目

摘要　本文是一篇综述, 概述正定第一 Chern 类的复流形上 Kähler-Einstein 度量的存在性最近 30 年来的研究进展. 本文将重点介绍 Tian 解决 Yau-Tian-Donaldson 猜想的工作.

关键词　Kähler-Einstein 度量　Yau-Tian-Donaldson 猜想　复 Monge-Ampère 方程　部分 C^0- 估计

MSC (2010) 主题分类　53C25, 53C55, 58J05, 19L10

1　引言和历史回顾

紧复流形上 Kähler-Einstein 度量的研究可以追溯到 20 世纪 50 年代初的 Calabi 问题. Calabi [1] 提出: 给定紧复流形 M 上的一个 Kähler- 类 $[\omega]$ 和 $2\pi c_1(M)$ 中任意的一个 $(1,1)$- 形式 Ω, 是否存在 $[\omega]$ 中的一个 Kähler- 度量 ω_g 满足

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) = \Omega? \tag{1.1}$$

求解 Ricci- 曲率平坦的 Kähler-Einstein 度量就是求方程 (1.1) 在 $\Omega = 0$ 时的解. Calabi 问题被 Yau 在 1978 年所解决 (参见文献 [2]).

若 M 上的 Kähler- 度量 ω_g 满足

$$\mathrm{Ric}(\omega_g) = \lambda\omega_g, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = -1 \quad 或 \quad \lambda = 0, \tag{1.2}$$

即 ω_g 的 Ricci- 曲率为常数, 则称 ω_g 为一个 Kähler-Einstein 度量 (以下简写作 KE- 度量). 显然, 在 M 上存在 KE- 度量时 Kähler- 流形的第一 Chern 类 $c_1(M)$ 有确定的符号, 即 $c_1(M) > 0$, $c_1(M) < 0$ 或 $c_1(M) = 0$. 因此, 为求解 (1.2), 可根据 $c_1(M)$ 的符号取 $\omega_g \in 2\pi c_1(M)$, 或 $\omega_g \in -2\pi c_1(M)$ [1)]. 40 多年

1) 在 $c_1(M) = 0$ 时可选择任意 Kähler 类, 参见文献 [2].

英文引用格式: Zhu X H. The existence problem of Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds with positive first Chern class (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 339–366, doi: 10.1360/SSM-2019-0265

　

前, Yau 通过研究一类复 Monge-Ampère 方程 (以下简记作 MA- 方程) 解决了 $c_1(M)<0$ 和 $c_1(M)=0$ 情形的 KE- 度量存在性问题[2]. Aubin[3] 在同一时期也独立解决了 $c_1(M)<0$ 情形.

关于在 $c_1(M)>0$ (即 Fano- 情形) 的方程 (1.2) 的可解性, 我们熟知有 KE- 度量存在性的障碍. 早在 20 世纪 50 年代初, Matsushima[4,5] 通过研究 KE- 度量的 Laplace- 算子的特征函数证明了存在 KE- 度量的 Fano- 流形, 其全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(M)$ 必须是约化的. 由此可知, 自同构群非约化的 Kähler- 曲面 $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ 和 $\mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上都不存在 KE- 度量.

在 1983 年, Futaki 发现了另一个重要的存在性障碍, 即 Futaki- 不变量. Futaki- 不变量 $f(\cdot)$ 是定义在 $\mathrm{Aut}(M)$ 的 Lie- 代数 $\eta(M)$ 上的线性形式. 取定 $2\pi c_1(M)$ 中的 Kähler- 度量 g, 并记 h 是其 Ricci- 位势, 即 h 满足

$$\mathrm{Ric}(g)-\omega_g=\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}h,$$

则

$$f(X)=\int_M X(h)\omega_g^n,\quad \forall\, X\in\eta(M).$$

Futaki 证明了 $f(X)$ 不依赖于 $2\pi c_1(M)$ 中具体 ω_g 的选取, 因而是全纯不变量. 特别地, 当 M 具有 KE- 度量时 $f(\cdot)$ 消失. 可以构造出许多具有可约的 $\mathrm{Aut}(M)$、但 f 不消失的 Fano 余 1 维齐性空间 (space with cohomogenous one)[6,7] 的例子. 显然, 这些流形上也不存在 KE- 度量.

从现在起, 我们都假设 M 是 Fano- 流形. KE- 度量的唯一性问题由两位日本数学家 Bando 和 Mabuchi[8] 在 1985 年解决. 此后人们开始寻找 Fano- 流形上存在 KE- 度量的充要条件. 在过去 30 多年中, 数学家们在这方面建立了许多基础性工作. 以下是一些有代表性的工作.

(1) Tian[9] 引进了 α- 不变量并用它给出了存在 KE- 度量的一个充分条件. 由此通过计算 α- 不变量构造出一系列 KE- 流形的新例子. 在随后的文献 [10] 中, Tian 和 Yau 证明了大量的 Fano- 曲面都存在 KE- 度量.

(2) Tian[11] 在文献 [10] 的基础上通过建立部分 C^0- 估计解决了 Fano- 曲面上 KE- 度量的存在性问题. 随后, 他提出了高维情形的部分 C^0- 估计猜测[12]. 这个猜测是用连续性方法研究 KE- 度量的技术关键 (参见文献 [13]).

(3) Ding 和 Tian[14] 引入了广义 Futaki- 不变量并构造出不存在 KE- 度量且不存在非平凡全纯向量场的 Kähler- 轨形 (Kähler orbifold) 的例子.

(4) Tian[15] 引入了 K- 稳定性的概念并证明了在不存在非平凡全纯向量场时 K- 稳定是存在 KE- 度量的必要条件. 同时, 他提出了关于 Fano- 流形上 KE- 度量的存在性与 K- 稳定性等价的猜测, 也就是熟知的 Yau-Tian-Donaldson 猜想 (以下简称 YTD- 猜想). 在文献 [15] 中, Tian 还引进了 CM- 丛的概念. 在后来的文献 [16] 中, 他和 Paul 证明了广义 Futaki- 不变量是 CM- 丛的一个权 (weight) (也可参见文献 [17]).

(5) Donaldson[18] 用代数几何中不变量对广义 Futaki- 不变量和 K- 稳定性给出了新的解释和推广 2). 他在另一文献 [20] 中证明了在没有非平凡全纯向量场时 Kähler- 流形的 Chow- 稳定是存在具有常数量曲率的 Kähler- 度量的必要条件.

(6) Wang 和 Zhu[21] 通过将 (1.2) 约化为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个实 MA- 方程得到 C^0- 先验估计, 完整地解决了环流形上 KE- 度量的存在性问题.

(7) Berman[22] 用 Deligne- 配对推广了 Tian[15] 的结果, 证明了在存在非平凡全纯向量场的情形, K- 多重稳定 (K-polystability) 是存在 KE- 度量的必要条件.

2) Li 和 Xu[19] 证明了对 Fano- 流形 Donaldson 的 K- 稳定性定义与 Tian[15] 的定义是一致的.

(8) Berndtsson [23] 证明了 Kähler- 流形上有关奇异 KE- 度量或奇异 Kähler-Ricci 孤立子的唯一性. 特别地, 他对 Tian 和 Zhu [24] 的 Kähler-Ricci 孤立子唯一性定理给出了一个新证明.

(9) Donaldson 和 Sun [25] 用 Hörmander L^2- 理论将 Tian 的 KE- 复曲面上部分 C^0- 估计推广到高维 KE- 流形. Tian [26] 也独立证明了这一结果.

(10) 通过对 KE- 锥度量建立 Cheeger-Colding-Tian 紧性理论以及部分 C^0- 估计后, Tian [27] 最终解决了 YTD- 猜想 3). Chen 等 [28] 也在同一时期给出这一猜想的另一个证明.

猜想 1.1 (YTD- 猜想) Fano 流形上存在 KE- 度量当且仅当流形是 K- 多重稳定的.

类似于 Hermite-Yang-Mills 理论, YTD- 猜想建立了 KE- 度量存在性与代数几何稳定性之间的联系 [12,29–31]. 它开创了在 K- 稳定代数簇范畴中建立 KE- 流形模空间的课题. Li 等 [19,32–35] 在这方面的研究取得了丰富的成果. 最近, 文献 [36–38] 用代数几何的语言和工具深刻地刻划了 K- 半稳定或 K- 多重稳定的代数簇的一些基本代数性质. 然而目前除对 Fano- 曲面 [11]、环流形 [21] 和 Lie- 群紧化空间 [39,40] 外, 仍不知道是否存在更简洁有效的方法来验证一个给定的 Fano- 流形是否满足 K- 稳定条件.

本文是一篇综述, 希望给最近 30 年来 Fano- 流形上 KE- 度量的存在性研究一个概括. 我们将重点介绍 Tian 有关 YTD- 猜想的证明. 这个证明的基本思想是他在早期文献 [12,13] 中提出, 即通过建立部分 C^0- 估计来完成. 证明过程牵及了微分几何中多个分支的深刻理论, 如 Cheeger-Colding-Tian 紧性理论、Bergman 核估计和奇性 KE- 簇的自同构群结构等. 关于这些课题以及 KE- 度量存在性的研究至今仍相当活跃. 自 2012 年以来, YTD- 猜想的证明也有了一些新的证明, 如文献 [41–45] 等. 另外, Berman 等 [46] 给出了在不存在非平凡全纯向量场情形的 YTD- 猜想的一个变分法证明. 实际上, 他们需要假设一致 K- 稳定性 (详细见第 3.3 小节的讨论). 其他相关进展可参见文献 [47–50] 等.

本文安排如下: 第 2 节主要回顾用复 MA- 方程的连续性方法来研究 KE- 度量存在性, 特别是有关 Tian 的 α- 不变量和能量泛函逆紧性等存在性判别定理 (参见命题 2.1 和定理 2.2). 在这一节还讨论几类典型的 KE- 流形例子. 第 3 节主要讨论 Ding 和 Tian 的广义 Futaki- 不变量及其与 K- 稳定性和 YTD- 猜想的关系 (参见定理 3.1 和 3.2). 还将在第 3.3 小节介绍一致 K- 稳定的概念. 第 4 节讨论 KE- 锥度量与一类复 MA- 方程的关系, 和 Donaldson 开性定理 (定理 4.1). 在第 4.2 小节还将概要地回顾 Tian 对 YTD- 猜想的证明. 第 5 节讨论如何在定理 3.2 的证明中运用部分 C^0- 估计, 将介绍文献 [27] 中的两个主要结果 (定理 5.1 和 5.2). 在第 6–8 节讨论定理 3.2 证明中的技术性部分, 包括关于 KE- 锥度量的 Cheeger-Colding-Tian 收敛性定理 (定理 6.2)、定理 5.1 和 5.2 等的证明.

2 复 Monge-Ampère 方程

受 Yau [2] 解决 Calabi 问题的启发, 研究 Fano- 流形上方程 (1.2), 我们通过用连续性方法求解以下的复 MA- 方程 [9,15,51,52]:

$$\det(g_{i\bar{j}}+\varphi_{i\bar{j}})=\det(g_{i\bar{j}})\exp\{h-t\varphi\},\quad (g_{i\bar{j}}+\varphi_{i\bar{j}})>0,\quad 参数\ t\in[0,1]. \tag{2.1}$$

易知在 $t=1$ 时 (2.1) 与 (1.2) 等价. 根据文献 [2] 等的方法, 可以证明求解 (2.1) 的关键是解 φ_t 的 C^0-估计 (参见文献 [9,51,52]). 然而根据引言所述的存在性障碍, 方程 (2.1) 在 $t=1$ 时一般没有解.

3) Tian 曾在 2012 年 10 月 25 日在美国 Stony-Brook 大学的 Simons 数学和物理中心举办的一次学术会议上宣布他的结果, 并给出了证明的主要步骤.

为对 (2.1) 建立存在性判据, 1987 年 Tian [9] 引入了下述 α- 不变量: 对 $[\omega]=2\pi c_1(M)$, 在规范化 Kähler- 位势空间

$$\mathcal{H}_0=\left\{\phi \,\middle|\, \omega_\phi=\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi, \sup_M \phi=0\right\}$$

上定义 α- 不变量

$$\alpha(M)=\sup\left\{\alpha>0 \,\middle|\, \int_M \mathrm{e}^{-\phi}\omega^n<\infty, \forall\,\phi\in\mathcal{H}_0\right\}.$$

Tian 证明了下面的命题:

命题 2.1 若 M^n 是 n- 维 Fano 流形并

$$\alpha(M)>\frac{n}{n+1}, \tag{2.2}$$

则 (2.1) 对任意 $t\in[0,1]$ 有解.

通过计算 $\alpha(M)$, Tian 和 Yau [10] 证明了大量的 Fano- 曲面都存在 KE- 度量. 随后, 在 1990 年 Tian [11] 通过建立部分 C^0- 估计完整解决了复曲面情形的 KE- 度量存在性问题, 即定理 2.1.

定理 2.1 Fano- 曲面上存在 KE- 度量当且仅当其 Futaki- 不变量消失.

综合定理 2.1 和 Fano- 曲面分类定理可知, 除两个爆破 (blowing-up) 空间 $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ 和 $\mathbb{C}P^2\#2\overline{\mathbb{C}P^2}$ 外的 Fano- 曲面上都存在 KE- 度量. 十几年前 Cheltsov [53] 曾计算了所有 Fano- 曲面的 α- 不变量. 特别地, 他指出对一类三次曲面, α- 不变量恰好等于命题 2.1 中的临界值 $\frac{2}{3}$. 因此, 命题 2.1 不能直接应用于这类曲面. 实际上, 为证明定理 2.1, Tian 还构造了更复杂的 α_l- 不变量.

一般来说, 特别对高维 Fano 流形, 很难计算 α- 不变量. 在实践应用中, 我们通常以 α^K- 不变量代替 α- 不变量 [9,10,54], 其中 K 是 $\mathrm{Aut}(M)$ 的一个紧子群. α^K- 不变量在一些特殊情形可以显式计算出来. 例如, 在环流形上取 K 是 $\mathrm{Aut}(M)$ 的极大紧环面和 Wely 群生成的紧群, Song [55] 计算了环流形的 α^K- 不变量; Delcroix [56] 通过研究凸位势的 Newton 多面体将 Song 的结果推广到约化复 Lie- 群的 Fano- 紧化空间; 最近, Li 和 Zhu [57] 将约化复 Lie- 群紧化空间的 α^K- 不变量和 α_l^K- 不变量用动量映射多面体 (moment polytope) 给出了显式表达.

2.1 *F*- 泛函/*K*- 能量和分析判据

虽然命题 2.1 一般能有效地解决 (2.1), 但 (2.2) 仍只是一个充分条件. 为建立充要条件, Tian [15] 在 1997 年引入了 F- 泛函建立 (2.1) 有解的分析判据. F- 泛函最早由 Ding [58] 引进, 是 (2.1) 在 $t=1$ 时的变分泛函. F- 泛函也称 Ding- 泛函.

