



一类 Manakov 方程组的几何刻画

献给沈一兵教授 85 寿辰

丁青^{1,2*}, 钟世萍³, 马定²

1. 温州大学数理学院, 温州 325035;

2. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

3. 赣南师范大学数学与计算机科学学院, 赣州 341000

E-mail: qding@fudan.edu.cn, zhongshiping@gnu.edu.cn, 20210180074@fudan.edu.cn

收稿日期: 2023-04-03; 接受日期: 2023-05-24; 网络出版日期: 2023-11-13; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071080 和 12141104)、江西省自然科学基金 (批准号: 20212BAB211005) 和江西省教育厅科学技术研究 (批准号: GJJ2201202) 资助项目

摘要 众所周知, 矩阵非线性 Schrödinger 方程规范等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到 Grassmann 流形的 Schrödinger 流方程. 本文证明, 在物理学中同样有重要应用的一类可积 Manakov 方程组中的混合型方程组规范等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到伪复射影空间 $\tilde{G}_{2,1} = U(2,1)/U(1,1) \times U(1)$ 的 Schrödinger 流方程. 从而, 结合已有的结果, 得到 Manakov 方程组中的三类可积方程组可由 Schrödinger 流给出的统一的几何刻画, 为后续关于一般的 Manakov 方程组的几何研究打下基础.

关键词 Manakov 方程组 轨道空间 Schrödinger 流

MSC (2020) 主题分类 53C30, 53E30, 35Q55, 37K25, 35Q60

1 引言

在微分几何的研究中, 人们引入了各种各样的几何流, 如热流、Ricci 流和平均曲率流等, 这些几何流被成功地用于许多重要问题的研究, 同时加深了人们对于几何及其相关问题的深刻认识. 本文集中于探讨 Schrödinger 流^[10, 14, 19]或 Schrödinger 映照^[6, 29, 32]这一几何流对于来自物理学中重要的偏微分方程的几何刻画.

众所周知, 当目标流形具有复结构时, 人们可以引入 Schrödinger 流或 Schrödinger 映照的几何概念, 即为能量泛函的 Hamilton 梯度流. 可以验证 Da Rios 方程 (即 $\mathbb{R}^3$ 中沿副法线运动的空间曲线演化方程^[9]) 或与其等价的 Heisenberg 方程, 恰是从 $\mathbb{R}^1$ 到单位球面 $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 的 Schrödinger 流方程^[19, 23], 它也规范等价于聚焦 (focusing) 型的非线性 Schrödinger 方程:

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0.$$

英文引用格式: Ding Q, Zhong S P, Ma D. A geometric characterization of a kind of Manakov systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1509–1520, doi: 10.1360/SSM-2023-0067

Ding^[10] 证明了从 $\mathbb{R}^1$ 到双曲平面 $\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ 的 Schrödinger 流方程规范等价于 defocusing 型的非线性 Schrödinger 方程 $i\varphi_t + \varphi_{xx} - 2|\varphi|^2\varphi = 0$. Terng 和 Uhlenbeck^[32] 证明了矩阵非线性 Schrödinger 方程^[20] $iU_t + U_{xx} + 2UU^*U = 0$ 规范等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到紧致 Grassmann 流形 $G_{n,k}$ 的 Schrödinger 流方程, 其中, U 是 $k \times n$ 复矩阵, U^* 表示 U 的共轭转置. 当目标流形具有仿复结构 (para-complex structure) 时 (参见文献 [3,8]), 文献 [11] 引入了相应的 Schrödinger 流的几何概念, 并由此利用 Schrödinger 流得到了第二 AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) 系列 (参见文献 [1]) 中出现的 3 个可积方程的统一的几何刻画, 其中这 3 个方程的前两个方程便是 focusing 型和 defocusing 型的非线性 Schrödinger 方程 (本文中, 一个方程称之为可积的, 是指其具有含谱参数的零曲率表示). 文献 [7] 的作者利用文献 [11] 的思想方法, 证明了第二矩阵 AKNS 系列中的 3 类矩阵可积方程分别等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到 3 类 (紧致、非紧和仿) Grassmann 流形的 Schrödinger 流方程, 其中关于第一类矩阵方程的结果就是 Terng 和 Uhlenbeck 的结论. Chang 等^[6] 刻画了从 $\mathbb{R}^1$ 到一般的 Riemann 面的 Schrödinger 流方程; Ding 和 Zhong^[16] 利用 $\mathbb{C}^3$ 上全纯微分几何的理论给出了耦合的非线性 Schrödinger 方程的几何刻画; Ding 和 Zhong^[15] 提出了涵盖 Da Rios 方程的沿 G_2 副法线运动的曲线演化方程, 并证明此方程实际上是从 $\mathbb{R}^1$ 到 6- 球面 $S^6 \hookrightarrow \mathbb{R}^7$ 的 Schrödinger 流方程, 其中 S^6 上赋予标准的 Kirchhoff 近复结构. 这些思想对我们引入双 Schrödinger 流并用于 Fukumoto-Moffatt 模型方程 (参见文献 [21,22]) 的几何刻画及其推广起着重要的作用 (参见文献 [12–14,17]).

