投影算子组的联合谱

吴文明¹, 蒋叶聪¹, 阮颖彬², 钱文华^{1*}

1. 重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331;

2. 福建师范大学数信学院, 福州 350117

E-mail: wuw@amss.ac.cn, Yecong.J2017@163.com, yingbinruan@sohu.com, whqian86@163.com

收稿日期: 2019-04-09; 接受日期: 2019-10-30; 网络出版日期: 2020-07-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11871127, 11801050, 11671133 和 11971463)、重庆市委项目 (批准号: cstc2019jcyj-msxmX0256) 和重庆市教委科学技术研究 (批准号: KJQN2018000538) 资助项目

摘要 本文研究 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上投影算子组的联合谱. 首先通过计算给出正则投影对的联合谱, 进而给出一般的投影算子对的联合谱. 本文还对两个投影算子的和与差的可逆性给出一些等价刻画. 特别地, 当 P 和 Q 为正则投影对时, 本文通过计算算子组 $[I, P, Q]$ 的联合谱来给出 $\sigma(P+Q)$ 和 $\sigma(P-Q)$ 的具体刻画. 反过来, 本文证明两类具有特定形式的复数集分别是 Hilbert 空间上正则投影对的和与差的谱. 本文也给出一般的投影算子对的和与差的谱. 最后, 本文计算特定条件下的 3 个投影算子组 $[P, Q, R]$ 的联合谱.

关键词 投影算子组 联合谱 正则投影对

MSC (2020) 主题分类 47A10, 47C15

1 引言

假设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $B(\mathcal{H})$ 为 $\mathcal{H}$ 上全体有界线性算子所生成的代数. 设 $A \in B(\mathcal{H})$, 则其谱为 $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ 不可逆}\}$. 算子的谱能反映算子的一些基本性质, 例如, 投影算子的谱包含于 $\{0, 1\}$, 酉算子的谱包含于单位圆周. 反之, 例如, 如果某正规元的谱包含于非负实数集, 则其为正元. 特别地, 正规算子可以在其谱上做谱分解. 对于多个自伴算子组成的算子组 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, Cade 和 Yang^[1] 研究了其实线性组合 $A(z) = z_1 A_1 + z_2 A_2 + \dots + z_n A_n$, 并希望由此得到非交换算子组的函数演算. 特别地, 自伴算子组的线性组合的可逆性在偏微分方程和流体力学等领域也取得了很多应用 (参见文献 [2–4]).

假设 $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ 是 $B(\mathcal{H})$ 中的 n 元组, 经典的算子组的联合谱为

$$\sigma(A) = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n \mid c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n \text{ 在 } B(\mathcal{H}) \text{ 中不可逆}\}.$$

英文引用格式: Wu W M, Jiang Y C, Ruan Y B, et al. The joint spectrum of a tuple of projections (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 711–722, doi: 10.1360/N012019-00100

注意到当 $\mathbb{C}^n$ 中两点 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 和 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 满足 $(c_1, c_2, \dots, c_n) = \lambda(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $\lambda \neq 0$ 时, $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$ 与 $d_1 A_1 + d_2 A_2 + \dots + d_n A_n$ 具有同样的可逆性, 由此 Yang^[5] 也引入了算子组的射影谱 $p(A) = \sigma(A)/\sim$, 其中 $\sim$ 为 $\sigma(A)$ 上的等价关系满足 $(c_1, c_2, \dots, c_n) \sim (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 当且仅当 $c_i = \lambda d_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, 其中 λ 为非零复数. 可以将 $p(A)$ 看作射影空间 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的子集. 称 $p(A)$ 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中的补集为算子组 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 的射影预解集.

类似于单个算子, Yang^[5] 得到了 $p(A)$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的非空紧子集并证明了在矩阵代数 $M_k(\mathbb{C})$ 中算子组 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 的射影谱是射影超曲面. 对于紧算子组 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, Stessin 等^[6] 用多变元解析 Fredholm 理论计算了 $A(z)$ 的联合谱. Cade 和 Yang^[1] 证明了, 若 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ 是含单位元的代数 $\mathcal{B}$ 中的算子组, 则在射影预解集上 $A(z)^{-1} dA(z)$ 反映了很多射影预解集的拓扑信息. He 和 Yang^[7] 刻画了特定算子组的联合谱, 证明了含单位 Banach 代数中算子组的射影预解集是由全纯域构成的. Grigorchuk 和 Yang^[8] 给出了联合谱在群 C^* -代数中的一些应用, 得到在群代数情形下, 由群元素得到的算子组的射影谱是关于群表示的弱等价的不变量. 他们还给出了在左正则表示下, 无限群 $D_\infty = \langle a, t \mid a^2 = t^2 = 1 \rangle$ 的生成元组 $R = (I, a, t)$ 的射影谱.