首先定义空间 $\mathcal{H}_0$ 上的 J- 泛函 (参见文献 [9, 51])

$$J(\phi)\;=\;\frac{1}{V}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n+1}\int_M\sqrt{-1}\partial\phi\wedge\bar{\partial}\phi\wedge\omega^i\wedge\omega_\phi^{n-i-1},$$

则 F- 泛函 $F(\cdot)$ 定义为

$$F(\phi)\;=\;J(\phi)\;-\;\frac{1}{V}\int_M\phi\,\omega^n-\log\left(\frac{1}{V}\int_M\mathrm{e}^{h-\phi}\,\omega^n\right). \tag{2.3}$$

定义 2.1 [13,15,59,60] 记 $\mathrm{Aut}_0(M)$ 为 $\mathrm{Aut}(M)$ 的单位分支. 记 ϕ_σ 是 $\sigma\in\mathrm{Aut}_0(M)$ 诱导的 Kähler- 位势, 即 ϕ_σ 满足

$$\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi_\sigma=\sigma^*(\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi). \tag{2.4}$$

若存在连续函数 $p(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\lim_{t\to+\infty}p(t)=+\infty$, 使得

$$F(\phi)\geqslant\inf_{\sigma\in\mathrm{Aut}_0(M)}p(J(\phi_\sigma)),$$

则称 $F(\cdot)$ 是模 $\mathrm{Aut}_0(M)$- 逆紧的.

我们有下述 KE- 度量存在性的分析判据:

定理 2.2 Fano- 流形上存在 KE- 度量当且仅当 F- 泛函 $F(\cdot)$ 是模 $\mathrm{Aut}_0(M)$- 逆紧的.

在 $\mathrm{Aut}_0(M)=\{\mathrm{Id}\}$ 的情形, 定理 2.2 最先由 Tian [15] 证明 (也可参见文献 [61]). 之后 Tian [26] 对一般情形给出了充分性部分的证明 4). 2017 年, Darvas 和 Rubinstein [60] 用 Mabuchi [63] 、Semmes [64] 和 Donaldson [65] 的关于 Kähler- 位势的测地线理论证明了必要性部分. 目前还不知道是否可用 Tian [15] 的连续性方法来证明 Davas 和 Rubinstein 的结果.

定理 2.2 对 Mabuchi 的 K- 能量 $\mu(\cdot)$ [63] 也成立. $\mu(\phi)$ 可定义于任意 Kähler- 类, 其临界点是具有常数量曲率的 Kähler- 度量. 特别地, 在 $\mathcal{H}_0$ 空间, $\mu(\cdot)$ 可以表示成

$$\mu(\phi)=-\frac{1}{V}\int_0^1\int_M\dot{\phi}_t(S(\omega_{\phi_t})-n)\,\omega_{\phi_t}^n\wedge dt,\tag{2.5}$$

其中 $\{\phi_t\}$ 是 $\mathcal{H}_0$ 中任意连接 Kähler- 位势 0 和 ϕ 的一个道路. Tian [15] 证明了

$$\mu(\phi)\geqslant F(\phi)-C,\quad\forall\,\phi\in\mathcal{H}_0.$$

若存在满足定义 2.1 假设的函数 $p(t)$, 使得

$$\mu(\phi)\geqslant\inf_{\sigma\in\mathrm{Aut}_0(M)}p(J(\phi_\sigma)),\tag{2.6}$$

则称 $\mu(\cdot)$ 是模 $\mathrm{Aut}_0(M)$- 逆紧的. 由此, 从定理 2.2 推出下面的定理:

定理 2.3 Fano- 流形上存在 KE- 度量当且仅当 K- 能量 $\mu(\cdot)$ 是模 $\mathrm{Aut}_0(M)$- 逆紧的.

2.2 Fano KE- 流形的例子

本小节列出一些高维 Fano KE- 流形的例子. 我们略去熟知的 Hermite- 对称空间的例子 [66].

例 2.1 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 中 k- 次超曲面 $M_{n,k}$,

$$M_{n,k}=\left\{\sum_{i=0}^{n+1}z_i^k=0\right\},\quad k=1,\dots,n+1.$$

记 $H_{\mathbb{C}P^{n+1}}$ 为 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 的超平面线丛, 则

$$K_{M_{n,k}}^{-1}=(n+2-k)H_{\mathbb{C}P^n}|_{M_{n,k}}.$$

因此, 在 $k=1,\dots,n+1$ 时 $M_{n,k}$ 是 Fano- 流形. 还知, $\mathbb{C}P^n$ 是 $M_{n,k}$ 的 k 次分歧覆盖. 记 K 是 $\mathrm{Aut}(M_{n,k})$ 的极大紧子群. 用 $\mathbb{C}P^n$ 上 F- 泛函的逆紧性, Tian [67] 证明了 F- 泛函 $F(\phi)$ 在 K- 不变的 Kähler 位势空间 $\mathcal{H}_0(M_{n,k})$ 上也是逆紧的. 所以, 从定理 2.2 知, 在 $k=1,\dots,n+1$, $M_{n,k}$ 上存在 KE- 度量.

4) 在文献 [59, 62] 中使用 Hamilton 的 Ricci 流方法也证明了定理 2.2 的充分性部分.

例 2.2 复环面 $(C^*)^n$ 的紧化空间称为 n- 维环流形. n- 维 Fano- 环流形都可以与 $\mathbb{Z}^n$ 中形如

$$P = \bigcap_{i=1,\dots,d} \{l_i(x) = \langle A_i, x\rangle < 1\}$$

的格点多面体一一对应, 其中 $A_i \in \mathbb{Z}^n$. 因此, 对每个确定的维数, Fano- 环流形的数目有限.

Wang 和 Zhu [21] 通过将 (2.1) 约化为 $\mathbb{R}^n$ 上一个实 MA- 方程证明了下面的定理:

定理 2.4 Fano- 环流形 M 上存在 KE- 度量当且仅当其 Futaki- 不变量消失.

定理 2.4 还可以用 Hamilton 的 Ricci- 流或定理 2.2 来证明, 参见文献 [59, 68].

例 2.3 紧 Hermite- 对称空间上的环丛.

环丛是指其每点的纤维都是环流形. 易见紧 Hermite- 对称空间上的环丛是 Fano- 流形当且仅当其纤维是 Fano- 环流形. Podesta 和 Spiro [69] 将 Wang 和 Zhu 的结果推广到 Fano 环丛.

定理 2.5 紧 Hermite- 对称空间上的环丛 M 上存在 KE- 度量当且仅当其 Futaki- 不变量消失.

对底空间是 Fano KE- 流形 (可以任意) 的 $\mathbb{C}P^1$- 丛, 定理 2.5 也可用常微分方程方法来证明, 参见文献 [6, 70].

例 2.4 约化复 Lie- 群 G 的紧化空间.

设 M 是具有全纯 $G \times G$- 作用的紧复流形. 如果 M 上存在 (作为 $G \times G$- 齐性空间) 与 G 同构的开、稠密 $G \times G$- 轨道, 则称 M 是 G- 群紧化. 由于 $G \times G$- 作用有不同的延拓方式, 相应的 G- 紧化空间一般只是一个代数簇 [71–73].

类似于环流形的情形, 每个 G- 群紧化都对应动量多面体 P. 记 G 的 Weyl- 群为 Γ 和 $P_+ = P/\Gamma$. 在 2017 年, Delcroix [39] 证明了下面的定理:

定理 2.6 若 M 是 Fano G- 群紧化, 记 $\mathrm{bar}(2P_+)$ 为 $2P_+$ 的重心, ρ 是正根和的一半, Ξ 是正根张成的内部锥, 则 M 上存在 KE- 度量当且仅当

$$\mathrm{bar}(2P_+) \in 4\rho + \Xi. \tag{2.7}$$

Delcroix 还证明了从 (2.7) 可以得出 Futaki- 不变量对 $G \times G$- 作用诱导的全纯向量场都消失, 反之一般不成立. 事实上, (2.7) 对应于一类等变形变构形 (C^*- 作用) 的广义 Futaki- 不变量, 因而与 K-稳定性有关 (参见文献 [40, 74]). Delcroix [39] 用文献 [21] 中方法证明了定理 2.6 的充分性部分. 最近, Li 等 [40] 通过研究 K- 能量的逆紧性给出了定理的另一证明.

3 *K*- 稳定性和 YTD- 猜想

Futaki- 不变量首先定义于 $\eta(M) \neq 0$ 的 Fano- 流形. 在 1992 年由 Ding 和 Tian [14] 推广到 $\mathbb{Q}$-Fano 簇. 由于存在奇点, 推广 Futaki- 不变量到 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上定义有相当的技术困难. 一个正规簇 M 若存在正整数 m 使得 K_M^{-m} 能从正则部分 M_{reg} 全纯延拓到整个 M, 则称它是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇. 这时存在正整数 $l > 0$ 使得 $H^0(K_M^{-ml}, M)$ 的基给出一个 Kodaira- 嵌入

$$\Phi : M \to \mathbb{C}P^N,$$

其中 $N = \dim H^0(K_M^{-ml}, M) - 1$. 于是,

$$\omega = \frac{1}{ml}\Phi^*\omega_{FS} \in 2\pi c_1(M).$$

定义 3.1[14] 设 M 是 $\mathbb{Q}$-Fano 簇, Φ 是其到 $\mathbb{C}P^N$ 的一个 Kodaira- 嵌入. 若存在正整数 $r>0$ 使得 $\frac{1}{r}\Phi^*\omega_{FS}\in 2\pi c_1(M)$, 则称 $\frac{1}{r}\Phi^*\omega_{FS}$ 是 M 上的一个容许 (admissible) Kähler- 度量.

对每个容许 Kähler- 度量 ω_g, 都存在 Ricci- 位势 h 满足

$$\mathrm{Ric}(g)-\omega_g=\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}h,\quad 在\ M_{\mathrm{reg}}\ 内.$$

由于 M 上的任意全纯向量场 X 都可以提升到 $\mathbb{C}P^N$, Ding 和 Tian 运用文献 [75] 中的推理证明了下面的引理:

引理 3.1 线性泛函

$$f_M(X)=\int_M X(h)\omega_g^n,\quad \forall X\in\eta(M)$$

可定义并且与容许 Kähler- 度量的具体选取无关.

这样用引理 3.1, 我们推广 Futaki- 不变量如下: 记 Φ 是 M 到 $\mathbb{C}P^N$ 的一个 Kodaira- 嵌入, 满足对某正整数 $r>0$, $\frac{1}{r}\Phi^*\omega_{FS}\in 2\pi c_1(M)$. 记 $\sigma_s=\exp\{sX\}$ $(s\in[0,\infty))$ 是 $X\in\eta(\mathbb{C}P^N)$ 生成的单参数子群. 还设 $\sigma_s(\Phi(M))$ 在 $s\to\infty$ 时有 (作为代数链的) $\mathbb{Q}$-Fano 极限簇 M_0 (即 $\sigma_s(\Phi(M))$ 是文献 [15] 中所述 σ_s 生成的特殊退化). 我们称

$$f_{M_0}(X)=\int_{M_0} X(h)\omega_g^n$$

是 M 上关于 X 的 Ding 和 Tian 的广义 Futaki- 不变量. 有时为了方便起见, 我们称之为 DT- 不变量. 正如 Futaki- 不变量, DT- 不变量是 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上存在典则度量的障碍.

Tian[15] 证明了以下 DT- 不变量与 K- 能量间的关系.

命题 3.1 对于任意关于 $X\in\eta(\mathbb{C}P^N)$ 诱导的特殊退化 $\sigma_s(\Phi(M))$ 的 $\mathbb{Q}$-Fano 极限簇 M_0, 成立

$$\mathrm{real}(f_{M_0}(X))=-\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\mu(\phi_{\sigma_{-\log t}}),\tag{3.1}$$

其中 ϕ_{σ_s} 是由 σ_s 按 (2.4) 决定的一族诱导 Kähler- 位势.

3.1 DT- 不变量与 *K*- 稳定性

Tian[15] 通过 DT- 不变量定义下面的 K- 稳定性:

定义 3.2 设 M 是 Fano- 流形.

(i) 若对 M 的任意特殊退化, 其极限 M_0 都满足 $f_{M_0}(X)\geqslant 0$, 则称 M 是 K- 半稳定的;

(ii) 若对 M 的任意特殊退化, 其极限 M_0 都满足 $f_{M_0}(X)>0$, 则称 M 是 K- 稳定的;

(iii) 若对 M 的任意特殊退化, 其极限 M_0 都满足 $f_{M_0}(X)\geqslant 0$ 并且等式成立当且仅当 $X\in\eta(M)$, 则称 M 是 K- 多重稳定的.

DT- 不变量 $f_{M_0}(X)$ 还可以从代数几何的权来解释. 根据命题 3.1, 文献 [15–17] 也称它为关于 σ_s 的 CM- 权. 一般来说, $\sigma_s(\Phi(M))$ 的极限 M_0 只是代数链, 然而极限 $\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\mu(\phi_{\sigma_{-\log t}})$ 总存在 (参见文献 [76,77]). 文献 [19,78,79] 等还有对极限 $\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\mu(\phi_{\sigma_{-\log t}})$ 更进一步的解释.

Donaldson[18] 用形变构形 (即 $\mathbb{C}^*$- 作用) 的概念代替单参数群 σ_s 重新描述了 DT- 不变量 $f_{M_0}(X)$.

定义 3.3 Fano- 流形 M 的形变构形是指满足下述条件的概型 $\mathcal{M}$ 以及 $\mathcal{M}$ 上的 $\mathbb{C}^*$- 作用组成的对:

(1) 存在平坦 $\mathbb{C}^*$- 等变映射 $\pi:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ 使得 $M_t=\pi^{-1}(t)$ 在任意 $t\neq 0$ 处与 M 双全纯等价;

(2) 存在 $\mathcal{M}$ 上的 $\mathbb{C}^*$- 等变线丛 $\mathfrak{L}$ 使得在任意 $t \neq 0$ 处 $\mathfrak{L}|_{\pi^{-1}(t)}$ 都与某固定的 K_M^{-r} $(r \in \mathbb{N}_+)$ 同构.