如下 Manakov 方程组 (参见文献 [25,27,31]) 有时也称为 2- 分量的非线性 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} i\varphi_{1t} + \varphi_{1xx} + (b_1|\varphi_1|^2 + b_2|\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ i\varphi_{2t} + \varphi_{2xx} + (c_1|\varphi_1|^2 + c_2|\varphi_2|^2)\varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, φ_1 和 φ_2 为未知复值函数, b_1 、 b_2 、 c_1 和 c_2 为非零实参数. 具有 4 个自由参数的方程组 (1.1) 相对来说是复杂的, 甚至在一般参数下更是不可积的. 尽管如此, 文献 [25] 构造了方程组 (1.1) 的许多显式的解. 若 φ 是非线性 Schrödinger 方程 $i\varphi_t + \varphi_{xx} + a_2|\varphi|^2\varphi = 0$ (a_2 是实参数) 的一个解, 则

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi, \sigma\varphi)$$

是方程组 (1.1) 的解 (σ 是复常数), 其中 $a_2 = c_1 + c_2|\sigma|^2$, $b_1 = c_1 + (c_2 - b_2)|\sigma|^2$, 此外方程 (1.1) 的依赖于 t - 及 x - 的“行波解”为

$$\varphi_1 = A_0 e^{i[A_1(t-t_0)+A_2(x-x_0)+\phi_1]}, \quad \varphi_2 = B_0 e^{i[B_1(t-t_0)+B_2(x-x_0)+\phi_2]},$$

其中, $A_1 = -A_2^2 + A_0^2 b_1 + B_0^2 b_2$, $B_1 = -B_2^2 + A_0^2 c_1 + B_0^2 c_2$, A_0 、 B_0 、 A_2 、 B_2 、 t_0 、 x_0 、 ϕ_1 和 ϕ_2 是任意实参数. 方程组 (1.1) 还有 tanh-sech 孤子解及含 Weierstrass 椭圆函数的代数几何解等 (参见文献 [25, 第 7 章]). 由此可见, 人们对于方程组 (1.1) 的分析性质有了深入的了解, 然而相比于分析性质, 人们对于方程组 (1.1) 的几何性质的了解是不充分的. 显然在适当选取参数或参数规范化之后, 方程 (1.1) 包含如下 3 类可积的 Manakov 方程组:

$$\begin{cases} i\varphi_{1t} + \varphi_{1xx} + 2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ i\varphi_{2t} + \varphi_{2xx} + 2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} i\varphi_{1t} + \varphi_{1xx} - 2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ i\varphi_{2t} + \varphi_{2xx} - 2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

和

$$\begin{cases} i\varphi_{1t} + \varphi_{1xx} \pm 2(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ i\varphi_{2t} + \varphi_{2xx} \pm 2(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

在文献中, 方程 (1.2) 称为 focusing 型的 Manakov 方程组, 方程 (1.3) 称为 defocusing 的 Manakov 方程组, 而方程 (1.4) 称为混合型 (mixed type) 的 Manakov 方程组. 虽然 (1.4) 形式上含有两个方程组, 但可由 $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto (\varphi_2, \varphi_1)$ 归并为一个方程组

$$\begin{cases} i\varphi_{1t} + \varphi_{1xx} + 2(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ i\varphi_{2t} + \varphi_{2xx} + 2(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

方程组 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 在非线性光学、超流、Bose-Einstein 凝聚态和等离子物理等中有重要应用 (参见文献 [2, 5, 30, 33–35]), 我们要指出的是方程组 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 在刻画一般的 Manakov 方程组 (1.1) 的几何性质时也是极其重要的 (参见文献 [18]). 若令 $U = (\varphi_1, \varphi_2)$, 则方程 (1.2) 和 (1.3) 能写成 2- 向量值非线性 Schrödinger 方程的形式:

$$iU_t + U_{xx} \pm 2UU^*U = 0.$$

从而 (1.2) 和 (1.3) 分别能几何解释为从 $\mathbb{R}^1$ 到 Grassmann 流形 (实际为复射影空间) $G_{2,1}$ (紧致) 或 $\widehat{G}_{2,1}$ (非紧) 的 Schrödinger 流方程 (参见文献 [7, 32]). 但是, 同样是可积的方程, 方程 (1.5) 却不能直接写成一个类似上述的 2- 向量值非线性 Schrödinger 方程. 一个自然的问题是, 方程 (1.5) 是否也具有类似的几何刻画?

本文旨在利用 Schrödinger 流给出方程 (1.5) 的一个几何刻画, 或者按文献 [26] 中的说法给出方程 (1.5) 的一个几何实现 (geometric realization). 由于篇幅所限, 一般的 Manakov 方程组的几何实现另文再行讨论. 这里显见, 原来用于刻画方程 (1.2) 和 (1.3) 的射影空间已经不再适用, 我们需要寻找其他合适的目标流形, 这使得我们联想到齐性空间. 齐性空间不仅涵盖了对称空间, 而且比对称空间更加一般. 可是我们找到的合适的轨道空间却是一个伪 Kähler (pseudo-Kähler) 的齐性对称 (射影) 空间, 从而得到了方程 (1.5) 的几何刻画, 并结合已知的结果, 得到了方程组 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 由 Schrödinger 流所给出的统一的几何刻画. 需要指出的是这里统一的几何刻画对于一般的 Manakov 方程组 (1.1) 的几何研究将起着十分重要的作用 (参见文献 [18]).