对投影算子对的刻画更是在算子理论研究中具有悠久的历史. Dixmier^[9] 给出了满足特定关系的两个投影算子和的刻画, Davis^[10] 描述了何种自伴算子可以表示成两个投影算子的差. Kato^[11,12] 证明了, 当两个投影算子之差的范数小于 1 时, 它们酉等价. Halmos^[13] 给出了投影算子对的算子矩阵形式. 基于这些经典结论, 许多研究者做出了进一步的研究 (参见文献 [14–20]). 本文共分为 4 个部分, 首先根据 Halmos 所给出的投影对的算子矩阵形式, 对正则投影对的矩阵形式做了进一步简化. 并通过函数演算的原理, 得到正则投影对 P 和 Q 的联合谱为

$$\sigma([P, Q]) = \begin{cases} \mathbb{C}^2, & \text{若 } \|H\| = 1, \\ \{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\}, & \text{若 } \|H\| < 1. \end{cases}$$

并由此得到一般的投影算子对的联合谱, 其中 H 为 PQP 限制在 $P(\mathcal{H})$ 上所得的正压缩算子. 第 3 节对投影算子的和与差的可逆性给出一些等价刻画, 推广 Koliha 等^[15] 的主要结果. 当 P 和 Q 为正则投影对时, 我们计算得到算子组 $[I, P, Q]$ 的联合谱为 $\sigma([I, P, Q]) = \{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \mid (c_1 + c_2)(c_1 + c_3)I - c_2 c_3 H \text{ 不可逆}\}$. 进而我们可以得到: (1) 正则投影对的和 $P + Q$ 的谱为关于 1 对称、包含于 $[0, 2]$ 且 0 和 1 不作为其孤立点的闭集; (2) 正则投影对的差 $P - Q$ 的谱为关于 0 对称、包含于 $[-1, 1]$ 且 0 和 1 不作为其孤立点的闭集. 反之, 本文证明了, 满足上述形式的两类闭集分别是某个 Hilbert 空间上的正则投影对 P 和 Q 的和与差的谱. 最后, 本文给出满足一定条件下由 3 个投影算子所构成的算子组的联合谱.

2 两个投影算子构成的算子组的联合谱

假设 $\mathcal{H}$ 是可分的 Hilbert 空间. 本节将讨论 $\mathcal{H}$ 上两个投影 P 和 Q 的联合谱. 首先注意到当两个投影 P 和 Q 满足 $P \wedge Q = 0$ 和 $P \vee Q = I$ 时, 它们将具有如下算子矩阵形式.

引理 2.1^[21] 假设 P 和 Q 是 $\mathcal{H}$ 上的投影算子. 若 $P \wedge Q = 0, P \vee Q = I$, 则在空间 $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (I - P)\mathcal{H}$ 下有

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)}V \\ V^* \sqrt{H(I-H)} & I - V^* H V \end{pmatrix},$$

其中 H 是正的压缩算子, V 是与 $\sqrt{H(I-H)}$ 的值域投影相同的部分等距.

特别地, 针对引理 2.1 中所给出的算子矩阵形式, 有以下两条性质.

性质 2.1 在引理 2.1 所给出的条件和记号下, $(I-Q) \wedge P = 0$ 当且仅当 $\ker V^* = 0$.

证明 设 $(I-Q) \wedge P = 0$. 假设 $\ker V^* \neq 0$, 则存在非零向量

$$g \in \ker V^* = (\text{Ran } V)^\perp = (\text{Ran } \sqrt{H(I-H)})^\perp = \ker \sqrt{H(I-H)},$$

故有 $H(I-H)g = 0$. 因此, $(I-H)^2g = (I-H)g$ 且 $\sqrt{H(I-H)}g = 0$.

首先证明 $(I-H)g \neq 0$. 若 $(I-H)g = 0$, 则由

$$Q \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \in P \wedge Q,$$

与 $P \wedge Q = 0$ 矛盾. 因此, $(I-H)g \neq 0$. 而又有

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} (I-H)g \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (I-H)g \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (I-Q) \begin{pmatrix} (I-H)g \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (I-H)^2g \\ -V^*\sqrt{H(I-H)}(I-H)g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I-H)g \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{pmatrix} (I-H)g \\ 0 \end{pmatrix} \in (I-Q) \wedge P,$$

与 $(I-Q) \wedge P = 0$ 矛盾. 因此, $\ker V^* = 0$.