记 $L = \mathfrak{L}|_{M_0}$ 是 $\mathfrak{L}$ 在 M_0 上的限制. 由于 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 是平坦 $\mathbb{C}^*$- 等变映射, 故

$$H^0(M_0, L^k) = H^0(M, K_M^{-rk}).$$

记 $\mathbb{C}^*$- 作用在 $H^0(M_0, L^k)$ 的最高次外积空间上作用的权为 $S_1(k)$, 则从 S^1- 等变 Riemann-Roch 公式 [18] 知, $S_1(k)$ 和 $S_2(k) = \dim(H^0(M_0, L^k))$ 可以形式地写作

$$S_1(k) = Ck^{n+1} + Dk^n + O(k^{n-1}),$$
$$S_2(k) = Ak^n + Bk^{n-1} + O(k^{n-2}).$$

Donaldson 的广义 Futaki- 不变量 F_1, 也可称为 DF- 不变量, 定义如下:

$$F_1 = \frac{B}{A}C - D.$$

若 M_0 是 $\mathbb{Q}$-Fano 簇, 用 S^1- 等变 Riemann-Roch 公式 [18,68] 可知,

$$VF_1 = f_{M_0}(X),$$

其中 $V = c_1(M)^n$. 不变量 F_1 实际上可以解释为 Chow- 权 (参见文献 [69,80,81]).

注 3.1 射影空间 $\mathbb{C}P^1$ 存在广义 Futaki- 不变量为 0 的非平凡形变构形, 参见文献 [19]. 因此, 定义 3.2 中 K- 多重稳定的概念必须限制于单参数群所诱导的特殊退化而不能是任意的形变构形. 也就是说, YTD- 猜想中的 K- 多重稳定只须用 DT- 不变量来定义就行了.

3.2 YTD- 猜想

类似于 Futaki- 不变量, K- 稳定也是存在 KE- 度量的障碍.

定理 3.1 若 M 是 KE- 流形, 则

(i) 当 $\eta(M) = 0$ 时, M 是 K- 稳定的;

(ii) 当 $\eta(M) \neq 0$ 时, M 是 K- 多重稳定的.

定理 3.1(i) 可由定理 2.2 得出. 在 2013 年, Berman [22] 用 Deligne- 配对证明了定理 3.1(ii). 在文献 [27] 中, Tian 证明了定理 3.1 的逆定理. 几乎同一时期, Chen 等 [28] 给出了逆定理的另一证明. 总之, 有如下的定理 3.2.

定理 3.2 若 Fano- 流形 M 是 K- 多重稳定的, 则 M 存在 KE- 度量.

综合定理 3.1 和 3.2 可知 YTD- 猜想 1.1 成立. 在下面的章节我们主要讨论 Tian 用形变 KE- 锥度量的过程来证明定理 3.2 [5).

3.3 关于一致 *K*- 稳定性

根据文献 [46,77], 我们可定义关于 Fano- 流形的一致 K- 稳定性.

5) 在文献 [82], Donaldson 曾提出用形变 KE- 锥度量到零角度来研究与文献 [83,84] 相关的一个光滑代数簇外的 Ricci- 平坦的 Kähler- 度量.

定义 3.4　如果对 Fano- 流形 M 存在常数 $\delta > 0$ 使得对任意单参数变换群 σ_s, 下面不等式都成立 6):

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\mu(\phi_{\sigma_{-\log t}}) \leqslant \delta \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}J(\phi_{\sigma_{-\log t}}),$$

则称 M 是一致 K- 稳定的.

文献 [27] (或文献 [79]) 证明了极限 $\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}J(\phi_{\sigma_{-\log t}})$ 与 $\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\mu(\phi_{\sigma_{-\log t}})$ 一样, 也是某个 $SL(N+1,\mathbb{C})$- 表示的权. 由 K- 能量泛函的逆紧性不等式 (2.6) 所改进的强迫性不等式 [60] 可知, 在 $\eta(M)=0$ 的情形, KE- 度量的存在必然导致流形满足一致 K- 稳定性条件. Berman 等 [46] 证明了逆命题也成立. 事实上, 文献 [46] 证明了一致 K- 稳定可以推出 K- 能量的逆紧性, 由此给出了在假设一致 K- 稳定的条件下 $\eta(M)=0$ 情形的 YTD- 猜想的一个变分法证明. 用 K- 能量的逆紧性来研究 $\mathbb{Q}$-Fano 簇上的奇性 KE- 度量可参见文献 [85]. 有关奇性 KE- 度量与一致 K- 稳定性的关系最近的研究可以参见文献 [38, 49, 50]. 但是, 从 K- 稳定性能否推出一致 K- 稳定性仍然是一个未解决的问题.

4　KE- 锥度量的形变

取 $z=\rho e^{\sqrt{-1}\theta}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上点的坐标. 取定 $\beta\in(0,1]$ 并定义度量 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$\sqrt{-1}\frac{dz\wedge d\bar{z}}{|z|^{2-2\beta}}. \tag{4.1}$$

这是在顶点 0 具有锥角 $2\pi\beta$ 的锥度量. 若作坐标变换 $r=\beta^{-1}\rho^{\beta}$, 则上述度量可写作

$$dr^2+\beta^2r^2d\theta^2. \tag{4.2}$$

这是标准的单位圆周 (准线) 长 $2\pi\beta$ 的锥度量.

在 $\mathbb{C}^n$ $(n\geqslant 2)$ 的高维情形, 标准锥度量取作

$$\omega_\beta=\sqrt{-1}\left(\frac{dz_1\wedge d\bar{z}_1}{|z_1|^{2-2\beta}}+\sum_{i=2}^{n}dz_i\wedge d\bar{z}_i\right). \tag{4.3}$$

于是, ω_β 是沿超平面 $\{0\}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 具有锥奇性的平坦度量.

更一般地, 可以定义光滑流形上沿除子具有指定渐近正则性的 Kähler 锥度量. 设 M 是 Kähler- 流形, D 是 M 上的一个光滑除子. 我们有下面的定义:

定义 4.1　若 $M\backslash D$ 上的光滑 Kähler- 度量 ω 满足在任意 $p\in D$ 附近都存在局部坐标 $(z_1,\dots,z_n)$, 使得

(C1) 在坐标 $(z_1,\dots,z_n)$ 下 $D=\{z_1=0\}$;

(C2) 在坐标变换 $\xi=|z_1|^{\beta-1}z_1$ 下, 存在与 $p\in D$ 无关的 $\alpha\in(0,1)$ 使得系数

$$\omega_{1\bar{1}}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_1^{\beta}},\frac{\partial}{\partial \bar{z_1}^{\beta}}\right),\quad \omega_{1\bar{j}}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_1^{\beta}},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right),\quad \omega_{i\bar{j}}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_i},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right),\quad 2\leqslant i,j\leqslant n,$$

在坐标 $(\xi,z_2,\dots,z_n)$ 下是 C^{α}- 函数;

(C3) 在 D 上 $\omega_{1\bar{1}}>0$, 并对 $2\leqslant i,j\leqslant n$ 在 D 上成立 $\omega_{1\bar{j}}=0$,

则称 ω 是沿除子 D 带锥角 $2\pi\beta$ 和 $C^{\alpha;\beta}$- 系数的 Kähler- 锥度量.

6) 根据文献 [19], 我们只要限制 σ_s 为对应特殊退化的单参数变换群.

可从光滑度量出发构造 Kähler- 锥度量. 例如, 若 ω 是光滑 Kähler- 度量, S 是 D 的一个光滑截面, $\epsilon > 0$ 是小常数, 则

$$\omega_0 = \omega + \sqrt{-1}\epsilon\partial\bar{\partial}|S|^{2\beta} \tag{4.4}$$

是沿 D 带锥角 $2\pi\beta$ 和 $C^{\alpha;\beta}$- 系数 ($\alpha = \min(\frac{1-\beta}{\beta}, 1)$) 的 Kähler- 锥度量[7)] (参见文献 [86]).

类似地, 设 f 是 $M\backslash D$ 上的光滑函数, 在锥坐标系 $(\xi, z_2, \dots, z_n)$ 下, 可以定义函数的光滑性[82, 87].

定义 4.2 若

$$f, \partial f, \bar{\partial} f \in C^{,\alpha;\beta},$$

则称 $f \in C^{1,\alpha;\beta}(M)$; 若

$$f, \partial f, \bar{\partial} f, \partial\bar{\partial} f \in C^{,\alpha;\beta},$$

则称 $f \in C^{2,\alpha;\beta}(M)$.

Jeffres 等[88] 证明了下面的锥度量的 $C^{\alpha;\beta}$- 正则性定理[8)].

引理 4.1 设 ω 是 M 上的一个光滑 Kähler 度量, ϕ 是 U 上

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)^n = \frac{1}{|S|^{2-2\beta}}\mathrm{e}^h\omega^n \tag{4.5}$$

的弱解, 其中 h 是 U 上的一个光滑函数. 假设

(1) $\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ 在 $U \setminus D$ 上光滑;

(2) 存在常数 $A > 0$ 使得

$$A^{-1}\omega_0 \leqslant \omega' \leqslant A\omega_0,$$

其中 ω_0 是 (4.4) 定义的带锥角 $2\pi\beta$ 的 Kähler- 锥度量;

(3) 存在一致常数 C 使得 $|\Delta_{\omega_0} h| \leqslant C$,

那么 ϕ 是 U 上的 $C^{2,\alpha;\beta}$- 函数, 因而 ω' 是 $C^{\alpha;\beta}$- 锥度量.

Jeffres、Mazzeo 和 Rubinstein 对引理 4.1 的证明用到了 Tian[89] 的迭代方法. 最近, Huang[90] 将条件 (3) 减弱到 h 是 Lipshitz 函数的情形. Guenancia 和 Paun[91] 用逼近的方法也证明了引理 4.1.

4.1 KE- 锥度量

Donaldson[82] 提出用形变 Kähler- 锥度量的方法求解 (1.2). 在 Fano- 流形 M 上取定一个光滑除子 D 使得 $[D] \in |K_M^{-\lambda}|$ ($\lambda \geqslant 1$)[9)]. 一个 $C^{\alpha;\beta}$ Kähler- 锥度量 $\omega \in 2\pi c_1(M)$ 如果在流意义下满足方程

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \mu\omega + 2\pi(1-\beta)[D], \tag{4.6}$$

则 ω 称为 KE- 锥度量. 直接计算可知 $\mu = 1 - (1-\beta)\lambda$. 特别地, (4.6) 在 $\beta = 1$ 时化为 (1.2), 因此可以通过在 (4.6) 将 β 从 β_0 形变到 1 来求解 (1.2).

仿照求解 (1.2) 的情形, 可以将 (4.6) 约化为求解复 MA- 方程. 若将 KE- 锥度量改写作

$$\omega = \omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi,$$

7) Jiang W, Wang F, Zhu X H. Lecture Notes on Kähler-Einstien Metrics. Preprint, 2015

8) Tian G. A third derivative estimate for conic Monge-Ampère equations. Preprint

9) Donaldson 在文献 [82] 中假设 $|K_M^{-1}|$ 中存在光滑除子 D. 现在仍不知道这一假设是否对所有的 Fano- 流形都成立. 后来, Li 和 Sun[92] 发现可以取足够大的 λ 使光滑除子 D 满足 $[D] \in |K_M^{-\lambda}|$ 来代替.

其中 $\phi \in C^{2,\alpha_0;\beta}(M)$, 则 ϕ 满足

$$(\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi)^n = \mathrm{e}^{h_0 - \mu\phi}\omega_0^n, \tag{4.7}$$

其中 $h_0 \in C^{\alpha_0;\beta}(M)$ 满足

$$\mathrm{Ric}(\omega_0) - \omega_0 = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}h_0, \quad \int_M (\mathrm{e}^{h_0} - 1)\omega_0^n = 0.$$

通过对方程 (4.7) 应用 Donaldson [82] 的有关 Kähler- 锥度量的 Laplace- 算子的线性理论和隐函数定理, 我们可以证明下面的定理:

定理 4.1 设 M 是 Fano- 流形, D 是其上的一个光滑除子, 满足 $[D] \in \lambda c_1(M)$ $(\lambda \geqslant 1)$. 若 M 上存在一个沿 D 带锥角 $2\pi\beta_0$ $(0 < \beta_0 < 1)$ 的 KE- 锥度量, 则对任意充分接近 β_0 的 β 都存在带锥角 $2\pi\beta$ 的 KE- 锥度量.

注意到方程 (4.7) 的解空间 $C^{2,\alpha_0;\beta}(M)$ 依赖于锥度量 $2\pi\beta$ 而改变. 因此, 为证明定理 4.1, 必须改进以往标准的隐函数定理方法 [82].

为避免空间 $C^{2,\alpha_0;\beta}(M)$ 变化所带来的困难, 我们可修改方程 (4.7) 来另外证明定理 4.1. 仿照文献 [27] 将方程 (4.7) 改写为

$$(\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\hat{\varphi}_\delta)^n = \frac{1}{(\delta + |S|^2)^{1-\beta}}\mathrm{e}^{h - \mu\hat{\varphi}_\delta}\omega^n. \tag{4.8}$$

记 $\eta_\delta = \lambda\omega_0 + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(\delta + |S|^2)$, 则它与 Ricci 曲率方程

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\varphi_\delta}) = \mu\omega_{\varphi_\delta} + (1-\beta)\eta_\delta \tag{4.9}$$

等价.

下面的结果在文献 [93] 中所证明 (也可参见文献 [94]).

定理 4.2 设 Fano- 流形 M 上存在一个沿光滑除子 D $([D] \in \lambda c_1(M))$ $(\lambda \geqslant 1)$ 带锥角 $2\pi\beta_0$ $(0 < \beta_0 < 1)$ 的 KE- 锥度量, 则存在 $\epsilon_0 > 0$ 和 $\delta_0 > 0$ 使对任意 $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + \epsilon_0]$ 和 $\delta \in (0, \delta_0]$, (4.8) 都有光滑解, 并且 φ_δ 收敛到 (4.7) 的某 $C^{2,\alpha;\beta}$- 解.

Jeffres 等 [88] 证明了对充分小的 β_0, (4.7) 可解. 通过建立类似于方程 (2.1) 中的有关 (4.7) 的 2- 阶估计并结合引理 4.1, 他们还证明了下面的命题:

命题 4.1 设 ϕ 是方程 (4.7) 的 L^∞- 弱解且 ϕ 在 $M \setminus D$ 上光滑, 则对任意 $\alpha \in (0, \min(\frac{1-\beta}{\beta}, 1))$ 都有 $\phi \in C^{2,\alpha;\beta}(M)$, 并且

$$\|\phi\|_{C^{2,\alpha;\beta}(M)} \leqslant C(\|\phi\|_{L^\infty}, \alpha, \beta).$$

4.2 定理 3.2 的证明概要

下面利用定理 4.1 和命题 4.1 给出定理 3.2 证明的一个概要. 记

$$E = \{\beta \in (1 - \lambda^{-1}, 1] \mid \text{存在 } (M, D) \text{ 上带锥角 } 2\pi\beta \text{ 的 KE- 锥度量}\}.$$

于是根据定理 4.1 可知, E 是非空的开集. 只再证 E 是闭的. 设 ω_{β_i} 是 (M, D) 上一列带锥角 β_i 的 KE- 锥度量并且 $\beta_i \to \bar{\beta}$, 我们希望证明 ω_{β_i} 收敛到 (M, D) 上某个带锥角 $2\pi\bar{\beta}$ 的 KE- 锥度量.

