Black-Scholes 模型和 GARCH 模型下的隐含波动率研究*

李建辉**,[1] 贺兴时[2] 赵文芝[2]
(1. 西京学院应用统计与理学系,西安 710123;2. 西安工程大学理学院,西安 710048)

摘 要:在标的股票支付红利的条件下,分别讨论 Black-Scholes 模型与 GARCH 模型中隐含波动率的性质。在两个模型中使用了泰勒逼近,得到隐含波动率满足的二次方程,并讨论系数对隐含波动率的影响。然后,通过数值算例研究不同参数对应的隐含波动率的性态,同时分析了隐含波动率随着参数的变化趋势。

关键词:红利;期权;泰勒公式;GARCH 模型
中图分类号:F830.9;O211.9 **文献标识码**:A doi:10.16507/j.issn.1006 – 6055.2016.05.033

Researches on Implied Volatility under Black-Scholes Model and GARCH Model*

LI Jianhui**,[1] **HE Xingshi**[2] **ZHAO Wenzhi**[2]
(1. Department of applied Statistics and Science, Xijing University, Xi'an 710123;
2. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048)

Abstract: In the premise of the underlying stock dividend payment, the properties of the implied volatility were discussed in Black-Scholes model and GARCH model. Using the Taylor approximation in the two model, quadratic equation implied volatility were obtained, and the influence coefficients of the implied volatility were discussed. By numerical examples, different parameters corresponding to the hidden state volatility were investigated, the implied volatility trend with parameters were analyzed.

Key words: dividend; option; Taylor formula; GARCH model

1 引言

1997 年的诺贝尔经济学奖授予 Merton 和 Scholes,以表彰他们及 Black 在金融衍生产品定价理论及金融市场风险管理研究领域所做出的贡献,其中最著名的是 Black-Scholes(B-S)期权定价模型[1]。该模型对金融市场做了一些假设,如标的股票价格波动率为常数,但实际情况并非如此,波动会随时间发生变化。

随着该领域理论的研究与发展,人们开始用时间序列模型来刻画波动率的变化。Duan[2] 最早在期权定价模型中使用 GARCH 模型研究波动率。张爱玲等[3] 提出包含敲定价格和到期日两变量的隐含波动率表面模型来计算隐含波动率,提高了波动率的平均计算精度,同时给出了波动率"假笑"和波动率期限结构的特征。Giovanni 等[4] 利用非参数逼近方法对 GARCH 定价模型做了理论研究和实证分析。近年来,该问题的研究又有了一些新的进展,郑振龙等[5] 用 GARCH(1,1)模型预测未来波动率,发现在预测期限较短时,GARCH(1,1)模型预测能力较强。Gong 等[6] 考虑基于 GARCH 波动率的期权定价问题,利用历史数据做统计分析,最终得到了期权价格。Muhammad 等[7] 在文献[6]的基础上分析和讨论了基于 B-S 模型的隐含波动率的性态。Marcelo 等[8] 用数值求解 B-S 模型隐含波动率和隐含的无风险回报率,用 SUR 模型得到了隐含波动率的点估计和隐含的无风险利率,并使用这些参数对期权重新定价。Sónia 等[9] 探讨了隐含波动率的预测和 GARCH 模型预测波动率的行为,所采用的方法解决了预测偏差和预测效率等方面的问题。

本文在文献[5,7-9]的基础上,考虑标的股票支付红利的期权定价问题,对隐含波动率的行为做了分析和讨论。

2016-05-03 收稿,2016-07-01 接受,2016-10-25 网络发表
*国家自然科学基金(11271297),陕西省教育厅专项科研计划基金(2013JK0592,15JK2183,15JK2134),西京学院科研基金(XJ140117)资助
**通讯作者,E-mail:jucvk@sina.cn;Tel:15829627364

2 B-S 期权定价模型及其隐含波动率

2.1 有红利的 B-S 期权定价公式

支付红利的标的股票价格 S_t 在 t 时刻服从几何布朗运动，

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

其中，r、q、σ、B_t 分别表示无风险利息率、红利率、波动率、标准布朗运动。

利用无风险定价原则和无套利定价原则可得到，标的股票支付红利的期权价格 $V(S,t)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (1)$$

式(1)的解为[10]

$$\begin{cases} C_{BS} = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - KN(d_2) \\ P_{BS} = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1) \end{cases} \quad (2)$$