本文余下内容的安排如下. 第 2 节给出对称 Lie 代数的一些基本知识, 并描述我们需要的轨道流形及其相应的复结构. 第 3 节显式刻画到伪对称 (射影) 空间的 Schrödinger 流方程. 第 4 节证明第 3 节中得到的 Schrödinger 流方程等价于方程 (1.5), 从而得到其几何刻画, 最后给出一些注解.

2 预备知识和伪复射影空间

对于给定的 Lie 群 G 及其闭子群 K , 所有 K 在 G 中的左陪集组成的集合 $G/K = \{gK : g \in G\}$ 上存在 (光滑) 流形结构, 并且 G 在 G/K 上有一个自然方式的平滑作用, 使得作用是传递的 (即 G/K 中的任何两点由 G 的作用连接起来). 如果 (光滑) 流形 M 有一个 Lie 群 G 的作用, 且作用是传递的, 取 M 中的一点 p , 令 $K = G_p$ 为 p 点处的迷向子群 (即 $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$), 而 p 点处的轨道是指

集合 $G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}$, 则子群 K 是 G 的闭子群, 并且由 $j(gK) = g \cdot p$ 给出的映照 $j : G/K \rightarrow M$ 是微分同胚 (参见文献 [4, 第四章] 及其参考文献), 即有 $M \cong G/K$.

现在利用 Lie 群和 Lie 代数来构造我们所要寻找的轨道空间. 设 G 是 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数, 这里要求 $\mathfrak{g}$ 是一个对称 Lie 代数, 即 $\mathfrak{g}$ 能分解为两个向量空间的直和: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, 并满足对称条件: $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ 和 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ (参见文献 [20, 24]). 此外在这样的一个对称 Lie 代数上, 还要求在 $\mathfrak{k}$ 中存在一个元素 σ_3 使得 $\mathfrak{k} = \text{Kernel}(ad_{\sigma_3}) = \{\chi \in \mathfrak{g} \mid [\chi, \sigma_3] = 0\}$.

下面集中在伪酉群 $U(2, 1)$ 及其 Lie 代数 $u(2, 1)$ 上, 其中 $U(2, 1)$ 是保持 $\mathbb{C}^3$ 上的度量 $ds^2 = |dz_1|^2 + |dz_2|^2 - |dz_3|^2$ 不变的线性变换的全体所组成的 Lie 群. 令

$$\sigma_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

则直接验证可得 $u(2, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 是直和分解, 其中

$$\mathfrak{k} = \text{Kernel}(ad_{\sigma_3}) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & \alpha \\ 0 & \bar{\alpha} & ic \end{pmatrix} \in u(2, 1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C} \right\},$$

这里 $\bar{\alpha}$ 是复数 α 的共轭复数;

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \psi & \varphi \\ -\bar{\psi} & 0 & 0 \\ \bar{\varphi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in u(2, 1) \mid \psi, \varphi \in \mathbb{C} \right\}. \quad (*)$$

引理 2.1 利用上述记号, 轨道空间

$$\tilde{G}_{2,1} = \{E^{-1}\sigma_3 E \mid \forall E \in U(2, 1)\} = U(2, 1)/U(1, 1) \times U(1) \quad (2.2)$$

是对称 (射影) 空间.

证明 首先, 定义 Lie 群 $U(2, 1)$ 在 $\tilde{G}_{2,1}$ 上的左作用 Φ 如下:

$$\Phi : U(2, 1) \times \tilde{G}_{2,1} \rightarrow \tilde{G}_{2,1}, \quad (X, \gamma) \mapsto \Phi(X, \gamma) = X \circ \gamma = X\gamma X^{-1}.$$

显然, 有

$$\begin{aligned} I_3 \circ \gamma &= \gamma, \quad \forall \gamma \in \tilde{G}_{2,1} \quad (I_{3 \times 3} \text{ 为 } 3\text{-阶单位阵}), \\ (XY) \circ \gamma &= (XY)\gamma(XY)^{-1} = X \circ (Y \circ \gamma), \quad \forall X, Y \in U(2, 1), \end{aligned}$$

并且该作用也是传递的, 这是因为任意给定两点 $\gamma_1 = E_1^{-1}\sigma_3 E_1$ 和 $\gamma_2 = E_2^{-1}\sigma_3 E_2 \in \tilde{G}_{2,1}$, 则取 $X = E_2^{-1}E_1 \in U(2, 1)$, 可以使得

$$X \circ \gamma_1 = E_2^{-1}E_1\gamma_1(E_2^{-1}E_1)^{-1} = E_2^{-1}\sigma_3 E_2 = \gamma_2.$$

进一步地, 在点 $\sigma_3 \in \tilde{G}_n$ 上的迷向子群是

$$G_{\sigma_3} = \{X \in U(2, 1) \mid X \circ \sigma_3 = \sigma_3\} = \{X \in U(2, 1) \mid X\sigma_3 = \sigma_3 X\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} e^{ib} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in U(2, 1) \right\}, \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in U(1, 1), \quad b \in \mathbb{R}.$$

记 $K = G_{\sigma_3}$, 显然 $K = U(1, 1) \times U(1)$, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{k}$.