步骤 1 要证明 ω_{β_i} 存在局部光滑 KE- 度量的 Gromov-Hausdroff 极限 (M_∞, D_∞), 其中 D_∞ 是 D 作为子集的极限 (参见第 6 节定理 6.2). 需要将文献 [95] 中的 Cheeger-Colding-Tian 理论推广于一

列 KE- 锥度量的情形. Tian 证明了 KE- 锥度量存在具有一致 Ricci 下界的光滑化 Kähler- 度量逼近. 在 $\bar{\beta}=1$ 的情形, Tian 还需要用 Tian 和 Wang [96] 的有关几乎 KE- 度量序列的一个收敛性结果来分析极限空间的奇点集结构.

步骤 2 要证明存在 Kodaira 嵌入 $\Phi: M_\infty \to \mathbb{C}P^N$ 使得 $\tilde{M}_\infty = \Phi(M_\infty)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-Fano 簇并且 $\tilde{D}_\infty = \Phi_\infty(D_\infty)$ 是一个除子. 这一步的关键是建立像 KE- 度量情形 [11,25,26] 的有关 KE- 锥度量的部分 C^0- 估计. Tian 还将 Matsushima 定理 [4,5] 推广于弱的 KE- 度量, 证明了限制的自同构群 $\mathrm{Aut}(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$ 的可约性 (参见定理 5.2) 10).

步骤 3 取一列沿 D 带锥角 $2\pi\beta_i$ 的锥度量 $\omega^0_{\beta_i}$ 作背景度量. 并设

$$\omega_{\beta_i} = \omega^0_{\beta_i} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi_{\beta_i}. \tag{4.10}$$

由命题 4.1, 只要证明 ϕ_{β_i} 一致有界. 这部分证明需利用 Mumford 的几何不变量理论, 以及步骤 2 中的部分 C^0- 估计和 K- 稳定性条件来完成. 详见第 5 节. 定理 3.2 证明完毕.

5 Bergman- 核与部分 C^0- 估计

记 $\mathcal{E}(\lambda,\beta)$ 为所有的 (M,D) 上锥角为 $2\pi\beta$ 的 KE- 锥度量构成的集合. 对任意 $\omega \in \mathcal{E}(\lambda,\beta)$, 选取一个 C^0-Hermite 度量 H, 其以 ω 为曲率形式, 亦即在流的意义下,

$$\mathrm{R}(K_M^{-1}, H) = \omega. \tag{5.1}$$

定义内积

$$(S,S') = \int_M \langle S, S'\rangle_H \omega^n, \quad \forall\, S,S' \in H^0(M, K_M^{-\ell}).$$

并由此取 $H^0(M,K_M^{-\ell})$ 的一组标准正交基 $\{S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$. 与光滑情形一致 (参见文献 [97]), 我们可以在 M 上定义如下函数:

$$\rho_{\omega,\ell}(x) = \sum_{i=0}^N |S_i|_H^2(x). \tag{5.2}$$

$\rho_{\omega,\ell}$ 被称为多重反典则线丛 $K_M^{-\ell}$ 的 Bergman 核. 易见 $\rho_{\omega,\ell}$ 的定义仅依赖于 ω 和 ℓ.

由 $\rho_{\omega,\ell}$ 的定义, 可得

$$\int_M \rho_{\omega,\ell}(x)\omega^n = N+1 = \dim H^0(M,K_M^{-\ell}) = \frac{\ell^n c_1(M)^n}{n!} + O(\ell^{n-1}).$$

最后一个等式来自于 Riemann-Roch 定理和 Kodaira 消灭定理 (对充分大的 ℓ). 事实上, 根据文献 [97], 如果 ω 光滑, 那么当 $\ell\to\infty$ 时, $\ell^{-n}\rho_{\omega,\ell}(x) \to a_0 > 0$. 因此, 对充分大的 ℓ, 有

$$\rho_{\omega,\ell} > \frac{1}{2}a_0\ell^n.$$

但是我们并不知道 ℓ 要取到多大. 事实上, 我们有以下关于 KE- 锥度量的 Bergman- 核的关键估计 (参见文献 [13, 定理 5.1]).

10) Chen 等 [28] 通过用 Berndtsson [23] 的方法证明奇性 KE- 度量的唯一性来说明 $\mathrm{Aut}(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$ 的可约性. 但 Berman 等在文献 [85] 中指出 Chen 等的证明并不完整.

定理 5.1 对任意固定的 $\lambda \geqslant 1$ 和 $\beta_0 > 1-\lambda^{-1}$, 存在大整数 m_0 和一致常数 $c_k = c(k,n,\beta_0,\lambda) > 0$, 其中 $k \geqslant 1$, 使得对于任意 $\beta \geqslant \beta_0$ 和 $\omega \in \mathcal{E}(\lambda,\beta)$, 当 $\ell = \ell_k = km_0$ 时, 有

$$\rho_{\omega,\ell}(x) \geqslant c_\ell > 0. \tag{5.3}$$

令 $\omega \in \mathcal{E}(\lambda,\beta)$ 和 $\{S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 为关于 ω 的标准正交基. 定义一个嵌入 $\Phi_\ell : M \to \mathbb{C}P^N$, 则

$$\frac{1}{\ell}\Phi_\ell^*\omega_{FS} - \omega = \sqrt{-1}\partial\bar\partial\left(\frac{1}{\ell}\log\rho_{\omega,\ell}\right),$$

其中 ω_{FS} 是 $\mathbb{C}P^N$ 上的 Fubini-Study 度量. 由此可得

$$\varphi = \frac{1}{\ell}\log\sum_{i=0}^N |S_i|_\beta^2 - \frac{1}{\ell}\log\rho_{\omega,\ell} + A_\varphi, \tag{5.4}$$

其中 A_φ 是一个依赖于 φ 的常数, $|S|_\beta$ 是 S 关于由背景 Kähler- 锥度量诱导的 Hermite 度量 H_β 所定义的范数 (参见 (4.4)). 根据标准的 Moser- 迭代 (此时 Sobolev- 不等式成立), 我们有一致估计,

$$\rho_{\omega,\ell}(x) \leqslant C(\ell).$$

因此, 结合定理 5.1, 得到在差一个常数的意义下,

$$\left|\varphi - \frac{1}{\ell}\log\sum_{i=0}^N |S_i|_\beta^2\right| \leqslant C. \tag{5.5}$$

另一方面, 我们可以固定一组 $H^0(M,K_M^{-\ell})$ 的基 $\{\tilde S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$, 则存在 $\sigma = (a_i^j) \in SL(N+1,\mathbb{C})$ 使得 $\sigma\{\tilde S_i\} = \{S_i\}$. 从而我们证明下面的推论:

推论 5.1 对任意固定的 $\lambda \geqslant 1$ 和 $\beta_0 > 1-\lambda^{-1}$, 存在 $\sigma = (a_i^j) \in SL(N+1,\mathbb{C})$, 使得在差一个常数的意义下,

$$\left|\varphi - \frac{1}{\ell}\log\frac{\sum_{i,j=0}^N |a_i^j\tilde S_i|^2}{\sum_{i=0}^N |\tilde S_i|^2}\right| \leqslant C. \tag{5.6}$$

(5.6) 最早出现在文献 [11] 中, 被称为部分 C^0- 估计.

5.1 部分 C^0- 估计与 K- 稳定性

下面的结果可以通过几何不变量理论证明.

引理 5.1 令 β_i ($\beta_i \to \bar\beta$) 和 $\omega_i \in \mathcal{E}(\lambda,\beta)$. 与推论 5.1 一样, 令 $\sigma_i \in SL(N+1,\mathbb{C})$ 为 ω_i 诱导的变换. 假设 $(\tilde M,\tilde D)$ 是在基 $\{\tilde S_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 下的 (M,D) 的一个 Kodaira- 嵌入代数簇, $\sigma_i(\tilde M)$ 收敛到一个 $\mathbb{C}P^N$ 中的正规簇 $(\tilde M_\infty,\tilde D_\infty)$, 其中除子 $\tilde D_\infty$ 是 $\sigma_i(\tilde D)$ 的一个极限代数环. 如果限制自同构群

$$\mathrm{Aut}(\tilde M_\infty,\tilde D_\infty) = \{g \in \mathrm{Aut}(\tilde M_\infty) \subset SL(N+1,\mathbb{C}) \mid g(\tilde D_\infty) = \tilde D_\infty\}$$

是约化的, 那么存在一个单参数 σ_t 和一个 $SL(N+1,\mathbb{C})$ 中的元素 σ_0 使得

$$\lim_t \sigma_t(\tilde M) = \sigma_0(\tilde M_\infty).$$

证明　我们可以令 $\tilde{M}$ 和 $\tilde{D}$ 分别对应两个射影空间中的 Chow- 点 $[u]$ 和 $[v]$, 那么 $SL(N+1,\mathbb{C})$ 自然作用在 (u,v) 上, 序列 $\sigma_i[u,v])$ 收敛到一个极限点 $[u_\infty, v_\infty]$, 并且 $[u_\infty]$ 和 $[v_\infty]$ 对应于 $\tilde{M}_\infty$ 和 $\tilde{D}_\infty$ 的 Chow- 点. 易见, $[u_\infty, v_\infty]$ 的迷向子群 G 同构于约化群 $\mathrm{Aut}(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$. 因此, 根据几何不变量基本理论 [98] 可知, 存在一个单参数子群 $\sigma_t \subset G$ 和一个 $SL(N+1,\mathbb{C})$ 中的元素 $\sigma_0 \in G$ 使得

$$\lim_t \sigma_t[u,v] = \sigma_0[u_\infty, v_\infty].$$

特别地, $\lim_t \sigma_t(\tilde{M}) = \sigma_0(\tilde{M}_\infty)$. □

下面这个定理是 Tian 在文献 [27] 中证明的.

定理 5.2　令 $\omega_i \in \mathcal{E}(\lambda,\beta)$ 为一列引理 5.1 中的 KE- 锥度量, 那么 $\sigma_i(\tilde{M})$ 收敛到一个 $\mathbb{C}P^N$ 中的正规簇 $(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$ (其中除子 $\tilde{D}_\infty$ 是 $\sigma_i(\tilde{D})$ 的一个极限代数环), 且该正规簇与 M 关于度量 ω_{β_i} 的 Gromov-Hausdorff 极限 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 同胚. 更进一步地, 有

(1) 存在同胚 $\Phi: M_\infty \to \tilde{M}_\infty$ 使得 $\Phi_\infty(D_\infty) = \tilde{D}_\infty$;

(2) $\mathrm{Aut}(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$ 是约化的.

继续定理 3.2 中步骤 3 的证明　根据推论 4.1, 只需证明 ϕ_β 一致有界. 于是通过取 ω_β 当 $\beta \to \bar{\beta}$ 的极限, 就能得到锥角为 $2\pi\bar{\beta}$ 的 KE- 锥度量. 我们用反证法. 假设当 $\beta_i \to \bar{\beta}$, 存在一串 $\|\phi_{\beta_i}\|_{C^0(M)}$ 趋向 ∞ 的子序列. 故由引理 5.1 和定理 5.2, 存在单参数子群 $\sigma_t = \exp\{tX\}$ 和 $SL(N+1,\mathbb{C})$ 中元素 σ_0 使得

$$\lim_t \sigma_t(\tilde{M}) = \sigma_0(\tilde{M}_\infty).$$

由于我们可以假设 $\tilde{M}_\infty$ 与 M 不全纯同构, 根据 K- 多重稳定性条件, Ding 和 Tian 的广义 Futaki- 不变量 $f(X)$ 是正的. 下面断言

$$f(X) = \int_{\tilde{M}_\infty} X(h) \leqslant 0. \tag{5.7}$$

于是得到了矛盾从而完成证明.

情形 1　$\bar{\beta} = 1$. 此时, $(M_\infty, \omega_\infty)$ 是一个在至少复余 2 维的奇点集 $\bar{S}$ 外具有光滑 KE- 度量的 $\mathbb{Q}$-Fano 簇. 利用部分 C^0- 估计, ω_∞ 是一个 M_∞ 上相容的 KE- 度量 [14]. 因此, 由引理 3.1 知,

$$f_{M_\infty}(X) = 0.$$

特别地, (5.7) 成立.

情形 2　$\bar{\beta} < 1$. 此时, 我们回顾由引进 Donaldson 的锥版本的 Futaki- 不变量 [82] (也可参见文献 [99, 100])

$$f_{M,(1-\beta)D}(Y) = f_M(Y) + \left(\int_D n\theta_Y \omega^{n-1} - \frac{\mathrm{vol}(D)}{\mathrm{vol}(M)} \int_M \theta_Y \omega^n\right), \tag{5.8}$$

其中 Y 是任意一个沿着 D 消失的全纯向量场, θ_Y 是由 Y 如下诱导的位势:

$$i_Y \omega = \sqrt{-1}\bar{\partial}\theta_Y.$$

(5.8) 也能推广到具有不可约除子 D_∞ 的 $\mathbb{Q}$-Fano 簇 M_∞ 上. 文献 [27] 证明了对于任意 $\bar{\beta}_1 < \bar{\beta}$, 有等式

$$(\bar{\beta} - \bar{\beta}_1) f_{M_\infty}(X) = -(1-\bar{\beta}) f_{M_\infty,(1-\bar{\beta}_1)D_\infty}(X). \tag{5.9}$$

另一方面, 对于充分小的 $\bar{\beta}_1$, 有

$$\mathrm{real}(f_{M_\infty,(1-\bar{\beta}_1)D_\infty}(X)) \geqslant 0.$$

故 (5.7) 得证. □

6 Cheeger-Colding-Tian 的关于 KE- 锥度量的收敛性定理

本节首先简单描述文献 [95] 中有关具有 Ricci- 曲率有下界的 Kähler- 流形的 Cheeger-Colding-Tian 收敛性定理. 考虑如下的 n- 维 Kähler- 流形构成的类:

$$\mathcal{M}(\Lambda, v) = \{(M, g; p) \mid M \text{ 是紧致的 Kähler 流形, 并满足 } \mathrm{Ric}_M(g) \geqslant -\Lambda^2 g, \mathrm{vol}_g(B_p(1)) \geqslant v > 0\}.$$

把其关于 Gromov-Hausdorff 拓扑下的闭包记为 $\overline{\mathcal{M}}(\Lambda, v)$.