其中，c 和 p 分别表示看涨、看跌期权的价格；T、K、$N(\cdot)$ 分别表示到期日、敲定价格和标准正态分布的累积分布函数，

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}。$$

2.2 B-S 模型中的隐含波动率

B-S 模型的隐含波动率取决于当前时刻的期权价格、股票价格 S、波动率 σ、无风险利息率 r、到期日 T，以及敲定价格 K 的值。隐含波动率可以由期权定价公式得到。在这一节使用文献[6]中的方法得到隐含波动率表达式，而且使用文献[7]中的数据计算波动率数值。

根据 B-S 模型得到标的股票支付红利的看涨期权价格为

$$C = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - KN(d_2) \quad (3)$$

由泰勒公式得到如下展开式

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots\right] \quad (4)$$

令 $X = Se^{-q\tau}$，其中 $\tau = T-t$，根据式(2~4)可推导出

$$C_{BS} = \frac{1}{2}(X-K) + \frac{X-K}{\sqrt{2\pi}}d_1 - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\sigma\sqrt{\tau} \quad (5)$$

要得到含有 σ 的方程及方便计算，令 $u = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)\tau$，则 $d_1 = \frac{u + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$，那么式(5)变为

$$C_{BS} = \frac{\sqrt{2\pi}(X-K)\sigma\sqrt{\tau} + 2(X-K)\left(u + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\right) + 2K\sigma^2\tau}{2\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau}}$$

即

$$(X+K)\sigma^2\tau + \sqrt{2\pi}[(X-K) - 2C_{BS}]\sigma\sqrt{\tau} + 2u(X-K) = 0 \quad (6)$$

令 $X+K=\alpha$，$\sqrt{2\pi}[(X-K)-2C_{BS}]=\beta$，$2u(X-K)=\gamma$，$\sigma\sqrt{\tau}=x$，则式(6)变成如下二次方程。

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (7)$$

式(7)是一个简单的二次方程，判别式 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$，解 $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$。式(7)是否具有非负解，取决于系数 α、β、γ 的范围。若 $\alpha>0$，$\beta<0$，$\gamma<0$，则判别式 $\Delta>0$，而且方程至少存在一个非负解。系数 α、β、γ 的范围由股票价格和敲定价格等确定。

在这里讨论一个特殊情形，当 $X=K$，即 $K = Se^{-q\tau}$ 时，期权被称为货币期权。那么，系数 $\gamma=0$，式(7)变为

$$\alpha x^2 + \beta x = 0 \quad (8)$$

式(8)的解为 $x=0$ 和 $x=-\beta/\alpha$，其中的 $\alpha = 2K$，$\beta = 2\sqrt{2\pi}C$。使用文献[7]中的数据作为算例，$S=425.73$，$C_{BS}=33.9118$，计算得到 $\alpha=851.46$，$\beta=-170.0086$，$x=0.1997$。

3 基于 GARCH 波动率的期权定价模型及其隐含波动率

3.1 带有 GARCH 波动率的期权定价模型

实际上，标的股票的对数收益率的条件异方差会随时间变化，即 $\sigma=\theta_t$，其中，θ_t 服从均值为 μ_θ，方差为 σ_θ^2 的 $GARCH(m,n)$ 过程，即

$$\theta_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\sigma_{t-j}^2$$

其中，$\varepsilon_t = \theta_t z_t$，$z_t \sim N(0,\sigma_t^2)$，$\omega>0$，$\alpha_i \geqslant 0$，$\beta_j \geqslant 0$。那么，

$$\begin{aligned} C_{GARCH} &= e^{-rT}E[(S_T-K)^+] \\ &= e^{-rT}E_{\theta_t}[E[(e^{(r-q)T}S-K)^+]] \\ &= Se^{-qT}E_{\theta_t}[N(d_1^*)] - KE_{\theta_t}[N(d_2^*)] \end{aligned}$$

其中，

$$d_1^* = f(\theta_t) = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T + \frac{1}{2}\theta_t^2}{\theta_t}$$

$$d_2^* = g(\theta_t) = d_1^* - \theta_t$$

则式(2)将变为

$$\begin{cases} C_{GARCH} = Se^{-qT}E_{\theta_t}[N(d_1^*)] - KE_{\theta_t}[N(d_2^*)] \\ P_{GARCH} = Ke^{-rT}E_{\theta_t}[N(-d_2^*)] - Se^{-qT}E_{\theta_t}[N(-d_1^*)] \end{cases} \tag{9}$$