反之, 假设 $(I-Q) \wedge P \neq 0$, 则存在

$$0 \neq f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \in (I-Q) \wedge P.$$

根据 $Pf = f$, 易知 $h = 0$. 考虑到

$$(I-Q)f = \begin{pmatrix} I-H & -\sqrt{H(I-H)}V \\ -V^*\sqrt{H(I-H)} & V^*HV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I-H)g \\ -V^*\sqrt{H(I-H)}g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix},$$

因此, $-V^*\sqrt{H(I-H)}g = 0$. 如果 $\ker V^* = 0$, 则 $\sqrt{H(I-H)}g = 0$. 又因为

$$\ker \sqrt{H(I-H)} = (\text{Ran } \sqrt{H(I-H)})^\perp = (\text{Ran } V)^\perp = \ker V^* = 0,$$

故 $g = 0$, 这与 $f \neq 0$ 矛盾. 因此, $(I-Q) \wedge P = 0$. □

通过与性质 2.1 类似且更为简单的证明, 可以得到如下性质.

性质 2.2 在引理 2.1 所给出的条件和记号下, $(I - P) \wedge Q = 0$ 当且仅当 $\ker V = 0$.

根据 Halmos^[13] 给出的关于两个投影算子的理论, 投影算子 P 和 Q 分别具有算子矩阵形式:

$$P = \begin{pmatrix} I_1 & & & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & I_4 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I_1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & I_3 & & & \\ & & & H & \sqrt{H(I_4 - H)} & \\ & & & \sqrt{H(I_4 - H)} & I_4 - H & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

该矩阵形式所对应的空间分解为 $\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$, 其中 $H_1 = (P \wedge Q)\mathcal{H}$, $H_2 = (P \wedge (I - Q))\mathcal{H}$, $H_3 = ((I - P) \wedge Q)\mathcal{H}$, $H_6 = ((I - P) \wedge (I - Q))\mathcal{H}$ 且 P 和 Q 限制在子空间 $H_4 \oplus H_5$ 上是正则投影对. 正则投影对定义如下.

定义 2.1^[22] 令 P 和 Q 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的投影算子. 如果 $P \wedge Q = 0$, $P \vee Q = I$, $(I - P) \wedge Q = 0$, $(I - Q) \wedge P = 0$, 则称投影对 P 和 Q 为正则投影对.

我们可以看出, 当计算两个算子的联合谱时, 其难点在于它们限制在子空间 $M_4 \oplus M_5$ 上为正则投影对的部分的联合谱. 由性质 2.1 和 2.2 可知, 若 P 和 Q 是 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对, 则引理 2.1 中的 V 是一个酉算子且 $\ker H = \ker(I - H) = 0$. 令

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

则有

$$UPU^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UQU^* = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I - H)} \\ \sqrt{H(I - H)} & I - H \end{pmatrix}.$$

而显然 P 和 Q 的联合谱与 UPU^* 和 UQU^* 的联合谱相等. 因此在考虑正则投影对的联合谱时, 总假设

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I - H)} \\ \sqrt{H(I - H)} & I - H \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

其中 H 为正压缩算子且 $\ker H = \ker(I - H) = 0$.

定理 2.1 假设 P 和 Q 为 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对, 若 $\|H\| = 1$, 则 $\sigma([P, Q]) = \mathbb{C}^2$; 若 $\|H\| < 1$, 则 $\sigma([P, Q]) = \{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\}$.

证明 显然, 若 $c_1 c_2 = 0$, 则 $c_1 P + c_2 Q$ 不可逆, 故

$$\{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\} \subseteq \sigma([P, Q]).$$

以下仅需考虑 $c_1 c_2 \neq 0$ 的情形. 令 $\lambda = \frac{c_1}{c_2}$, 则可将问题归结到 $\lambda P + Q$ 的可逆性. 分以下两种情形讨论.

情形 1 $\|H\| = 1$. 因 H 是正压缩算子, 可得 $I - H$ 不可逆, 故存在一列单位向量 $\{x_n\} \subseteq (I - P)\mathcal{H}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - H)x_n = 0$. 从而, 由

$$\begin{pmatrix} \lambda I + H & \sqrt{H(I - H)} \\ \sqrt{H(I - H)} & I - H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{H(I - H)}x_n \\ (I - H)x_n \end{pmatrix} \rightarrow 0,$$

可知 $\lambda P + Q$ 不可逆. 因此, $\sigma([P, Q]) = \mathbb{C}^2$.