令 $(Y, d; y) \in \overline{\mathcal{M}}(\Lambda, v)$, 那么对于任意 $z \in Y$, 切锥 T_z 都是度量锥[101]. Cheeger 和 Colding 引入了如下的 $\mathcal{S}_k$- 型 ($k \leqslant n-1$, n 是实维数) 奇点:

$$\mathcal{S}_k = \{z \in Y \mid \text{在 } z \text{ 处的任意切锥不可以分裂出 } \mathbb{R}^{k+1}\}.$$

这些 $\mathcal{S}_k$ 给出了 $(Y, d; y)$ 的奇点集合 $\mathcal{S}$ 的分层结构.

下面这个关于 $\mathcal{S}_k$ 的维数估计是 Cheeger 等[95] 证明的.

定理 6.1 令 Y 是序列 $\{(M_i, g_i)\} \subset \mathcal{M}(\Lambda, v)$ 的极限, 则下述成立:

(1) $\mathcal{S}_{2k}(Y) = \mathcal{S}_{2k+1}, \dim(\mathcal{S}_k) \leqslant k$;

(2) 如果还有 $|\mathrm{Ric}_{M_i}(g_i)| \leqslant (n-1)\Lambda^2$, 则 $\mathcal{S}(Y) = \mathcal{S}_{2n-4}(Y)$.

定理 6.1 的证明依赖于下面这个关于切锥的 ϵ- 正则性结果.

引理 6.1 对任意 $\mu_0, \epsilon > 0$, 存在小常数 $\delta = \delta(v, \epsilon, n)$, $\eta = \eta(v, \epsilon, n)$, $\tau = \tau(v, \epsilon, n)$ 和一个大常数 $l = l(v, \epsilon, n)$ 使得如下事实成立: 如果一个 Kähler- 流形 (M^n, g) 满足

(i) $\mathrm{Ric}_M(g) > -(n-1)\tau^2 g$;

(ii) $\mathrm{vol}_g(B_p(1)) \geqslant \mu_0$;

(iii) $\frac{1}{\mathrm{vol}(B_p(2))}\int_{B_p(2)} |\mathrm{Ric}(g)| dV_g < \delta$;

(v) $\mathrm{d}_{GH}(B_p(l), B_{(0,x)}(l)) < \eta$,

其中 $B_{(0,x)}(l)$ 是锥 $\mathbb{R}^{2n-2} \times C(X)$ 中一个以 $(0, x)$ 为中心的半径为 l 的球 (X 是一个度量空间), 那么

$$\mathrm{d}_{GH}(B_p(1), B(1)) < \epsilon. \tag{6.1}$$

作为定理 6.1 在一串 KE- 锥度量上的推广, Tian 在文献 [27, 定理 4.3] 中证明了下面的定理:

定理 6.2 如定理 5.2, 令 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 是 KE- 锥度量 (M, ω_i) 的 Gromov-Hausdorff 极限, 那么存在 M_∞ 的闭集 $\bar{S} \cup D_\infty$, 其中 $\bar{S}$ 的实余维数至少是 4, 并且

$$D_\infty = \lim_{i\to\infty}(D, \omega_i),$$

使得 ω_∞ 在 $\bar{S} \cup D_\infty$ 外是一个光滑的 KE- 度量. 进一步地, 在 C^∞- 拓扑下, $(M, \omega_i) \to (M_\infty, \omega_\infty)$ (在 $\bar{S} \cup D_\infty$ 之外).

根据文献 [101], 我们看到 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_{2n-2}$, 其中 $\mathcal{S}$ 是 M_∞ 的奇点集. 定理 6.2 表明 $\mathcal{S}\setminus D_\infty\subset\mathcal{S}_{2n-4}$. 定理 6.2 的证明被分为 $\beta_\infty<1$ 和 $\beta_\infty=1$ 两种情形. 关键想法是要把 KE- 锥度量光滑化, 再利用定理 6.1 或引理 6.1.

注 6.1 如果 $\beta_\infty=1$, 那么 D_∞ 是 $K_{M_\infty}^{-\lambda}$ 的一个除子 11).

6.1 KE- 锥度量的光滑化

本小节构造一串 Ricci- 曲率有下界的光滑 Kähler- 度量, 它们在 Gromov-Hausdorff 意义下收敛到锥 KE- 度量. 这些度量来自于一类复 MA- 方程的 Kähler- 位势解 (参见 (4.8)). 考虑 12)

$$(\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^n=\mathrm{e}^{h_\delta-\mu\varphi}\omega_0^n, \tag{6.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&h_\delta=h_0-(1-\beta)\log(\delta+|S|_0^2)+C_\delta,\\&\int_M(\mathrm{e}^{h_\delta}-1)\omega_0^n=0.\end{aligned}$$

度量 $\omega_\delta=\omega_0+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ 的 Ricci- 曲率的正定性来自于 Ricci- 方程,

$$\mathrm{Ric}(\omega_\delta)=\mu\omega_\delta+\frac{\delta(1-\beta)\lambda}{\delta+|S|_0^2}\omega_0+\delta(1-\beta)\sqrt{-1}\frac{\nabla S\wedge\overline{\nabla S}}{(\delta+|S|_0^2)^2}\geqslant\mu\omega_\delta. \tag{6.3}$$

正如利用定理 2.2 解 (2.1), 对于任意 $\delta>0$, Tian 引入了如下的修正 F- 泛函:

$$F_{\delta,\mu}(\varphi)=J_{\omega_0}(\varphi)-\frac{1}{V}\int_M\varphi\omega_0^n-\frac{1}{\mu}\log\left(\frac{1}{V}\int_M\mathrm{e}^{h_\delta-\mu\varphi}\omega_0^n\right). \tag{6.4}$$

当 $\delta=0$, $F_{\delta,\mu}(\cdot)$ 正好是 KE- 锥度量 (M,ω_β) 的 log F- 泛函 $F_{\omega_0,\mu}(\cdot)$,

$$F_{\omega_0,\mu}(\varphi)=J_{\omega_0}(\varphi)-\frac{1}{V}\int_M\varphi\omega_0^n-\frac{1}{\mu}\log\left(\frac{1}{V}\int_M\mathrm{e}^{h_{\omega_0,\beta}-\mu\varphi}\omega_0^n\right). \tag{6.5}$$

由于 KE- 锥度量是唯一性的 7) [23,82,102], 利用 Berndtsson [23] 的一个结果知, 如果 (M,D) 存在 KE- 锥度量 ω_{β_0}, 则 $F_{\omega_0,\mu_0}(\varphi)$ 是下方有界的 13). 那么结合定理 4.1, 可以证明存在两个小常数 ϵ_0 和 δ_0 使得 $F_{\delta,\mu}(\varphi)$ 对于任意 $\delta\leqslant\delta_0$ 和 $\mu\in[\mu_0,\mu_0+\epsilon_0]$ 是逆紧的. 我们也可以用第 4 节中定理 4.2 中的证明来证明 $F_{\delta,\mu}(\varphi)$ 的逆紧性 [88], 从而避免使用定理 4.1. 因此类似应用定理 2.2 中的充分性部分, 对任意 $\delta\leqslant\delta_0$ 我们知道 (6.2) 均可解.

Tian [27] 证明了如下结果:

命题 6.1 令 ω_β $(\beta<1)$ 为一个 (M,D) 上的 KE- 锥度量, 并且 $\varphi_{\beta,\delta}$ 是 (6.2) 的解, 则

(1) $\varphi_{\beta,\delta}$ 作为 (4.5) 的解收敛到 φ_β, 进一步地, 在 $M\setminus D$ 上, 收敛是 C^∞ 的;

(2) $\omega_{\beta,\delta}$ 在整体上依 Cheeger-Gromov 拓扑收敛到 ω_β.

11) 根据定理 5.2, 当 $\beta<1$ 时, 此结论同样成立.

12) Tian 在 2012 年 10 月 25 日在美国 Stony-Brook 大学的 Simons 数学和物理中心举办的一次学术会议上宣布他的 YTD- 猜想的证明时已给出了方程 (6.2).

13) 利用 KE- 锥度量的唯一性, 我们也可以直接用 Bando 和 Mabuchi 在文献 [8] 中证明 KE- 度量的唯一性方法来证明 $F_{\omega_0,\mu_0}(\varphi)$ 有下界 7).

证明　如定理 2.2 的证明, $F_{\delta,\mu}(\varphi)$ 的逆紧性表明 $\varphi_{\beta,\delta}$ 一致有界. 由此, $\varphi_{\beta,\delta}$ 是 C^{α}- 连续的 (参见文献 [103]). 因此存在 $\varphi_{\beta,\delta}$ 的极限 φ_∞ 满足 (4.5). 另一方面, 由命题 4.1, φ_∞ 对于任意 $\alpha\in(0,\min(\frac{1-\beta}{\beta},1))$ 是 $C^{2,\alpha;\beta}(M)$ 的. 这表明 ω_{φ_∞} 是一个 (M,D) 上的 KE- 锥度量. 利用唯一性, 得到 $\varphi_\infty=\varphi_\beta$.

由 (6.3), 存在 $\omega_{\beta,\delta}$ 的 Cheeger-Gromov 极限 $(M_\infty,D_\infty;\omega'_\beta)$. 我们断言 $\omega'_\beta=\omega_\beta$. 事实上, 通过推广 Yau 的 C^2- 估计并结合 Schwartz 引理 (参见文献 [104,105]), 能够证明

$$\tilde{C}\omega_0\leqslant\omega_{\beta,\delta}\leqslant\tilde{C}(\delta+|S|_0^2)^{\beta-1}\omega_0. \tag{6.6}$$

这表明 $(M_\infty\setminus D_\infty;\omega'_\beta)$ 的完备化正是 $(M,D;\omega_\beta)$. 另一方面, 我们知道 $(M\setminus D;\omega_\beta)$ 是连通的. 因此, $\omega'_\beta=\omega_\beta$. □

6.2　几乎 KE- 度量

由命题 6.1, 当 $\beta\to1$ 时, ω_β 可以被一串几乎 KE- 度量 $\omega_{\beta,\delta}$ 逼近. 几乎 KE- 度量首先由 Tian 和 Wang[96] 引进, 见下面定义.

定义 6.1　如果一串 n- 维 Fano- 流形 (M_i,J_i,g^i) $(\omega_{g^i}\in2\pi c_1(M_i))$ 满足

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad \mathrm{Ric}(g^i)\geqslant-\Lambda^2g^i,\quad \mathrm{diam}(M_i,g^i)\leqslant D;\\
&\text{(ii)}\quad \int_{M_i}|\mathrm{Ric}(g^i)-g^i|\omega_{g^i}^n\to0;\\
&\text{(iii)}\quad \int_0^1\int_{M_i}|R(t)-n|\omega_{g_t^i}^n dt\to0,\quad i\to\infty.
\end{aligned}\tag{6.7}$$

我们称其为一串几乎 KE- 流形, 其中 g_t^i 是以 g^i 为初始度量的 Ricci- 流

$$\frac{\partial}{\partial t}g=-\mathrm{Ric}(g)+g$$

的解.

我们有下面 Fano- 流形上几乎 KE- 度量的判别法[96].

命题 6.2　假设在 Fano- 流形 M 上有一串度量 $\omega_i\in2\pi c_1(M)$ 满足 $\mathrm{Ric}(\omega)\geqslant\mu_i\omega_i$ $(\mu_i\to1)$, 则 (M,ω_i) 是一串几乎 KE- 度量.

证明　定义 6.1 中的条件 (i) 来自于 Myer 的定理. 条件 (ii) 同样成立:

$$\begin{aligned}
\int_M|\mathrm{Ric}(\omega_i)-\omega_i|\omega_i^n&\leqslant\int_M|\mathrm{Ric}(\omega_i)-\mu_i\omega_i|\omega_i^n+\int_M|(1-\mu_i)\omega_i|\omega_i^n\\
&\leqslant n\int_M(\mathrm{Ric}(\omega_i)-\mu_i\omega_i)\wedge\omega_i^{n-1}+n(1-\mu_i)\int_M\omega_i^n\\
&=2n(1-\mu_i)\int_M\omega_i^n\\
&=2n(1-\mu_i)V\xrightarrow{\mu_i\to1}0,
\end{aligned}$$

其中 $V=\int_M\omega_{g_t^i}^n=(2\pi c_1(M))^n$.

条件 (iii) 可以利用 $\min_M \mathrm{e}^{-t}(R(t)-n)$ 在 $R(t)$ 的演化方程下的单调性验证. □

作为定理 6.1 的推广, Tian 和 Wang[96] 把引理 6.1 应用到一串有关几乎 KE- 度量并证明了下面的定理.

定理 6.3 令 (M_i, g_i) 是一串几乎 KE- 度量. 假设在每个 M_i 上存在点 p_i 使得

$$\mathrm{vol}_{M_i}(B_{p_i}(1)) \geqslant v > 0, \tag{6.8}$$

那么存在 (M_i, g_i) 的子序列在 Gromov-Hausdorff 拓扑下收敛到一个极限度量空间 Y, 并且 $\mathcal{S}(Y) = \mathcal{S}_{2n-4}$, 即 Y 的实余维数至少是 4.

结合命题 6.1 和定理 6.3, 我们可完成定理 6.2 的证明.

定理 6.2 的证明 由于 ω_i 在 D 外面都是 KE- 度量, 由定理 6.1, 当 $\beta_i \to \bar{\beta} < 1$ 时, 定理 6.2 可从命题 6.1 得到. 当 $\bar{\beta} = 1$ 时, 由命题 6.1, 我们可以把 ω_i 替换成一串 $2\pi c_1(M_i)$ 中的几乎 KE- 度量. 那么由定理 6.3, 我们看到 (M, ω_i) 收敛到一个奇点集 $\bar{S}$ 至少是实余 4 维的具有局部光滑 KE- 流形的极限空间 (M_∞, D_∞), 其中 $\bar{S}$ 可能包含了 $D_\infty \subset M_\infty$ 的奇点. 定理 6.2 得证. □

7 定理 5.1 的证明

定理 5.1 的证明可以转化为证明下面的定理:

定理 7.1 令 $\{(M, g_i)\}$ 是一串 (M, D) 上的锥角为 $2\pi\beta \to 2\pi\beta_\infty$ 的 KE- 锥度量, 并且它们以 (M_∞, g_∞) 为 Gromov-Hausdorff 极限, 则对任意 $x \in M_\infty$, 存在正整数 $l_x = l_x(\beta_\infty, c_1(M), D; x)$ 和一串 $x_i \in M$ 收敛到 x, 使得

$$\inf_i \rho_{l_x}(M_i, g_i)(x_i) \geqslant c_x > 0, \tag{7.1}$$

其中 $c_x = c_x(\beta_\infty, c_1(M), D; x)$.

下述全纯截面的梯度估计在定理 7.1 的证明中十分重要.