可以直接验证 Lie 代数 $u(2, 1)$ 有分解 $u(2, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, 其中 $\mathfrak{m}$ 如 (*) 所示, 并满足如下对称条件:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}.$$

因此 $u(2, 1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ 是对称 Lie 代数. 从而齐性轨道空间 $\tilde{G}_{2,1} = U(2, 1)/U(1, 1) \times U(1)$ 是一个对称 (射影) 空间 (参见文献 [4, 命题 4.2]). $\square$

接下来证明在 $\tilde{G}_{2,1}$ 上存在自然的复结构且是 Kähler 的.

引理 2.2 $\tilde{G}_{2,1}$ 上存在自然的复结构并且是伪 Kähler 流形.

证明 首先, 对于任意的 $\gamma = E^{-1}\sigma_3 E \in \tilde{G}_{2,1}$, γ 处的切空间为

$$T_\gamma \tilde{G}_{2,1} = \{E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]E \mid \forall \tilde{P} \in \mathfrak{m}\}. \quad (2.4)$$

事实上, 由可传递性知, 我们只需在 $\gamma = \sigma_3$ 时证明上述结论即可. 由于对于任意的 $P \in u(2, 1)$, 都有分解 $P = \hat{P} + \tilde{P}$, 其中 $\hat{P} \in \mathfrak{k}$, $\tilde{P} \in \mathfrak{m}$, 可见

$$\sigma(t) = \exp(-t\hat{P} - t\tilde{P})\sigma_3 \exp(t\hat{P} + t\tilde{P})$$

是 $\tilde{G}_{2,1}$ 中通过点 σ_3 的一条曲线. 由此可得

$$\sigma'(t)|_{t=0} = -\hat{P}\sigma_3 - \tilde{P}\sigma_3 + \sigma_3\hat{P} + \sigma_3\tilde{P} = [\sigma_3, \tilde{P}],$$

从而得到 $\gamma = \sigma_3$ 处的切空间为 $T_{\sigma_3} \tilde{G}_{2,1} = \{[\sigma_3, \tilde{P}] \mid \forall \tilde{P} \in \mathfrak{m}\}$. 这样便得到任意点 γ 处的切空间的表达式 (2.4).

其次, 在 γ 处的切空间 $T_\gamma \tilde{G}_{2,1}$ 上定义如下的算子 J_γ :

$$J_\gamma = [\gamma, \cdot] : T_\gamma \tilde{G}_{2,1} \rightarrow T_\gamma \tilde{G}_{2,1}, \quad X \mapsto J_\gamma(X) = [\gamma, X], \quad X \in T_\gamma \tilde{G}_{2,1}. \quad (2.5)$$

于是, 对于任意的 $X = E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]E \in T_\gamma \tilde{G}_{2,1}$, 利用对称性条件有

$$J_\gamma(X) = [\gamma, X] = E^{-1}\sigma_3 E E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]E - E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]E E^{-1}\sigma_3 E \\ = E^{-1}\sigma_3[\sigma_3, \tilde{P}]E - E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]\sigma_3 E \\ = -\frac{1}{2}E^{-1}\tilde{P}E + \frac{1}{2}E^{-1}(-\tilde{P})E \\ = -E^{-1}\tilde{P}E,$$

$$\begin{aligned}
J_\gamma^2(X) &= [\gamma, [\gamma, X]] \\
&= -[\gamma, E^{-1}\tilde{P}E] \\
&= -E^{-1}\sigma_3EE^{-1}\tilde{P}E + E^{-1}\tilde{P}EE^{-1}\sigma_3E \\
&= -E^{-1}\sigma_3\tilde{P}E + E^{-1}\tilde{P}\sigma_3E \\
&= -E^{-1}[\sigma_3, \tilde{P}]E \\
&= -X.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6) 表明 $J^2 = -I$, 从而由 (2.5) 所定义的复结构是切空间 $T_\gamma\tilde{G}_{2,1}$ 上的复结构.

最后, 证明在复结构 (2.5) 下流形 $\tilde{G}_{2,1}$ 是 Kähler 的. 事实上, $\tilde{G}_{2,1}$ 上的双不变度量为

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma : T_\gamma\tilde{G}_{2,1} \times T_\gamma\tilde{G}_{2,1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_\gamma = -\text{tr}(XY).$$

这是不定度量, 且由 (2.5) 定义的复结构 J_γ 与该度量相容. 这是因为对于 $X = E^{-1}[\sigma_3, P]E \in T_\gamma\tilde{G}_{2,1}$, 其中的 $P \in \mathfrak{m}$ 可写成

$$P = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ -\bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

直接计算可得

$$J_\gamma(X) = E^{-1} \begin{pmatrix} 0 & iz & iw \\ i\bar{z} & 0 & 0 \\ -i\bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} E,$$

从而可得 $\langle J_\gamma(X), J_\gamma(Y) \rangle_\gamma = \langle X, Y \rangle_\gamma$, 即复结构与双不变度量相容. 由此, 它的 Kähler 形式 ω 也是群 $U(2, 1)$ 不变 2- 形式. 加之 $\tilde{G}_{2,1}$ 是对称空间, 因此 $d\omega = 0$ (参见文献 [28, 第 91 页]), 所以 $\tilde{G}_{2,1}$ 上的双不变度量为 Kähler 度量或由 (2.5) 定义的复结构是 Kähler 的. 这就证明了 $\tilde{G}_{2,1}$ 是一个伪-Kähler 流形. $\square$

3 到伪射影空间 $\tilde{G}_{2,1} = U(2, 1)/U(1, 1) \times U(1)$ 的 Schrödinger 流

众所周知, 从 Riemann 流形 (M, g) 到近复流形 (N, J, h) 的 Schrödinger 流方程为

$$u_t = J_u \tau(u), \tag{3.1}$$

其中, $\tau(u)$ 是映射 $u : M \rightarrow N$ 的张力场, J_u 为目标流形 u 处的近复结构, 特别地, 当 (N, J, h) 是 Kähler 流形时, 方程 (3.1) 实乃 Hamilton 梯度流 (参见文献 [6, 10, 19, 29, 32]).