情形 2 $\|H\| < 1$. 此时 $I - H$ 可逆. 考虑到

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q) \begin{pmatrix} \frac{I}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \sqrt{H(I - H)^{-1}} \\ -\frac{1}{\lambda} \sqrt{H(I - H)^{-1}} & (I - H)^{-1}(I + \frac{H}{\lambda}) \end{pmatrix} &= I, \\ \begin{pmatrix} \frac{I}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \sqrt{H(I - H)^{-1}} \\ -\frac{1}{\lambda} \sqrt{H(I - H)^{-1}} & (I - H)^{-1}(I + \frac{H}{\lambda}) \end{pmatrix} (\lambda P + Q) &= I. \end{aligned}$$

故对任意非零的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda P + Q$ 可逆. 因此, $\sigma([P, Q]) = \{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\}$. $\square$

事实上, 当 $\|H\| = 1$ 时, 也可以由文献 [8, 推论 2.3] 得到上述定理中所需要的形式. 注意到上述定理说明正则投影对的联合谱为全平面或者两个坐标轴. 易见这一结论符合文献 [7] 中所给出正算子组联合谱的性质.

性质 2.3^[7] 假设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $B(\mathcal{H})$ 中的一列正元, 其中 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 令

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n\},$$

则有 $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n) = \mathbb{C}^n$ 或 $\sigma(A_1, A_2, \dots, A_n) \cap \Delta_n = \emptyset$.

根据 (2.1) 中所给出的矩阵对的算子矩阵形式, 可以由定理 2.1 直接得到如下推论.

推论 2.1 设 P 和 Q 是具有算子矩阵形式 (2.1) 的两个投影算子, 则

- (1) 若 $\|H\| = 1$, 则 $\sigma([P, Q]) = \mathbb{C}^2$;
- (2) 若 $\|H\| < 1$, $(I - P) \wedge (I - Q) \neq 0$, 则 $\sigma([P, Q]) = \mathbb{C}^2$;
- (3) 若 $\|H\| < 1$, $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $P \wedge Q = 0$, 则 $\sigma([P, Q]) = \{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\}$;
- (4) 若 $\|H\| < 1$, $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $P \wedge Q \neq 0$, 则

$$\sigma([P, Q]) = \{(c_1, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2) \mid c_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 \mid c_1 + c_2 = 0\}.$$

3 投影算子和与差的性质

文献 [15] 对有限维空间中两个投影算子的和与差的不可逆性进行了刻画并给出了一些等价条件. 结合第 2 节中的结论, 可以得到更为一般的结果.

定理 3.1 设 P 和 Q 是具有 (2.1) 中算子矩阵形式的两个投影算子, 则以下条件等价:

- (1) $P - Q$ 可逆;
- (2) $I - PQ$ 和 $P + Q$ 可逆;
- (3) $\|H\| < 1$ 且 $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $P \wedge Q = 0$.

证明 注意到

$$P - Q = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & I_2 & & & \\ & & -I_3 & & \\ & & & I_4 - H & -\sqrt{H(I_4 - H)} \\ & & & -\sqrt{H(I_4 - H)} & -I_4 + H \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

因此易见条件 (1) 与 (3) 等价. 另一方面,

$$P + Q = \begin{pmatrix} 2I_1 & & & & \\ & I_2 & & & \\ & & I_3 & & \\ & & & I_4 + H & \sqrt{H(I_4 - H)} \\ & & & \sqrt{H(I_4 - H)} & I_4 - H \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

故 $P + Q$ 可逆当且仅当 $\|H\| < 1$ 且 $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$. 又因为

$$I - PQ = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & I_2 & & & \\ & & I_3 & & \\ & & & I_4 - H - \sqrt{H(I_4 - H)} & \\ & & & 0 & I_4 \\ & & & & & I_6 \end{pmatrix},$$

所以, $I - PQ$ 可逆当且仅当 $\|H\| < 1$ 且 $P \wedge Q = 0$. 因此, 条件 (2) 与 (3) 等价. $\square$

定理 3.2 设 P 和 Q 是具有 (2.1) 中算子矩阵形式的两个投影算子, 则以下条件等价:

- (1) $PQ - QP$ 可逆;
- (2) $P - Q$ 和 $I - P - Q$ 可逆;
- (3) $H(I_4 - H)$ 可逆且 $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $(I - P) \wedge Q = 0$, $P \wedge (I - Q) = 0$, $P \wedge Q = 0$.

证明 注意到

$$PQ - QP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \sqrt{H(I_4 - H)} \\ & & & -\sqrt{H(I_4 - H)} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

故 $PQ - QP$ 可逆当且仅当 $H(I_4 - H)$ 可逆且 $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $(I - P) \wedge Q = 0$, $P \wedge (I - Q) = 0$, $P \wedge Q = 0$.