引理 7.1 设 (M^n, ω) 是一个 n- 维的 Fano- 流形并且 h 是 K_M^{-1} 上一个 Hermite- 度量, 其满足 (5.1). 假设对于某个 Λ 有 $\mathrm{Ric}(\omega) \geqslant -\Lambda^2\omega$, 则存在 $C = C(n, C_s)$, 使得对于任意的 $\sigma \in H^0(M, K_M^{-l})$ 和 $\ell \geqslant \frac{\Lambda^2}{n}$, 有

$$\sup_M(|\sigma|_h + \ell^{-\frac{1}{2}}|\nabla\sigma|_{\omega\otimes h}) \leqslant C\ell^{\frac{n}{2}}\left(\int_M |\sigma|_h^2\omega^n\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.2}$$

其中 C_s 是 ω 的 Sobolev 常数.

引理 7.1 可用 Moser- 迭代来证明. 由引理 7.1, 我们只要在奇点 $x \in M_\infty$ 附近证明估计 (7.1). 正如文献 [25, 26] 中对一串 KE- 度量所作的, 基本工具是 Hömander 的解 $\bar{\partial}$- 方程的 L^2- 估计. 第一步是要构造一个多重反典则线丛上在 x_i 附近不为 0 的几乎全纯截面. 我们将利用伸缩的办法把切锥 C_x 上的平凡线丛的平凡截面拉回到 M 上.

为了把局部截面延拓成整体截面, 一个技术性的步骤是在切锥上构造如下的截断函数.

引理 7.2 令 $\mathcal{S}$ 为 M_∞ 奇点集. 令 S_x 为 C_x 在 $x \in \mathcal{S}$ 处的切锥的奇点集, 则对任意 $\bar{\epsilon} > 0$, 存在 C_x 上的光滑函数 $\gamma_{\bar{\epsilon}}$, 使得

(1) 当 $\mathrm{dist}(y, S_x) > \bar{\epsilon}$ 时, $\gamma_{\bar{\epsilon}}(y) \equiv 1$;

(2) $0 \leqslant \gamma_{\bar{\epsilon}} \leqslant 1$, 且在 S_x 附近, 有 $\gamma_{\bar{\epsilon}} \equiv 0$;

(3) $|\nabla\gamma_{\bar{\epsilon}}| \leqslant C = C(\bar{\epsilon})$;

(4) $\int_{B_o(\bar{\epsilon}^{-1})} |\nabla\gamma_{\bar{\epsilon}}|^2\omega_x^n \leqslant \bar{\epsilon}$.

例 7.1 平坦锥 $C_x=\mathbb{C}^{n-1}\times C'_x$ (参见 (4.3)) 上的截断函数.

令 $\bar{\delta}<\frac{1}{3}$ 为一个正数. 令 η 是 $\mathbb{R}$ 上满足下述条件的截断函数: $0\leqslant\eta\leqslant 1$, $|\eta'|\leqslant 1$ 并且

$$\eta=\begin{cases}0, & t>\log(-\log\bar{\delta}^3),\\ 1, & t\leqslant\log(-\log\bar{\delta}).\end{cases}\tag{7.3}$$

定义 C_x 上的截断函数 $\gamma_{\bar{\epsilon}}$ (见图 1):

$$\gamma_{\bar{\epsilon}}=\begin{cases}1, & \text{若 } \rho(y)=\mathrm{dist}(y,S_x)\geqslant\bar{\epsilon},\\ \eta\bigg(\log\bigg(-\log\dfrac{\rho(y)}{\bar{\epsilon}}\bigg)\bigg), & \text{若 } \rho(y)\leqslant\bar{\epsilon},\end{cases}\tag{7.4}$$

则当 $\rho(y)\geqslant\bar{\delta}\bar{\epsilon}$ 时, $\gamma_{\bar{\epsilon}}\equiv 1$; 当 $\rho(y)\leqslant\bar{\delta}^3\bar{\epsilon}$ 时, $\gamma_{\bar{\epsilon}}\equiv 0$, 并且

$$\mathrm{supp}|\nabla\gamma_{\bar{\epsilon}}|\subset\subset\{y\mid\bar{\delta}^3\bar{\epsilon}\leqslant\rho(y)\leqslant\bar{\delta}\bar{\epsilon}\}.$$

因此, 如果取 $\bar{\delta}=O(\mathrm{e}^{-\bar{\epsilon}^{-2n+1}})$, 则有

$$\begin{aligned}\int_{B_o(\bar{\epsilon}^{-1})}|\nabla\gamma_{\bar{\epsilon}}|^2\omega_x^n&\leqslant\int_{\bar{\delta}^3\bar{\epsilon}\leqslant\rho(y)\leqslant\bar{\delta}\bar{\epsilon}}\bigg[\rho\bigg(-\log\frac{\rho}{\bar{\epsilon}}\bigg)\bigg]^{-2}\bar{\beta}\rho d\rho\theta\int_{B_o(\bar{\epsilon}^{-1})'}\omega_{\mathrm{flat}}^{n-1}\\&\leqslant\frac{2\pi a_{n-1}\bar{\beta}}{\bar{\epsilon}^{2(n-1)}}\int_{\bar{\delta}^3}^{\bar{\delta}}\frac{dr}{r(\log r)^2}\\&=\frac{2\pi a_{n-1}\bar{\beta}}{\bar{\epsilon}^{2(n-1)}(-\log\bar{\delta})}\\&\leqslant O(\bar{\epsilon}),\end{aligned}\tag{7.5}$$

其中 $B_o(\bar{\epsilon}^{-1})'$ 是一个 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的以原点为中心的 $\bar{\epsilon}^{-1}$- 球, 并且

$$a_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{vol}(B_o(1)).$$

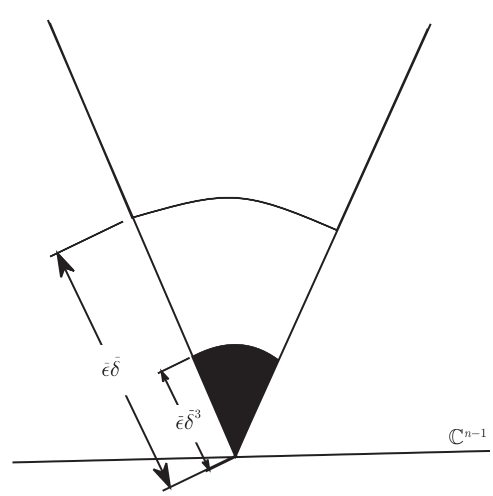

图 1 $\gamma_{\bar{\epsilon}}$ **在黑色区域为 0, 在环形区域外面为 1**

例 7.2 具有复余 2 维奇点集 $\bar{S}_x$ 的锥 $C_x = \mathbb{C}^{n-2} \times C'_x$ 上的截断函数.

我们用球 $B_{x_a}(s_a, \omega_x)$ 做一个 $\bar{S}_x \cap B_o(\bar{\epsilon}^{-1})$ 的有限覆盖, 并且要求

(i) $x_a \in \bar{S}_x$, $2r_a \leqslant \epsilon_0$;

(ii) 所有 $B_{x_a}(\frac{r_a}{2}, \omega_x)$ 互不相交;

(iii) $\sum r_a^{2n-2} \ll 1$.

令 $\bar{\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足如下条件的截断函数:

$$\begin{aligned} &\text{当 } t \leqslant \frac{1}{2}, \quad \bar{\eta}(t) = 1, \\ &\text{当 } t \geqslant 1, \quad \bar{\eta}(t) = 0, \quad |\bar{\eta}'(t)| \leqslant 2. \end{aligned}$$

设

$$\kappa(y) = \min_i \left\{ 1 - \bar{\eta}\left(\frac{d(y, x_i)}{r_i} \right) \right\}.$$

易见, 在一个 $\bar{S}_x \cap B_o(\bar{\epsilon}^{-1}, \omega_x)$ 的邻域外, $\kappa \equiv 1$ 并且 κ 的支集在 $B_o(\bar{\epsilon}^{-1} + 1, \omega_x) \setminus \cup B_{x_a}(\frac{r_a}{2}, \omega_x)$ 上. 可以简单验证

$$\int_{B_o(\bar{\epsilon}^{-1}, \omega_x)} |\nabla \kappa|^2 \omega_x^n \leqslant 4 \sum_a r_a^{2n-2} \leqslant \epsilon_0.$$

注 7.1 根据定理 6.2, 例 7.2 给出了 $\bar{\beta} = 1$ 时引理 7.2 的证明. 当 $\bar{\beta} < 1$ 时, 由例 7.1 和 7.2, 我们只要考虑极限 M_∞ 中奇点处形如 $C_x = \mathbb{C}^{n-2} \times C'_x$ 的具有余 1 维奇点集 $\bar{S}_x$ 的锥. Tian [27] 事实上证明了 $\bar{S}_x$ 中余 1 维的奇点集具有局部除子结构, 并且利用例 7.1 中的截断函数的粘合完成了引理 7.2 的证明 14).

下面利用引理 7.1 和 7.2 给出定理 7.1 证明的概要.

定理 7.1 的证明分为 5 步. 令 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 为待定的充分小的常数. 定义

$$V(x; \epsilon) = \{ y \in C_x \mid y \in B_{\epsilon^{-1}}(o, g_x) \setminus B_\epsilon(o, g_x), d(y, S_x) > \epsilon \}$$

是 C_x 的一个环形区域.

步骤 1 对充分大的 j (可能依赖 ϵ 和 δ), 存在 $l = k_j l_j = l_x$ 和 $r = \frac{1}{l} = \frac{1}{l_j}$, 使得在 $V(x; \frac{\epsilon}{4})$ 和 $K^{-1}_{V(x;\epsilon)}$ 上分别有映射 ϕ 和 ψ, 以及有 $\phi(V(x;\epsilon))$ 上 $K^{-l}_{\mathrm{Reg}(M_\infty)}$ 的全纯截面 $\tau = \psi(1)$, 使得

$$|\tau|^2 = \mathrm{e}^{-\frac{\rho_x^2}{2}} \quad \text{和} \quad |\bar{\partial}\tau| \leqslant C\delta r^{-2},$$

其中 C 是一致常数并且 $\delta < \epsilon$.

步骤 2 对于一个待定的小常数 δ_0, 我们可以选取一个如引理 7.2 中所构造的光滑函数 $\gamma_{\bar{\epsilon}}$ ($\bar{\epsilon} < \epsilon < \delta_0$) 使得 (1)–(4) 成立并且在 $V(x; \delta_0)$ 上有 $\gamma_{\bar{\epsilon}} = 1$. 令 η 为一个满足下述条件的 $\mathbb{R}$ 上的截断函数:

$$\eta(t) = 0, \quad t \geqslant 2, \quad \eta(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad |\eta'(t)| \leqslant 2,$$

那么 $\eta(2\epsilon(\rho_x(y) + \rho_x(y)^{-1}))\gamma_{\bar{\epsilon}}(y)$ 是一个 C_x 上具有支集 $B_o(\epsilon^{-1}) \setminus B_o(\epsilon)$ 的截断函数. 定义 $K^{-l}_{\mathrm{Reg}(M)}$ 上的一个光滑截面

$$\hat{\tau}(\phi(y)) = \eta(2\epsilon(\rho_x(y) + \rho_x(y)^{-1}))\gamma_{\bar{\epsilon}}(y)\tau(\phi(y)).$$

14) 最近, Liu 和 Szekelyhidi 把定理 5.1 推广到一串仅有 Ricci 曲率下界的 Kähler 流形序列. 他们需要利用 Cheeger 等 [106] 一个深刻的奇点集估计结果来构造类似于引理 7.2 中的截断函数.

由直接计算得到

$$\int_{M_\infty}|\bar\partial\hat\tau|^2\omega_\infty^n \leqslant 4r^{2n-2}\bigg(\int_{B_o(\bar\epsilon^{-1})}|\bar\partial(\eta(2\epsilon(\rho_x(y)+\rho_x(y)^{-1}))\gamma_{\bar\epsilon}(y))|^2\mathrm{e}^{-\frac{\rho_x^2}{2}}\omega_x^n + C\delta\mathrm{vol}(V(x;\epsilon))\bigg)$$
$$\leqslant \nu r^{2n-2}, \tag{7.6}$$

其中 $\nu=\nu(\bar\epsilon,\delta)$. 同样, 还有

$$\int_{M_\infty}|\hat\tau|^2\omega_\infty^n \leqslant 2r^{2n}\int_{V(x;\epsilon)}\mathrm{e}^{-\frac{\rho_x^2}{2}}\omega_x^n \leqslant C(x)r^{2n}. \tag{7.7}$$

步骤 3 由于在 $\mathcal{S}=\bar S\cup D_\infty$ 外,

$$(M,\omega_i)\to(M_\infty,\omega_\infty)$$

是一个光滑收敛, 并且 K_M^{-1} 上的 Hermite 度量 H_i 在 $M_\infty\setminus\mathcal{S}$ 上依 C^∞- 拓扑收敛到 H_∞, 故存在微分同胚

$$\tilde\phi_i: M_\infty\setminus T_i(\mathcal{S})\to M\setminus T_i(D)$$

和光滑同构

$$F_i:(K^{-l}_{\mathrm{Reg}(M_\infty)}, M_\infty\setminus T_i(\mathcal{S}))\to(K_M^{-l}, M\setminus T_i(D)),$$

并且当 $\delta_i\to 0$ 时满足下述条件:

(C_1) $\tilde\phi_i(M_\infty\setminus T_i(\mathcal{S}))\subset M\setminus T_i(D)$;

(C_2) $\pi_i\circ F_i=\tilde\phi_i\circ\pi_\infty$, 其中 π_i 和 π_∞ 是相应的投影;

(C_3) $\|\tilde\phi_i^*\omega_i-\omega_\infty\|_{C^2(M_\infty\setminus T_i(\mathcal{S}))}\leqslant\delta_i$;

(C_4) $\|F_i^*H_i-H_\infty\|_{C^2(M_\infty\setminus T_i(\mathcal{S}))}\leqslant\delta_i$,

其中

$$T_i(D)=\{x\in M\mid d_i(x,D)\leqslant\delta_i\},\quad T_i(\mathcal{S})=\{x\in M_\infty\mid d_\infty(x,\mathcal{S})\leqslant\delta_i\},$$

$d_i(\cdot,D)$ ($d_\infty(\cdot,\mathcal{S})$) 是由度量 ω_i (ω_∞) 定义的到 D ($\mathcal{S}$) 的距离函数. 令 $\tilde\tau_i=F_i(\tilde\tau)$. 显然有

$$\tilde\tau_i=F_i(\tau),\quad 在\ (\tilde\phi_i\circ\phi)(V(x;\delta_0)).$$

并且, 由 (7.6), 对充分大的 i, 得到

$$\int_M|\bar\partial\tilde\tau_i|_i^2\omega_i^n\leqslant 4\nu r^{2n-2},\quad \int_M|\tilde\tau_i|_{H_i}^2\omega_i^n\leqslant 8r^{2n}\int_{C_x}\mathrm{e}^{-\frac{\rho_x^2}{2}}\omega_x^n, \tag{7.8}$$

其中 $|\cdot|_i$ 表示由 $H_i^{\otimes l}\otimes\omega_i$ 定义的 Hermite 范数.