设 $\gamma(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \tilde{G}_{2,1}$ 是直线 $\mathbb{R}^1$ 到射影空间 $\tilde{G}_{2,1}$ 的 (光滑) 映照, $\nabla_x = \nabla_{\gamma_x}$ 表示拉回丛 $\gamma^{-1}T\tilde{G}_{2,1}$ 上由 $\tilde{G}_{2,1}$ 的 Levi-Civita 联络所诱导的协变导数.

定理 3.1 直线 $\mathbb{R}^1$ 到 (伪) 射影空间 $\tilde{G}_{2,1}$ 的 Schrödinger 流方程为

$$\gamma_t = -[\gamma, \gamma_{xx}]. \tag{3.2}$$

证明 对于映照 $\gamma(t, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \tilde{G}_{2,1}$, 记 $\gamma = E^{-1}(t, x)\sigma_3 E(t, x)$, 其中 $E = E(t, x) \in U(2, 1)$, 接下来验证相应的 Schrödinger 流方程 (3.1) 恰为方程 (3.2).

首先, 在 $\gamma = E^{-1}(t, x)\sigma_3 E(t, x)$ 的表达式中, 不失一般性, 总能假定 $E_x = PE$ 且 $P \in \mathfrak{m}$. 事实上, 若 $E_x = PE$, $P \in \mathfrak{u}(2, 1)$ 但 $P \notin \mathfrak{m}$, 注意到上述 γ 的表达形式在如下变换

$$E \rightarrow \tilde{E} = QE, \quad \text{其中 } Q = \begin{pmatrix} e^{ib} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in K$$

下保持不变 (这是因为 Q 与 σ_3 可交换). 我们断言, 可选择适当的 Q , 使得

$$\tilde{E}_x = \tilde{P}\tilde{E}, \quad \text{其中 } \tilde{P} \in \mathfrak{m}.$$

这是因为, 记 $P = P_1 + P_2$, 其中 $P_1 \in \mathfrak{k}$, $P_2 \in \mathfrak{m}$, 则由

$$\tilde{E}_x = Q_x E + Q E_x = (Q_x + Q P_1 + Q P_2) Q^{-1} \tilde{E}$$

可见, 只需要选到 Q , 使它满足下面的线性常微分方程组:

$$Q_x + Q P_1 = 0.$$

显然这一线性方程组可解, 且由对称性可得 $\tilde{P} = Q P_2 Q^{-1} \in \mathfrak{m}$. 从而仍然有表示 $\gamma = \tilde{E}^{-1}(t, x)\sigma_3 \tilde{E}(t, x)$, 并且 $\tilde{E}(t, x)$ 满足 $\tilde{E}_x = \tilde{P}\tilde{E}$, 同时有 $\tilde{P} \in \mathfrak{m}$.

其次, 基于上面事实, 可以以下列方式求出协变导数:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma_x} \gamma &= \gamma_x = E^{-1}[\sigma_3, P]E \quad (\text{取 } \mathfrak{m} \text{ 部分}), \\ \nabla_{\gamma_x} \gamma_x &= \gamma_{xx} + E^{-1}[P, [\sigma_3, P]]E \quad (\text{同样取 } \mathfrak{m} \text{ 部分}). \end{aligned}$$

于是, 有

$$\begin{aligned} \gamma_t &= J_\gamma \nabla_{\gamma_x} \gamma_x \\ &= [\gamma, \nabla_{\gamma_x} \gamma_x] \\ &= [\gamma, \gamma_{xx}] + [\gamma, E^{-1}[P, [\sigma_3, P]]E] \\ &= [\gamma, \gamma_{xx}] + [E^{-1}\sigma_3 E, E^{-1}[P, [\sigma_3, P]]E] \\ &= [\gamma, \gamma_{xx}] + E^{-1}[\sigma_3, [P, [\sigma_3, P]]]E \\ &= [\gamma, \gamma_{xx}] \quad (\text{因为 } P \in \mathfrak{m}). \end{aligned}$$

该方程在变换 $\gamma \rightarrow -\gamma$ 下即为方程 (3.2). □

下面验证 Schrödinger 流方程 (3.2) 和 Manakov 方程组 (1.5) 的可积性. 设

$$\tilde{A} = \gamma \lambda dx - (\gamma \lambda^2 + [\gamma, \gamma_x] \lambda) dt, \quad (3.3)$$

则可视 $\tilde{A}$ 为平凡丛 $\mathbb{R}^2 \times U(2, 1)$ 上带有谱参数 λ 的一个联络. 于是, 可直接验证 $\tilde{A}$ 的曲率

$$F_{\tilde{A}} = d\tilde{A} + \tilde{A} \wedge \tilde{A} = 0$$

恰好等价于方程 (3.2), 这表明方程 (3.2) 具有零曲率表示.