因为 $PQ - QP = (I - P - Q)(P - Q)$, 所以, 若 $P - Q$ 和 $I - P - Q$ 可逆, 则 $PQ - QP$ 可逆. 反之, 若 $PQ - QP$ 可逆, 则由条件 (1) 与 (3) 等价及推论 3.1 可知 $P - Q$ 可逆, 从而 $I - P - Q$ 也可逆. 因此, 条件 (2) 与 (3) 等价, 推论得证. $\square$

与定理 3.2 的证明类似, 可以得到如下结论.

定理 3.3 设 P 和 Q 是具有 (2.1) 中算子矩阵形式的两个投影算子, 则以下条件等价:

- (1) $PQ + QP$ 可逆;
- (2) $P + Q$ 和 $I - P - Q$ 可逆;
- (3) $H(I_4 - H)$ 可逆且 $(I - P) \wedge (I - Q) = 0$, $(I - P) \wedge Q = 0$, $P \wedge (I - Q) = 0$.

两个投影算子的和与差的谱一直都吸引着很多研究者的关注. 与第 2 节中的讨论类似, 其核心部分在于考虑正则投影对的和与差的谱. 假设 P 和 Q 是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对, 计算 $P + Q$ 和 $P - Q$ 的谱即为判断 I 、 P 和 Q 的线性组合 $\lambda I - P - Q$ 和 $\lambda I - P + Q$ 的可逆性. 更为一般化地, 首先讨论 I 、 P 和 Q 的联合谱.

定理 3.4 假设 P 和 Q 为 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对且

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix},$$

则 $\sigma([I, P, Q]) = \{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \mid (c_1 + c_2)(c_1 + c_3)I - c_2c_3H \text{ 不可逆}\}.$

证明 考虑 $c_1I + c_2P + c_3Q$ 的可逆性. 易见, 若 $c_3 = 0$, 则 $c_1I + c_2P$ 不可逆当且仅当 $c_1 = 0$ 或 $c_1 + c_2 = 0$.

以下考虑 $c_3 \neq 0$ 的情形. 此时 $c_1I + c_2P + c_3Q$ 可逆当且仅当 $\lambda_1I + \lambda_2P + Q$ 可逆, 其中 $\lambda_1 = \frac{c_1}{c_3}$, $\lambda_2 = \frac{c_2}{c_3}$. 记

$$T = \lambda_1I + \lambda_2P + Q = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)I + H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & (\lambda_1 + 1)I - H \end{pmatrix}.$$

令

$$R = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + 1)I - H & -\sqrt{H(I-H)} \\ -\sqrt{H(I-H)} & (\lambda_1 + \lambda_2)I + H \end{pmatrix},$$

则

$$RT = TR = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2H & 0 \\ 0 & (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2H \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

显然, 若 $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2H$ 可逆, 则 T 可逆. 另一方面, 若 $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2H$ 不可逆, 注意到这是一个正规元, 则存在一列单位向量 $\{x_n\} \subseteq P\mathcal{H}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2H)x_n = 0. \quad (3.2)$$

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 I + \lambda_2 P + Q) \begin{pmatrix} ((\lambda_1 + 1)I - H)x_n \\ (-\sqrt{H(I-H)})x_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} ((\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2 H)x_n \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

故若 $\lambda_1 I + \lambda_2 P + Q$ 可逆, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} ((\lambda_1 + 1)I - H)x_n = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_2(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2 H)x_n = 0. \quad (3.3)$$

因此, 若 $\lambda_1 I + \lambda_2 P + Q$ 可逆, 则由 (3.2) 和 (3.3) 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(\lambda_1 + 1)x_n = 0$. 因为 x_n 是单位向量, 所以 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_1 = -1$. 此时 $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)I - \lambda_2 H$ 规约到 $I - H$ 不可逆或 H 不可逆, 应用定理 2.1 的结论可以得到相应的 $\lambda_1 I + \lambda_2 P + Q$ 不可逆. 综上可得, 当 $c_3 \neq 0$ 时, $c_1 I + c_2 P + c_3 Q$ 不可逆当且仅当 $(c_1 + c_2)(c_1 + c_3)I - c_2 c_3 H$ 不可逆. 而 $(c_1, -c_1, 0)$ 和 $(0, c_2, 0)$ 显然满足 $(c_1 + c_2)(c_1 + c_3)I - c_2 c_3 H$ 不可逆. 因此,

$$\sigma([I, P, Q]) = \{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{C}^3 \mid (c_1 + c_2)(c_1 + c_3)I - c_2 c_3 H \text{ 不可逆}\}.$$

特别地, 我们可以应用上述定理计算正则投影对的和与差的谱. □

推论 3.1 假设 P 和 Q 是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对, 则

$$\sigma(P + Q) = \{\lambda \mid (\lambda - 1)^2 \in \sigma(H)\}, \quad \sigma(P - Q) = \{\lambda \mid 1 - \lambda^2 \in \sigma(H)\}.$$