步骤 4 在 (M,K_M^{-l}) 上应用 Hörmander 的 L^2- 理论, 我们得到 K_M^{-l} 的截面 v_i, 它满足

$$\bar\partial v_i=\bar\partial\tau_i, \tag{7.9}$$

并且有估计

$$\int_M|v_i|_{H_i}^2\omega_i^n\leqslant\frac{1}{l}\int_M|\bar\partial\tilde\tau_i|_i^2\omega_i^n\leqslant 3\nu r^{2n},$$

其中 $l=\frac{1}{r^2}$. 进一步地, 由于 $\tilde{\phi}_i\circ\phi(V(x;\delta_0))$ 在伸缩后的度量 $r^{-2}\omega_i$ 下具有与 $V(x;\delta_0)$ 充分接近的几何结构, 在 $(\tilde{\phi}_i\circ\phi)(V(x;\delta_0))$ 上对方程 (7.9) 使用椭圆估计, 得到

$$\sup_{\tilde{\phi}_i\circ\phi(V(x;\delta_0)\cap B_o(1,\omega_x))}|v_i|^2_{H_i}\leqslant C(\delta_0 r)^{-2n}\int_M |v_i|^2_{H_i}\omega_i^n\leqslant C_0\delta_0^{-2n}\nu, \tag{7.10}$$

其中 C_0 是一致常数.

步骤 5 令 $\sigma_i=\tilde{\tau}_i-v_i$, 则 σ_i 是 K_M^{-l} 的全纯截面. 给定任意 δ_0, 我们可以找到充分小的 ϵ 和 δ 使得 $8C_0\nu\leqslant\delta_0^{2n}$. 故由 (7.10), 得到

$$|\sigma_i|_{H_i}(y)\geqslant|F_i(\tilde{\tau})|_{H_i}(y)-|v_i|_{H_i}(y)\geqslant\frac{1}{2},\quad \forall\, y\in(\tilde{\phi}_i\circ\phi)(V(x;\delta_0)).$$

另一方面, 由引理 7.1, 有

$$\sup_M|\nabla\sigma_i|_i\leqslant Cl^{\frac{n+1}{2}}\left(\int_M|\sigma|^2_{H_i}\omega_i^n\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C'r^{-1}.$$

注意到对于 $\bar{x}\in\partial B_o(1,\omega_x)$, 距离 $d(o,\delta_0\bar{x})$ 小于 $2\delta_0 r$. 故当 i 充分大时,

$$d(x_i,(\tilde{\phi}_i\circ\phi)(\delta_0\bar{x}))\leqslant 3\delta_0 r.$$

故得

$$|\sigma_i|_{H_i}(x_i)\geqslant|\sigma_i|_{H_i}(\tilde{\phi}_i\circ\phi(\delta_0\bar{x}))-\sup_M|\nabla\sigma_i|_i d(x_i,\tilde{\phi}_i\circ\phi(\delta_0\bar{x}))\geqslant\frac{1}{4}-3C'\delta_0.$$

选取 δ_0 使得 $C'\delta_0\leqslant\frac{1}{16}$, 有

$$|\sigma_i|_{H_i}(x_i)\geqslant\frac{1}{8}.$$

定理 7.1 得证.

8 定理 4.4 的证明

由定理 5.1, 我们看到 $H^0(M,K_M^{-km})$ 的一组基 $(s_0^i,\dots,s_n^i)$ 给出了一串全纯映射 $\Phi_{k,i}:M\to\mathbb{C}P^N$. 根据引理 7.1 中 s_α^i 的梯度估计, $\Phi_{k,i}$ 是一致 Lipschitz 连续的, 从而得到极限映射

$$\Phi_{k,\infty}:M_\infty\to\mathbb{C}P^N.$$

另一方面, $\bar{M}_i$ 在 $\Phi_{k,i}$ 下的像在代数环意义下存在极限 $\bar{M}_\infty$, 其与 $\Phi_{k,\infty}$ 的像吻合. 故 $\Phi_{k,\infty}$ 把 M_∞ 映到 $\tilde{M}_\infty$, 并且 $\Phi_{k,\infty}(D_\infty)$ 与极限 $\tilde{D}_\infty$ 在 $\Phi_{k,i}(D)$ 下的像吻合. 进一步地, 由反典则线丛的有限生成性质 15):

$$H^0(M,K_M^{-p})\subseteq H^0(M,K_M^{-(p-m)})\otimes H^0(M,K_M^{-m}), \tag{8.1}$$

其中 $p\geqslant m(n+1)$ 为任意整数, 还能证明 $\Phi_{k,\infty}$ 对某个 k 是单射.

为了证明 $\tilde{M}_\infty$ 是一个正规簇, 只要对任意整数 $l\geqslant 1$ 证明

$$H^0(M_\infty,K_{M_\infty}^{-l})\cong H^0(M,K_M^{-l}), \tag{8.2}$$

15) Li [99] 证明了在 Ricci- 曲率有下界时, (8.1) 成立. (8.1) 在我们考虑的情形下也成立, 这是因为每个度量 ω_i 可以被一串 Ricci- 曲率大于 β_i 的 Kähler- 度量逼近 (参见第 6 节), 他们诱导的 K_M^{-km} 上的 Hermite- 度量是 Hölder- 收敛的.

其中 $H^0(M_\infty, K^{-l}_{M_\infty})$ 由 $(M_\infty, K^{-l}_{M_\infty\setminus\mathcal{S}})$ 上全体有界的全纯截面构成. 由于 D_∞ 是一个除子, 我们可构造类似于例 7.1 中截断函数把 $H^0(M_\infty, K^{-l}_{M_\infty})$ 中任意的元素 σ 局部提升成一列收敛到 σ 的 K_M^{-l} 上几乎全纯截面. 再依照定理 7.1 的证明办法, 存在一列收敛到 σ 的 K_M^{-l} 上全纯截面. 所以, 关系 (8.2) 成立.

证明 $\tilde{M}_\infty$ 是一个 Q-Fano 簇, 我们需要下面的命题:

命题 8.1 奇点集 $\bar{S}\setminus D_\infty$ 在 Φ_∞ 映射下有下面的关系:

$$\Phi_\infty(\bar{S}\setminus D_\infty)\subset \mathrm{Sing}(\bar{M}_\infty)\setminus\Phi_\infty(D_\infty).$$

因为 $\Phi_\infty(D_\infty)$ 是一个除子, 线丛 $K^{-k_0m}_{M_\infty}$ 可以被延拓到 D_∞ 的光滑部分. 命题 8.1 表明, M_∞ 中不包含 D_∞ 的复余维大于 1 的奇点集仍然是 $\tilde{M}_\infty$ 中的奇点集, 从而, $K^{-k_0m}_{M_\infty\setminus\mathcal{S}}$ 可以延拓成一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^N}(1)$ 的限制线丛. 命题 8.1 的证明依赖于开集 $U\setminus E$ 上 KE- 方程对应的复 MA- 方程的 Evans-Krylov 型 $C^{2,\alpha}$- 估计, 其中 $U\subset\mathbb{C}^n$ 是一个有界开集, E 是一个实余维数至少是 2 的闭集 (参见文献 [107]).

在本节的余下部分, 我们讨论证明 $\mathrm{Aut}(\tilde{M}_\infty, \tilde{D}_\infty)$ 是约化的, 从而完成定理 5.2 的证明. 事实上, 此结果对于一类以下定义的具有弱 KE- 度量的 $\mathbb{Q}$-Fano 簇也成立.

定义 8.1 设 M 是一个 Fano- 流形, $\tilde{\omega}_i\in 2\pi c_1(M)$ 是一串 M 上的 Kähler- 度量满足 $\mathrm{Ric}(\tilde{\omega}_i)\geqslant \mu_i\tilde{\omega}_i$, 这里 $\mu_i\to\bar{\mu}\in(0,1]$. 令 M_∞ 是 $\mathbb{C}P^N$ 中具有除子 D_∞ 的 $\mathbb{Q}$-Fano 簇. 称 $(M_\infty, D_\infty, \omega_\infty)$ 是 $(M, \tilde{\omega}_i)$ 的具有除子奇点 D_∞ 的弱极限 KE- 空间, 如果 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 是 $(M, \tilde{\omega}_i)$ 在 Gromov-Hausdroff 拓扑下的极限, 并且满足

(1) 在 $M_\infty\setminus\mathcal{S}$ 上 $\mathrm{Ric}(\omega_\infty)=\bar{\mu}\omega_\infty$, 其中 $\mathcal{S}=D_\infty\cup\bar{S}$ 是奇点集, $\bar{S}$ 是 M_∞ 中的 (实) 余维数至少是 4 的解析子集;

(2) 对于某个整数 $\ell>0$, 线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^N}(1)\,|_{M_\infty}=K^{-\ell}_{M_\infty}$, 并且对于一个连续函数 ψ_0,

$$\omega_\infty=\frac{1}{\ell}\omega_{FS}\,|_{M_\infty}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_0,\quad \text{在 } M_\infty\setminus\mathcal{S} \text{ 上},$$

其中 ω_{FS} 是 $\mathbb{C}P^N$ 的 Fubini-Study 度量, 并且 $N=H^0(M_\infty, K^{-\ell}_{M_\infty})-1$;

(3) 存在 $K^{-\ell}_{M_\infty}$ 上的连续 Hermite- 度量 H_∞, 其曲率形式在 $M_\infty\setminus\mathcal{S}$ 上满足

$$\mathrm{R}(K^{-\ell}_{M_\infty}, H_\infty)=\omega_\infty.$$

我们需要把 KE- 流形上 Matsushima 定理[4] 推广到上述弱极限 KE- 空间.

定理 8.1 假设 $(M_\infty, D_\infty, \omega_\infty)$ 是 $(M, \tilde{\omega}_i)$ 的弱极限 KE- 空间, 其中除子 D_∞ 依照定义 8.1 给出, 则 $\mathrm{Aut}(M_\infty, D_\infty)$ 的 Lie 代数是一个 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 上的 Killing- 向量场的子 Lie 代数的复化, 即 $\mathrm{Aut}(M_\infty, D_\infty)$ 是约化的.

定理 8.1 证明的主要步骤 设 X 是 $\mathbb{C}P^n$ 上保持 (M_∞, D_∞) 的全纯向量场. 令 $Y=\mathrm{real}(X)$ 为 X 的实部, Φ_t 为 Y 诱导的 $SL(N+1,\mathbb{C})$ 中的单参数子群.

定义两族连续函数 ψ_t 和 ξ_t:

$$\Phi_t^*\omega_\infty=\frac{1}{\ell}\omega_{FS}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi_t=\omega_\infty+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\xi_t,$$

显然, ψ_t 和 ξ 分别满足

$$\psi_t=\psi_0\circ\Phi_t+\theta_t$$

和

$$\xi_t = \psi_0 \circ \Phi_t - \psi_0 + \theta_t,$$

其中 ψ_0 来自定义 8.1, θ_t 是 $\mathbb{C}P^N$ 上的光滑 Kähler- 位势, 其满足

$$\frac{1}{\ell}\Phi_t^*\omega_{FS} = \frac{1}{\ell}\omega_{FS} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\theta_t.$$

故 ξ_t 在 $M_\infty \setminus \mathcal{S}$ 上满足 KE- 方程

$$(\omega_\infty + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\xi_t)^n = \mathrm{e}^{-\bar{\mu}\xi_t}\omega_\infty^n. \tag{8.3}$$

步骤 1 易见函数 $t^{-1}\xi_t$ 在 $M_\infty \setminus D_\infty$ 上局部收敛到一个光滑函数 u. 进一步地, 只要 $|t|$ 充分小, 我们就有如下估计:

$$\int_{M_\infty} (|t^{-1}\xi_t|^2 + |t^{-1}\partial\xi_t|^2)\omega_\infty^n \leqslant C. \tag{8.4}$$

步骤 2 对 (8.3) 求导, 我们发现 $\int_{M_\infty} u\omega_\infty^n = 0$, 并且在 $M_\infty \setminus D_\infty$ 上,

$$u = Y(\psi_0) + \theta_u,$$

其中 $\theta_u = \lim_{t\to 0}\frac{\theta_t}{t}$ 是 $\mathbb{C}P^N$ 中 Y 位势函数, 其满足

$$\frac{1}{\ell}L_Y\omega_{FS} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\theta_u = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\mathrm{real}(\theta_X).$$

进一步地, 利用 Moser- 迭代和 (8.4), 我们可以证明在 $M_\infty \setminus D_\infty$ 上 u 的 L^∞- 范数是一致有界的.

类似地, 若令 $\hat{Y} = \mathrm{im}(X)$, 则

$$v = \hat{Y}(\psi_0) + \theta_v, \quad 在\ M_\infty \setminus D_\infty\ 上$$

是一个 $M_\infty \setminus D_\infty$ 上的 L^∞- 范数一致有界的函数, 其中 $\theta_v = \mathrm{im}(\theta_X)$. 故

$$\theta_\infty = u + \sqrt{-1}v = X(\psi_0) + \theta_X$$

是 X 上 L^∞- 范数一致有界的位势函数, 并且在 $M_\infty \setminus D_\infty$ 上有

$$i_X\omega_\infty = \sqrt{-1}\partial\theta_\infty.$$

进一步地, 通过取截断函数方法, 利用 (8.4) 我们可以证明

$$\int_{M_\infty} \theta_\infty = 0, \quad \int_{M_\infty} |\nabla\theta_\infty|^2\omega_\infty^n \leqslant C. \tag{8.5}$$

由 (8.5), 我们事实上可以证明: θ_∞ 是 M_∞ 上 ω_∞ 的弱意义下的位势函数, 即 θ_∞ 在弱意义下满足

$$\triangle\theta_\infty = -\bar{\mu}\theta_\infty. \tag{8.6}$$

步骤 3 由步骤 2 知, u 和 v 都是 ω_∞ 的实特征函数. 我们需要进一步通过光滑逼近特征函数来证明 $\bar{\partial}u$ 和 $\bar{\partial}v$ 都在 $M_\infty\backslash\mathcal{S}$ 上诱导了全纯向量场. 从而, 这些向量场的虚部是 Killing- 向量场. 因此, $\mathrm{Aut}(M_\infty, D_\infty)$ 的 Lie 代数是 $(M_\infty, \omega_\infty)$ 上 Killing- 向量场的子 Lie 代数的复化. 所以, 在定理 8.1 的证明中, 我们事实上证明了 $(0,1)$- 形式 $\sqrt{-1}\bar{\partial}u$ 在 $M_\infty \setminus \mathcal{S}$ 上是全纯的. □

致谢　单从发表在国际顶级数学期刊的论文数量来看, KE- 度量的研究毫无疑问是近几十年来, 微分几何, 特别是 Kähler- 几何中最活跃的研究课题之一. 作者衷心感谢《中国科学: 数学》同仁的邀请, 使作者有机会为纪念《中国科学》创刊 70 周年撰写这篇综述文章. 特别感谢田刚和张伟平两位院士对文章提出许多宝贵意见. 也对王枫、郦言和张科伟等同志的帮助一并感谢.