类似地, 对于方程 (1.5), 令平凡丛 $\mathbb{R}^2 \times U(2, 1)$ 上带有谱参数 λ 的联络为

$$A = (\lambda\sigma_3 - U)dx + (-\lambda^2\sigma_3 + \lambda U - V)dt, \quad (3.4)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \\ -\varphi_1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = -2\sigma_3(U_x - U^2) = -i \begin{pmatrix} \varphi_1\bar{\varphi}_1 - \varphi_2\bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_{1x} & \bar{\varphi}_{2x} \\ \varphi_{1x} & -\varphi_1\bar{\varphi}_1 & -\varphi_1\bar{\varphi}_2 \\ -\varphi_{2x} & \bar{\varphi}_1\varphi_2 & \bar{\varphi}_2\varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

则 Manakov 方程组 (1.5) 等价于联络 A 的曲率

$$F_A = dA + A \wedge A = 0,$$

故方程组 (1.5) 也具有零曲率表示, A 也称为 Manakov 方程组 (1.5) 所相应的联络.

4 Manakov 方程组的几何刻画

定理 4.1 Schrödinger 流方程 (3.2) 规范等价于 Manakov 方程组 (1.5).

证明 首先证明 Schrödinger 流方程 (3.2) 可规范变换成 Manakov 方程组 (1.5).

为此, 设 $\gamma(t, x) = E^{-1}(t, x)\sigma_3 E(t, x)$ 是方程 (3.2) 的解. 从定理 3.1 的证明过程可知, 不失一般性, 可假定 $E = E(t, x)$ 满足

$$E_x E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 \\ -\varphi_1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: U \in \mathfrak{m}. \quad (4.1)$$

对于 Schrödinger 流方程 (3.2) 的平坦联络 $\tilde{A}$ (3.3), 作规范变换:

$$\tilde{A} \mapsto A = -(dG)G^{-1} + G\tilde{A}G^{-1},$$

其中 $\tilde{A}$ 满足 (3.3) 和 $G = E$. 直接计算得到

$$\begin{aligned} A &= -(G_x G^{-1} dx + G_t G^{-1} dt) + G(\gamma \lambda dx - (\gamma \lambda^2 + [\gamma, \gamma_x] \lambda) dt) G^{-1} \\ &= (-G_x G^{-1} + \lambda \sigma_3) dx + (-G_t G^{-1} - \lambda^2 \sigma_3 + \lambda G_x G^{-1}) dt \\ &= (-U + \lambda \sigma_3) dx + (-G_t G^{-1} - \lambda^2 \sigma_3 + \lambda U) dt, \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $G_t G^{-1}$ 待定, 且与 λ 无关. 因此, 有

$$\begin{aligned} F_A &= dA + A \wedge A \\ &= ((-G_t G^{-1} - \lambda^2 \sigma_3 + \lambda U)_x - (-U + \lambda \sigma_3)_t \\ &\quad + [-U + \lambda \sigma_3, -G_t G^{-1} - \lambda^2 \sigma_3 + \lambda U]) dx \wedge dt \end{aligned}$$

$$= (U_t - (G_t G^{-1})_x + [U, G_t G^{-1}] + \lambda(U_x - [\sigma_3, G_t G^{-1}])) dx \wedge dt.$$

根据 Yang-Mills 理论知, 曲率 F_A 在规范变换下满足

$$F_A = G^{-1} F_{\tilde{A}} G = 0. \quad (4.3)$$

由于方程 (4.3) 左边的 λ 和 λ^0 的系数都为 0, 所以可得到

$$U_t - (G_t G^{-1})_x + [U, G_t G^{-1}] = 0, \quad (4.4)$$

$$U_x - [\sigma_3, G_t G^{-1}] = 0. \quad (4.5)$$

记 $(G_t G^{-1})^{(\mathbf{k})} = G_t G^{-1}|_{\mathbf{k}}$ 和 $(G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})} = G_t G^{-1}|_{\mathbf{m}}$, 则 $G_t G^{-1} = (G_t G^{-1})^{(\mathbf{k})} + (G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})}$. 由方程 (4.5) 知,

$$[\sigma_3, U_x] = [\sigma_3, [\sigma_3, G_t G^{-1}]] = [\sigma_3, [\sigma_3, (G_t G^{-1})^{(\mathbf{k})}]] + [\sigma_3, [\sigma_3, (G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})}]] = -(G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})},$$

即

$$(G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})} = -[\sigma_3, U_x] = -2\sigma_3 U_x. \quad (4.6)$$

取方程 (4.4) 的 $\mathbf{k}$ 部分, 有

$$(G_t G^{-1})_x^{(\mathbf{k})} = [U, (G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})}] = -[U, [\sigma_3, U_x]] = 2(\sigma_3 U^2)_x. \quad (4.7)$$

根据方程 (4.1)、(4.6) 和 (4.7), 可以将 $G_t G^{-1}$ 写成

$$G_t G^{-1} = (G_t G^{-1})^{(\mathbf{k})} + (G_t G^{-1})^{(\mathbf{m})} = -2\sigma_3(U_x - U^2) + \alpha(t),$$