注 3.1 因为 H 是正压缩算子, $\sigma(H) \subseteq [0, 1]$, 故 $\sigma(P + Q) \subseteq [0, 2]$ 且关于 1 对称. 而又因 $\ker H = \ker(I - H) = 0$, 故 0 和 1 不是 $\sigma(H)$ 的孤立点, 因此, 0 和 1 不是 $\sigma(P + Q)$ 的孤立点. 类似地可以得出 $\sigma(P - Q) \subseteq [-1, 1]$, 关于 0 对称且 0 和 1 不是 $\sigma(P - Q)$ 的孤立点. 反之, 分别满足上述条件的两类闭集分别是某 Hilbert 空间上的正则投影对的和与差的谱.

定理 3.5 对任意给定的闭集 $C \subseteq [0, 2]$, 若 C 关于 1 对称且 0 和 1 不是 C 的孤立点, 则存在某个 Hilbert 空间上的正则投影对 P 和 Q 使得 $\sigma(P + Q) = C$. 对任意给出的闭集 $C_1 \subseteq [-1, 1]$, 若 C_1 关于 0 对称且 0 和 1 不是 C_1 的孤立点, 则存在某个 Hilbert 空间上的正则投影对 P 和 Q 使得 $\sigma(P - Q) = C_1$.

证明 取 $B = C \cap ((0, 1) \cup (1, 2))$. 对任意的 $r \in B$, 令 $\mathcal{H}_r = \mathbb{C}^2$. 取 $\mathcal{H} = \bigoplus_{r \in B} \mathcal{H}_r$.

令 $s_r = (r - 1)^2, \forall r \in B$. 取

$$P_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_r = \begin{pmatrix} s_r & \sqrt{s_r(1-s_r)} \\ \sqrt{s_r(1-s_r)} & 1-s_r \end{pmatrix}.$$

再令 $P = \bigoplus_{r \in B} P_r, Q = \bigoplus_{r \in B} Q_r$. 容易验证 P 和 Q 是 $\mathcal{H}$ 上的正则投影对且

$$P + Q = \bigoplus_{r \in B} (P_r + Q_r) = \bigoplus_{r \in B} \begin{pmatrix} 1+s_r & \sqrt{s_r(1-s_r)} \\ \sqrt{s_r(1-s_r)} & 1-s_r \end{pmatrix}.$$

易见所构造的 P 和 Q 所对应的正压缩算子 H 的谱为 $\overline{\{s_r : r \in B\}}$. 因此可得 $P + Q$ 的谱为 C .

对满足定理条件的 C_1 构造正则投影对使得其差的谱为 C_1 与上述证明完全类似. □

结合 (2.1) 中两个投影的算子矩阵形式, 可以给出一般情形的两个投影的和与差的谱的形式.

推论 3.2 设 P 和 Q 是具有算子矩阵形式 (2.1) 的两个投影算子, 则

$$\sigma(P+Q) = \{\lambda \mid (\lambda-1)^2 \in \sigma(H)\} \cup B, \quad \sigma(P-Q) = \{\lambda \mid 1-\lambda^2 \in \sigma(H)\} \cup C,$$

其中 $B \subseteq \{0, 1, 2\}$, $C \subseteq \{-1, 0, 1\}$ 并且满足

(1) $2 \in B$ 当且仅当 $P \wedge Q \neq 0$, $1 \in B$ 当且仅当 $(P \wedge (1-Q)) \vee ((1-P) \wedge Q) \neq 0$, $0 \in B$ 当且仅当 $(1-P) \wedge (1-Q) \neq 0$;

(2) $1 \in C$ 当且仅当 $P \wedge (1-Q) \neq 0$, $0 \in C$ 当且仅当 $(P \wedge Q) \vee ((1-P) \wedge (1-Q)) \neq 0$, $-1 \in B$ 当且仅当 $(1-P) \wedge Q \neq 0$.

4 三个投影算子的联合谱

通常情形下, 想要直接计算出由一般的 3 个投影算子所构成的算子组的联合谱并不容易. 因为很多代数都可由 3 个投影生成, 所以, 3 个投影之间的关系可以非常复杂. 特别地, II_1 型因子中 3 个自由的迹 $\frac{1}{2}$ 的投影组的联合谱仍然悬而未决. 本节主要讨论满足特定性质的 3 个投影的联合谱. 假设 $\mathcal{H}_0$ 为可分 Hilbert 空间. 取 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0$. 令 P 是 $\mathcal{H}$ 到闭子空间

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \mid f \in \mathcal{H}_0 \right\}$$

上的投影算子, Q 是 $\mathcal{H}$ 到闭子空间

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} \mid f \in \mathcal{H}_0 \right\}$$

上的投影算子, 而由投影算子 R 所决定得到自伴酉算子 $V = 2R - I$ 满足 $V^*PV = Q$, $V^*QV = P$. 本节将主要讨论 $[P, Q, R]$ 的联合谱 $\sigma([P, Q, R])$.