参考文献

1 Calabi E. The space of Kähler metrics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Amsterdam: North-Holland, 1954, 206–207
2 Yau S T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I. Comm Pure Appl Math, 1978, 31: 339–411
3 Aubin T. Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. Bull Sci Math, 1978, 102: 63–95
4 Matsushima Y. Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété Kaehlérinne. Nagoya Math J, 1957, 11: 145–150
5 Matsushima Y. Remarks on Kähler-Einstein manifolds. Nagoya Math J, 1972, 46: 161–173
6 Koiso N. On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics. In: Recent Topics in Differential and Analytic Geometry. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 18. Pittsburgh: Academic Press, 1990, 327–337
7 Futaki A. An obstruction to the existence of Kähler-Einstein metrics. In: Lecture Notes in Mathematics, vol. 1200. Berlin: Springer, 1988, 437–443
8 Bando S, Mabuchi T. Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions. In: Algebraic Geometry. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 10. Tokyo: Math Soc Japan, 1987, 11–40
9 Tian G. On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$. Invent Math, 1987, 89: 225–246
10 Tian G, Yau S T. Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1(M) > 0$. Comm Math Phys, 1987, 112: 175–203
11 Tian G. On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class. Invent Math, 1990, 101: 101–172
12 Tian G. Kähler-Einstein on algebraic manifolds. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I; II. Tokyo: Math Soc Japan, 1991, 587–598
13 Tian G. Existence of Einstein metrics on Fano manifolds. In: Jeff Cheeger Anniversary Volume: Metric and Differential Geometry. Progress in Mathematics, vol. 297. Basel: Birkhäuser, 2012, 119–162
14 Ding W Y, Tian G. Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant. Invent Math, 1992, 110: 315–335
15 Tian G. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. Invent Math, 1997, 130: 1–37
16 Paul S T, Tian G. CM stability and the generalized Futaki invariant II. Astérisque, 2009, 328: 339–354
17 Tian G. Futaki invariant and CM polarization. In: Geometry and Topology of Manifolds. Tokyo: Springer, 2016, 327–348
18 Donaldson S K. Scalar curvature and stability of toric varieties. J Differential Geom, 2002, 62: 289–349
19 Li C, Xu C. Special test configuration and K-stability of Fano varieties. Ann of Math (2), 2014, 180: 197–232
20 Donaldson S K. Scalar curvature and projective embeddings, I. J Differential Geom, 2001, 59: 479–522
21 Wang X J, Zhu X H. Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class. Adv Math, 2004, 188: 87–103
22 Berman R J. K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kähler-Einstein metrics. Invent Math, 2016, 203: 973–1025
23 Berndtsson B. A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry. Invent Math, 2015, 200: 149–200
24 Tian G, Zhu X H. Uniqueness of Kähler-Ricci solitons. Acta Math, 2000, 184: 271–305
25 Donaldson S, Sun S. Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds and algebraic geometry. Acta Math, 2014, 213: 63–106
26 Tian G. Partial C^0-estimate for Kähler-Einstein metrics. Commun Math Stat, 2013, 1: 105–113
27 Tian G. K-stability and Kähler-Einstein metrics. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1085–1156
28 Chen X, Donaldson S, Sun S. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, I; II; III. J Amer Math Soc, 2015, 28: 183–197; 199–234; 235–278
29 Donaldson S K. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. Proc Lond Math Soc (3), 1985, 50: 1–26
30 Uhlenbeck K, Yau S T. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. Comm Pure Appl Math, 1986, 39: 257–293
31 Yau S T. Open problems in geometry. In: Differential Geometry: Partial Differential Equations on Manifolds.

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 54, Part 1. Providence: Amer Math Soc, 1993, 1–28
32 Li C, Wang X W, Xu C Y. Quasi-projectivity of the moduli space of smooth Kähler-Einstein Fano manifolds. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2018, 51: 739–772
33 Li C, Wang X W, Xu C Y. On the proper moduli spaces of smoothable Kähler-Einstein Fano varieties. Duke Math J, 2019, 168: 1387–1459
34 Odaka Y. Compact moduli spaces of Kähler-Einstein Fano varieties. Publ Res Inst Math Sci, 2015, 51: 549–565
35 Spotti C, Sun S. Explicit Gromov-Hausdorff compactifications of moduli spaces of Kähler-Einstein Fano manifolds. Pure Appl Math Q, 2017, 13: 477–515
36 Blum H, Xu C. Uniqueness of K-polystable degenerations of Fano varieties. ArXiv:1812.03538, 2018
37 Xu C. A minimizing valuation is quasi-monomial. ArXiv:1907.01114, 2019
38 Alper J, Blum H, Halpern-Leistner D, et al. Reductivity of the automorphism group of K-polystable Fano varieties. ArXiv:1906.03122, 2019
39 Delcroix T. Kähler-Einstein metrics on group compactifications. Geom Funct Anal, 2017, 27: 78–129
40 Li Y, Zhou B, Zhu X H. K-energy on polarized compactifications of Lie groups. J Funct Anal, 2018, 275: 1023–1072
41 Székelyhidi G. The partial C^0-estimate along the continuity method. J Amer Math Soc, 2016, 29: 537–560
42 Datar V, Székelyhidi G. Kähler-Einstein metrics along the smooth continuity method. Geom Funct Anal, 2016, 26: 975–1010
43 Chen X, Wang B. Space of Ricci flows, II. ArXiv:1405.6797, 2014
44 Chen X, Sun S, Wang B. Kähler-Ricci flow, Kähler-Einstein metrics and K-stability. ArXiv:1508.04397, 2015
45 Bamler R H. Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature. Ann of Math (2), 2018, 188: 753–831
46 Berman R, Boucksom S, Jonsson M. A variational approach to the Yau-Tian-Donaldson conjecture. ArXiv: 1509.04561, 2015
47 Collins T, Székelyhidi G. Sasaki-Einstein metrics and K-stability. Geom Topol, 2019, 23: 1339–1413
48 Liu G, Szekelyhidi G. Gromov-Hausdorff limits of Kähler manifolds with Ricci curvature bounded below. ArXiv:1804.08567, 2018
49 Li C, Tian G, Wang F. The uniform version of Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties. ArXiv:1903.01215, 2019
50 Li C. On equivariantly uniform stability and Yau-Tian-Donaldson conjecture for singular Fano varieties. ArXiv:1907.09399, 2019
51 Aubin T. Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés Kählériennes compactes á la démonstration d'une inégalité. J Funct Anal, 1984, 57: 143–153
52 Siu Y T. The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group. Ann of Math (2), 1988, 127: 585–627
53 Cheltsov I. Log canonical thresholds of Del Pezzo surfaces. Geom Funct Anal, 2008, 11: 1118–1144
54 Demailly J, Kollár J. Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2001, 34: 525–556
55 Song J. The α-invariant on toric Fano manifolds. Amer J Math, 2005, 127: 1247–1259
56 Delcroix T. Log canonical thresholds on group compactifications. Alg Geom, 2017, 4: 203–220
57 Li Y, Zhu X H. Tian's $\alpha_{m,k}^{\hat{K}}$-invariants on group compactifications. ArXiv:1811.12021, 2018
58 Ding W Y. Remarks on the existence problem of positive Kähler-Einstein metrics. Math Ann, 1988, 282: 463–471
59 Zhu X H. Kähler-Ricci flow on a toric manifold with positive first Chern class. Differential geometry. In: Advanced Lectures in Mathematics (ALM), vol. 22. Somerville: International Press, 2012, 323–336
60 Darvas T, Rubinstein Y A. Tian's properness conjectures and Finsler geometry of the space of Kähler metrics. J Amer Math Soc, 2017, 30: 347–387
61 Tian G, Zhu X H. A nonlinear inequality of Moser-Trudinger type. Calc Var Partial Differential Equations, 2000, 10: 349–354
62 Tian G, Zhu X H. Convergence of Kähler-Ricci flow. J Amer Math Soc, 2007, 20: 675–699
63 Mabuchi T. K-energy maps integrating Futaki invariants. Tohoku Math J (2), 1986, 38: 575–593
64 Semmes S. Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds. Amer J Math, 1992, 114: 495–550
65 Donaldson S. Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics. In: Northern California Symplectic Geometry Seminar. Providence: Amer Math Soc, 2000, 13–33
66 Besse A. Einstein Manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge, Band 10. New York: Springer-Verlag, 1987
67 Tian G. Canonical Metrics on Kähler Manifolds. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Basel: Birkhäuser, 2000
68 Wang F, Zhou B, Zhu X H. Modified Futaki invariant and equivariant Riemann-Roch formula. Adv Math, 2016, 289:

1205–1235
69 Podesta F, Spiro A. Kähler-Ricci solitons on homogeneous toric bundles. J Reine Angew Math, 2010, 642: 109–127
70 Yang B. A characterization of noncompact Koiso-type solitons. Internat J Math, 2012, 23: 1250054
71 Alexeev V, Brion M. Stable reductive varieties I: Affine varieties. Invent Math, 2004, 157: 227–274
72 Alexeev V, Brion M. Stable reductive varieties II: Projective case. Adv Math, 2004, 184: 380–408
73 Alexeev V, Katzarkov L. On K-stability of reductive varieties. Geom Funct Anal, 2005, 15: 297–310
74 Delcroix T. K-stability of Fano spherical varieties. ArXiv:1608.01852, 2016
75 Futaki A. An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics. Invent Math, 1983, 73: 437–443
76 Paul S T. Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy asymptotics. Ann of Math (2), 2012, 175: 255–296
77 Boucksom S, Hisamoto T, Jonsson M. Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry. ArXiv:1603.01026, 2016
78 Paul S T. Geometric analysis of Chow mumford stability. Adv Math, 2004, 182: 333–356
79 Tian G. K-Stability Implies CM-Stability. Progress in Mathematics, vol. 310. Boston: Birkhäuser/Springer, 2017
80 Zhang S. Heights and reductions of semistable varieities. Compos Math, 1996, 104: 77–105
81 Mabuchi T. Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's geometric invariant theory. Osaka J Math, 2008, 45: 833–846
82 Donaldson S. Kähler metrics with cone singularities along a divisor. In: Essays in Mathematics and Its Applications. Heidelberg: Springer, 2012, 49–79
83 Tian G, Yau S T. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. I. J Amer Math Soc, 1990, 3: 579–609
84 Tian G, Yau S T. Complete Kähler manifolds with zero Ricci curvature. II. Invent Math, 1991, 106: 27–60
85 Berman R, Boucksom S, Eyssidieux P, et al. Kähler-Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log Fano varieties. ArXiv:1111.7158, 2011
86 Brendle S. Ricci flat Kähler metrics with edge singularities. Int Math Res Not IMRN, 2013, 2013: 5727–5766
87 Shi Y L, Zhu X H. An example of a singular metric arising from the blow-up limit in the continuity approach to Kähler-Einstein metrics. Pacific J Math, 2011, 250: 191–203
88 Jeffres T, Mazzeo R, Rubinstein Y. Kähler-Einstein metrics with edge singularities. Ann of Math (2), 2016, 183: 95–176
89 Tian G. On the existence of solutions of a class of Monge-Ampère equations. Acta Math Sin Engl Ser, 1988, 4: 250–265
90 Huang L. A $C^{2,\alpha;\beta}$ estimate for conic Monge-Ampère equation. In: Proceeding of Geometric Analysis, vol. 2. Beijing: Higher Education Press, 2019, 79–93
91 Guenancia H, Paun M. Conic singularities metrics with prescribed Ricci curvature: General cone angles along normal crossing divisors. J Differential Geom, 2016, 103: 15–57
92 Li C, Sun S. Conical Kähler-Einstein metrics revisited. Comm Math Phys, 2014, 331: 927–973
93 Tian G, Zhu X H. Properness of log F-functionals. ArXiv:1504.03197, 2015
94 Yao C. The continuity method to deform cone angle. J Geom Anal, 2016, 26: 1155–1172
95 Cheeger J, Colding T H, Tian G. On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature. Geom Funct Anal, 2002, 12: 873–914
96 Tian G, Wang B. On the structure of almost Einstein manifolds. J Amer Math Soc, 2015, 28: 1169–1209
97 Tian G. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. J Differential Geom, 1990, 32: 99–130
98 Mumford D. Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves. In: Arithmetic and Geometry. Progress in Mathematics, vol. 36. Boston: Birkhäuser, 1983, 271–328
99 Li C. Kähler-Einstein metrics and K-stability. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 2012
100 Li C. Remarks on logarithmic K-stability. Commun Contemp Math, 2015, 17: 1450020
101 Cheeger J, Colding T H. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. J Differential Geom, 1997, 46: 406–480
102 Song J, Wang X. The greatest Ricci lower bound, conical Einstein metrics and Chern number inequality. Geom Topol, 2016, 20: 49–102
103 Kołodziej S. Hölder continuity of solutions to the complex Monge-Ampère equation with the right-hand side in L^p: The case of compact Kähler manifolds. Math Ann, 2008, 342: 379–386
104 Chern S S. On holomorphic mappings of Hermitian manifolds of the same dimension. In: Entire Functions and Related Parts of Analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 11. Providence: Amer Math Soc, 1968, 157–170
105 Lu Y C. Holomorphic mappings of complex manifolds. J Differential Geom, 1968, 2: 299–312

106 Cheeger J, Jiang W, Naber A. Rectifiability of singular sets in noncollapsed spaces with Ricci curvature bounded below. ArXiv:1805.07988, 2018
107 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001

The existence problem of Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds with positive first Chern class

Xiaohua Zhu

Abstract This is an expository paper. We hope to give a picture of process on the existence of Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds with positive first Chern class in past three decades. Our main purpose is to introduce Tian's proof of Yau-Tian-Donaldson conjecture.

Keywords **Kähler-Einstein metric, Yau-Tian-Donaldson conjecture, complex Monge-Ampère equation, partial C^0-estimate**

MSC(2010) 53C25, 53C55, 58J05, 19L10

doi: 10.1360/SSM-2019-0265