其中 $\alpha(t) \in \mathbf{k}$ 仅依赖于变量 t . 为了消去 $\alpha(t)$, 作变换

$$G \mapsto \tilde{G} = \beta(t)G,$$

其中 $\beta(t) \in K$ 仅依赖于变量 t , 且满足方程 $\frac{d\beta(t)}{dt} + \beta(t)\alpha(t) = 0$. 从而 $\tilde{G}$ 满足

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x &= \beta(t)G_x = \beta(t)U\beta^{-1}(t)\beta(t)G = \tilde{U}\tilde{G}, \\ \tilde{G}_t &= \frac{d\beta(t)}{dt}G + \beta(t)G_t \\ &= \frac{d\beta(t)}{dt}G + \beta(t)(-2\sigma_3(U_x - U^2) + \alpha(t))G \\ &= -2\sigma_3(\tilde{U}_x - \tilde{U}^2)\tilde{G}, \end{aligned}$$

其中 $\tilde{U} = \beta(t)U\beta^{-1}(t) \in \mathbf{k}$. 所以用 $\tilde{G}$ 代替方程 (4.2) 中的 G 得到联络 A 就是 Manakov 方程组 (1.5) 对应的平坦联络 (3.4), 其中的 U 换成 $\tilde{U}$. 由此可见, Schrödinger 流方程 (3.2) (的解) 可规范变换成 Manakov 方程组 (1.5) (的解).

反过来, 下面证明 Manakov 方程组 (1.5) 也可规范变换成 Schrödinger 流方程 (3.2). 若 φ_1 和 φ_2 是方程组 (1.5) 的解, 取满足下列线性方程组的 $U(2, 1)$ - 酉阵 G :

$$G_x = UG, \quad G_t = VG,$$

其中 U 和 V 由 (3.5) 给出, 至于 G 的存在性是因为 U 和 V 满足相容性条件 $U_t - V_x + [U, V] = 0$. 作规范变换:

$$A \mapsto \tilde{A} = G^{-1}dG + G^{-1}AG, \quad (4.8)$$

其中 A 是 Manakov 方程组 (1.5) 对应的平坦联络 (3.4). 则有

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= G^{-1}dG + G^{-1}AG \\ &= G^{-1}G_x dx + G^{-1}G_t dt + G^{-1}((\lambda\sigma_3 - U)dx + (-\lambda^2\sigma_3 + \lambda U - V)dt)G \\ &= \lambda\gamma dx + (-\lambda^2\gamma - \lambda[\gamma, \gamma_x])dt, \end{aligned}$$

其中 $\gamma = G^{-1}\sigma_3 G$. 这里利用了等式 $[\gamma, \gamma_x] = -G^{-1}UG$, 它可直接由 G 和 γ 的定义推导出, 因此从规范变换 (4.8) 得到的 $\tilde{A}$ 就是 (3.3). 可见 γ 是 Schrödinger 流方程 (3.2) 的解, 从而得到 Manakov 方程组 (1.5) 也可规范变换成 Schrödinger 流方程 (3.2).

至此证明了 Schrödinger 流方程 (3.2) 规范等价于 Manakov 方程组 (1.5). □

最后要指出的是, 用同样的方法也可以证明 Manakov 方程组 (1.2) 规范等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到紧致射影空间

$$G_{2,1} = \{E^{-1}\sigma_3 E \mid \forall E \in U(3)\} = U(3)/U(2) \times U(1)$$

的 Schrödinger 流方程; Manakov 方程组 (1.3) 规范等价于从 $\mathbb{R}^1$ 到非紧“射影空间”

$$\hat{G}_{2,1} = \{E^{-1}\sigma_3 E \mid \forall E \in U(2, 1)\} = U(2, 1)/U(2) \times U(1)$$

的 Schrödinger 流方程. 可见, 利用到 3 种不同的射影空间 $G_{2,1}$ 、 $\hat{G}_{2,1}$ 和 $\tilde{G}_{2,1}$ 的 Schrödinger 流给出了方程 (1.2)、(1.3) 和 (1.5) 的统一的几何刻画. 需要指出的是, 对于一般的 Manakov 方程组 (1.1), 尽管它含有 4 个自由参数, 经过参数的规范化处理之后, 视参数的不同情形, 方程组落入上面 3 个可积方程组之一的“扰动”方程组之中, 在此基础上仍然可以给出其几何刻画, 但是难以解释为 Schrödinger 流方程 (参见文献 [18]). 此外, 到一般的齐性空间的 Schrödinger 流方程的研究也是我们所关注的. 文献 [20] 构造了许多齐性空间上的非线性 Schrödinger 方程组, 它们是否与到相应的齐性空间上的 Schrödinger 流一致或相关? 我们将问题留到以后再讨论.