在上述条件下, P 和 Q 分别可以写成

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}.$$

在给出投影算子组 $[P, Q, R]$ 的联合谱之前, 先计算由 R 确定的自伴酉算子 V 的算子矩阵形式.

引理 4.1 设

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}.$$

若自伴酉算子 V 满足 $PV = VQ$, $QV = VP$, 则

$$V = \begin{pmatrix} U & U \\ U & -U \end{pmatrix},$$

其中算子 U 满足 $U^* = U$ 并且 $U^2 = \frac{1}{2}I$.

证明 令

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$PV = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad VQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_{11} + V_{12} & V_{11} + V_{12} \\ V_{21} + V_{22} & V_{21} + V_{22} \end{pmatrix}.$$

根据 $PV = VQ$ 可得

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{11} \\ V_{21} & -V_{21} \end{pmatrix}.$$

类似地, 比较 $QV = VP$ 及 QV 与 VP 的矩阵形式可得 $V_{11} = V_{21}$. 取 $U = V_{11}$, 则

$$V = \begin{pmatrix} U & U \\ U & -U \end{pmatrix}.$$

而 V 是自伴的西算子, 简单的计算可得 $U = U^*$ 且 $U^2 = \frac{1}{2}I$. □

利用 V 的算子矩阵形式, 易得投影算子 R 的算子矩阵形式

$$R = \frac{1}{2}(I + V) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + U & U \\ U & I - U \end{pmatrix}.$$

接下来计算投影算子组 $[P, Q, R]$ 的联合谱.

定理 4.1 设

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix},$$

R 都是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0$ 上的投影算子. 令 $V = 2R - I$. 若 V 满足 $PV = VQ, QV = VP$, 则 P, Q 和 R 的联合谱 $\sigma([P, Q, R]) = \{(c_1, 0, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2, 0) \mid c_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{(c_1, c_2, c_3) \mid c_1 + c_2 \neq 0, c_3 \neq 0 \text{ 且 } \frac{c_1 c_2 + (c_1 + c_2) c_3}{(c_1 + c_2) c_3} \in \sigma(U)\}$, 其中 U 为引理 4.1 中的 U .

证明 考虑 $c_1 P + c_2 Q + c_3 R$ 的可逆性. 当 $c_3 = 0$ 时,

$$c_1 P + c_2 Q = \begin{pmatrix} (c_1 + \frac{c_2}{2})I & \frac{c_2}{2}I \\ \frac{c_2}{2}I & \frac{c_2}{2}I \end{pmatrix}$$

可逆当且仅当 $c_1 c_2 \neq 0$.

以下假设 $c_3 \neq 0$, 则 $c_1 P + c_2 Q + c_3 R$ 等价于 $\lambda_1 P + 2\lambda_2 Q + 2R$ 可逆, 其中 $\lambda_1 = \frac{2c_1}{c_3}, \lambda_2 = \frac{c_2}{c_3}$. 故只需讨论

$$T = \lambda_1 P + 2\lambda_2 Q + 2R = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)I + U & \lambda_2 I + U \\ \lambda_2 I + U & (\lambda_2 + 1)I - U \end{pmatrix}$$

的可逆性. 令

$$S = \begin{pmatrix} (\lambda_2 + 1)I - U & -\lambda_2 I - U \\ -\lambda_2 I - U & (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)I + U \end{pmatrix},$$

则

$$ST = TS = \begin{pmatrix} (\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_1)I - (\lambda_1 + 2\lambda_2)U & 0 \\ 0 & (\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_1)I - (\lambda_1 + 2\lambda_2)U \end{pmatrix}.$$

通过类似于定理 3.4 中的讨论可以得到, T 不可逆等价于 $(\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_1)I - (\lambda_1 + 2\lambda_2)U$ 不可逆.

若 $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, 则可得 T 不可逆等价于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 否则 T 不可逆等价于

$$\frac{\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \in \sigma(U).$$

综上所述, 可得

$$\begin{aligned} \sigma([P, Q, R]) = & \{(c_1, 0, 0) \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, c_2, 0) \mid c_2 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, 0, c_3) \mid c_3 \in \mathbb{C}\} \\ & \cup \left\{ (c_1, c_2, c_3) \mid c_1 + c_2 \neq 0, c_3 \neq 0 \text{ 且 } \frac{c_1c_2 + (c_1 + c_2)c_3}{(c_1 + c_2)c_3} \in \sigma(U) \right\}. \end{aligned}$$

证毕. □

注 4.1 注意到上述证明中, $U = U^*$ 且 $U^2 = I$, 可以得到 $\sigma(U) \subseteq \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

致谢 感谢审稿专家的仔细阅读并提出宝贵的意见, 根据审稿专家的建议, 我们对本文做了适当的补充和修改, 从中获益良多.

参考文献

- 1 Cade P, Yang R. Projective spectrum and cyclic cohomology. *J Funct Anal*, 2013, 265: 1916–1933
- 2 Atkinson F V. *Multiparameter Eigenvalue Problems*. New York-London: Academic Press, 1972
- 3 Jarlebring E, Hochstenbach M E. Polynomial two-parameter eigenvalue problems and matrix pencil methods for stability of delay-differential equations. *Linear Algebra Appl*, 2009, 431: 369–380
- 4 Sleeman B D. *Multiparameter Spectral Theory in Hilbert Space*. Research Notes in Mathematics, vol. 22. London: Pitman, 1978
- 5 Yang R. Projective spectrum in Banach algebras. *J Topol Anal*, 2009, 1: 289–306
- 6 Stessin M, Yang R, Zhu K. Analyticity of a joint spectrum and a multivariable analytic Fredholm theorem. *New York J Math*, 2011, 17: 39–44
- 7 He W, Yang R W. Projective spectrum and kernel bundle. *Sci China Math*, 2015, 58: 2363–2372
- 8 Grigorchuk R, Yang R. Joint spectrum and the infinite dihedral group. *Proc Steklov Inst Math*, 2017, 297: 145–178
- 9 Dixmier J. Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert. *Rev Sci*, 1948, 86: 387–399
- 10 Davis C. Separation of two linear subspaces. *Acta Sci Math (Szeged)*, 1958, 19: 172–187
- 11 Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. New York: Springer-Verlag, 1966
- 12 Kato T. *Notes on Projections and Perturbation Theory*. New York: Academic Press, 1966
- 13 Halmos P R. Two subspaces. *Trans Amer Math Soc*, 1969, 114: 381–389
- 14 Amrein W O, Sinha K B. On pairs of projections in a Hilbert space. *Linear Algebra Appl*, 1994, 208: 425–435
- 15 Koliha J J, Rakočević V, Straškraba I. The difference and sum of projectors. *Linear Algebra Appl*, 2004, 388: 279–288
- 16 Koliha J J, Rakočević V. Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space. *Integral Equations Operator Theory*, 2005, 52: 125–134
- 17 Andruchow E. Pairs of projections: Geodesics, Fredholm and compact pairs. *Complex Anal Oper Theory*, 2014, 8: 1435–1453
- 18 Andruchow E. Operators which are the difference of two projections. *J Math Anal Appl*, 2014, 420: 1634–1653
- 19 Shi W, Ji G, Du H. Pairs of orthogonal projections with a fixed difference. *Linear Algebra Appl*, 2016, 489: 288–297
- 20 Cui M, Ji G. Pencils of pairs of projections. *Studia Math*, 2019, 249: 117–141
- 21 Dong A, Wu W, Yuan W. On small subspace lattices in Hilbert space. *J Aust Math Soc*, 2014, 96: 44–60
- 22 Yao X Y, Du H K. Product of two orthogonal projections in a Hilbert space H (in Chinese). *Acta Math Sci Ser A Chin Ed*, 2007, 27: 696–701 [姚喜妍, 杜鸿科. Hilbert 空间上两个正交射影的乘积. *数学物理学报*, 2007, 27: 696–701]

The joint spectrum of a tuple of projections

Wenming Wu, Yecong Jiang, Yingbin Ruan & Wenhua Qian

Abstract We study the joint spectrum of projections in a Hilbert space, and calculate the joint spectrum of a pair of projections. In particular, by calculating the joint spectrum for a tuple $[I, P, Q]$ in which I is the identity and P, Q is a regular pair of projections, we get specific characterizations of the spectrums of $P + Q$ and $P - Q$, respectively. Conversely, we prove that two closed subsets of $\mathbb{C}$ in particular forms are respectively the spectrums of the sum and the difference of a regular pair of projections. We also calculate the joint spectrum of a 3-tuple of projections $[P, Q, R]$ for P, Q and R satisfying some specific conditions.

Keywords tuple of projections, joint spectrum, regular pair of projections

MSC(2020) 47A10, 47C15

doi: 10.1360/N012019-00100