参考文献

- 1 Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, et al. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud Appl Math*, 1974, 53: 249–315
- 2 Akhmediev N, Królikowski W, Snyder A W. Partially coherent solitons of variable shape. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 4632–4635
- 3 Alekseevsky D V, Medori C, Tomassini A. Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Math Surveys*, 2009, 64: 1–43
- 4 Arvanitoyeorgos A. An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces. *Student Mathematical Library*, vol. 22. Providence: Amer Math Soc, 2003
- 5 Baronio F, Conforti M, Degasperis A, et al. Vector rogue waves and baseband modulation instability in the defocusing regime. *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 034101
- 6 Chang N H, Shatah J, Uhlenbeck K. Schrödinger maps. *Comm Pure Appl Math*, 2000, 53: 590–602

- 7 Chen B B. Schrödinger flows to symmetric spaces and the second matrix-AKNS hierarchies. *Commun Theor Phys (Beijing)*, 2006, 45: 653–656
- 8 Cruceanu V, Fortuny P, Gadea P M. A survey on paracomplex geometry. *Rocky Mountain J Math*, 1996, 26: 83–115
- 9 Da Rios L S. Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque. *Rend Circ Mat Palermo (2)*, 1906, 22: 117–135
- 10 Ding Q. A note on the NLS and the Schrödinger flow of maps. *Phys Lett A*, 1998, 248: 49–56
- 11 Ding Q, Inoguchi J. Schrödinger flows, binormal motion for curves and the second AKNS-hierarchies. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 21: 669–677
- 12 Ding Q, Liu X P, Wang W. The vortex filament in the Minkowski 3-space and generalized bi-Schrödinger maps. *J Phys A*, 2012, 45: 455201
- 13 Ding Q, Wang W, Wang Y D. The Fukumoto-Moffatt's model in the vortex filament and generalized bi-Schrödinger maps. *Phys Lett A*, 2011, 375: 1457–1460
- 14 Ding Q, Wang Y D. Vortex filament on symmetric Lie algebras and generalized bi-Schrödinger flows. *Math Z*, 2018, 290: 167–193
- 15 Ding Q, Zhong S P. The almost complex structure on $\mathbb{S}^6$ and related Schrödinger flows. *Internat J Math*, 2018, 29: 1850099
- 16 Ding Q, Zhong S P. The complex 2-sphere in $\mathbb{C}^3$ and Schrödinger flows. *Sci China Math*, 2020, 63: 777–788
- 17 Ding Q, Zhong S P. On the vortex filament in 3-spaces and its generalizations. *Sci China Math*, 2021, 64: 1331–1348
- 18 Ding Q, Zhong S P. On geometric realization of the general Manakov system. *Chin Ann Math Ser B*, 2023, 44: 753–764
- 19 Ding W Y, Wang Y D. Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds. *Sci China Ser A*, 1998, 41: 746–755
- 20 Fordy A P, Kulish P P. Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras. *Comm Math Phys*, 1983, 89: 427–443
- 21 Fukumoto Y. Three-dimensional motion of a vortex filament and its relation to the localized induction hierarchy. *Eur Phys J B*, 2002, 29: 167–171
- 22 Fukumoto Y, Moffatt H K. Motion and expansion of a viscous vortex ring. Part 1. A higher-order asymptotic formula for the velocity. *J Fluid Mech*, 2000, 417: 1–45
- 23 Hasimoto H. A soliton on a vortex filament. *J Fluid Mech*, 1972, 51: 477–485
- 24 Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. New York: Academic Press, 1978
- 25 Khawaja U A, Sakka L A. *Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations*. Bristol: IOP Publishing, 2020
- 26 Langer J, Perline R. Geometric realizations of Fordy-Kulish nonlinear Schrödinger systems. *Pacific J Math*, 2000, 195: 157–178
- 27 Manakov S V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Sov Phys JETP*, 1974, 38: 248–253
- 28 Murakami S. *Theory of Homogeneous Spaces (in Chinese)*. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1983 [村上信吾. 齐性流形引论. 上海: 上海科学技术出版社, 1983]
- 29 Nahmod A, Stefanov A, Uhlenbeck K. Erratum: On Schrödinger maps. *Comm Pure Appl Math*, 2004, 57: 833–839
- 30 Nogami Y, Warke C S. Soliton solutions of multicomponent nonlinear Schrödinger equation. *Phys Lett A*, 1976, 59: 251–253
- 31 Novikov S P, Manakov S V, Pitaevskii L P, et al. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. New York: Consultants Bureau, 1984
- 32 Terng C L, Uhlenbeck K. Schrödinger flows on Grassmannians. In: *Integrable Systems, Geometry and Topology*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 36. Providence: Amer Math Soc, 2006, 235–256
- 33 Vijayajayanthi M, Kanna T, Murali K, et al. Harnessing energy-sharing collisions of Manakov solitons to implement universal NOR and OR logic gates. *Phys Rev E*, 2018, 97: 060201
- 34 Yeh C, Bergman L. Enhanced pulse compression in a nonlinear fiber by a wavelength division multiplexed optical pulse. *Phys Rev E*, 1998, 57: 2398–2404
- 35 Yilmaz E U, Khodad F S, Ozkan Y S, et al. Manakov model of coupled NLS equation and its optical soliton solutions. *J Ocean Eng Sci*, 2024, 9: 364–372

A geometric characterization of a kind of Manakov systems

Qing Ding, Shiping Zhong & Ding Ma

Abstract It is well known that Schrödinger flows to symmetric spaces or, equivalently, Grassmannian manifolds are applied to interpreting the geometric properties of the matrix nonlinear Schrödinger equations. In this paper, we deduce Schrödinger flows to the pseudo symmetric space $U(2,1)/U(1,1) \times U(1)$ and utilize them to give a geometric interpretation of a Manakov system. Combining these with some known results, we then give a unified geometric characterization for a kind of Manakov systems.

Keywords Manakov system, orbit space, Schrödinger flow

MSC(2020) 53C30, 53E30, 35Q55, 37K25, 35Q60

doi: 10.1360/SSM-2023-0067