根据式(9)可以得到

$$E_{\theta_t}[N(d_1^*)] = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T + \frac{1}{2}E(\theta_t^2)}{\sqrt{E(\theta_t^2)}}\right) \Rightarrow$$

$$d_1^* = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T + \frac{1}{2}E(\theta_t^2)}{\sqrt{E(\theta_t^2)}} \tag{10}$$

$$E_{\theta_t}[N(d_2^*)] = N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T - \frac{1}{2}E(\theta_t^2)}{\sqrt{E(\theta_t^2)}}\right) \Rightarrow$$

$$d_2^* = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T - \frac{1}{2}E(\theta_t^2)}{\sqrt{E(\theta_t^2)}} \tag{11}$$

那么,$d_1^* - d_2^* = \sqrt{E(\theta_t^2)}$。

令 $C_t(K,T)$ 表示标的股票支付红利的欧式看涨期权价格,$t \in [0,T]$。隐含波动率 $\sigma_t(K,T)$ 是由期权的市场价格和 B-S 价格比较得到的波动率参数值,即

$$C_t(K,T) = C(t,S_t,K,T,r,\sigma_t(K,T))$$

3.2　GARCH 模型中的隐含波动率

若波动率 $\sigma = \theta_t$ 服从 GARCH 过程,则相应的期权价格[7]为

$$C_{GARCH} = Se^{-qT}E_{\theta_t}[N(d_1^*)] - KE_{\theta_t}[N(d_2^*)] \tag{12}$$

使用展开式(4),同时,令 $Y = Se^{-qT}$,根据式(9~12)可推导出

$$C_{GARCH} = \frac{1}{2}(Y-K) + \frac{Y-K}{\sqrt{2\pi}}d_1^* - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{E[\theta_t^2]} \tag{13}$$

为了得到含有 θ_t 的方程及方便计算,令 $v = \ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)T$,则 $d_1 = \frac{v + \frac{1}{2}E[\theta_t^2]}{\sqrt{E[\theta_t^2]}}$,那么式(13)变为

$$C_{GARCH} = \left\{\sqrt{2\pi}(Y-K)\sqrt{E[\theta_t^2]} + 2(Y-K)\left(v + \frac{1}{2}E[\theta_t^2]\right) + 2KE[\theta_t^2]\right\} \Big/ \left(2\sqrt{2\pi}\sqrt{E[\theta_t^2]}\right)$$

即

$$(Y+K)E[\theta_t^2] + \sqrt{2\pi}[(Y-K) - 2C_{GARCH}]\sqrt{E[\theta_t^2]} + 2v(Y-K) = 0 \tag{14}$$

令 $Y+K=a$,$\sqrt{2\pi}[(Y-K)-2C_{GARCH}]=b$,$2v(Y-K)=c$,$\sqrt{E[\theta_t^2]}=y$,则式(14)变成如下二次方程

$$ay^2 + by + c = 0 \tag{15}$$

方程(15)与方程(7)的结构相似,可以用相同方法讨论,此处不再赘述。

4　数值试验

试验 1. 给定不同的到期日 T、敲定价格 K、标的股票价格 S,在 $\sigma = 0.0375$,$q = 0.015$ 时计算得到隐含波动率,见表 1。结果显示:1)在当前设定的参数范围内,隐含波动率与到期日 T 和敲定价格 K 呈负相关,与标的股票价格 S 呈正相关;2)没有出现波动率"微笑"的情形;3)在 $5 \leqslant T \leqslant 10$ 时,出现了隐含波动率聚类的现象。

表 1　不同参数对应的隐含波动率

T/年	K/ $	S/ $	隐含波动率	精度
1	10.00	12.10	1.0641	-1.00031×10^{-7}
2	12.50	10.28	0.6689	2.13163×10^{-14}
3	15.00	8.68	0.4955	3.42837×10^{-12}
4	17.50	7.30	0.3970	5.34062×10^{-11}
5	20.00	6.13	0.3339	-8.88178×10^{-16}
6	22.50	5.16	0.2905	2.02824×10^{-9}
7	25.00	4.35	0.2591	1.24345×10^{-14}
8	27.50	3.68	0.2356	2.88658×10^{-13}
9	30.00	3.13	0.2175	2.83329×10^{-13}
10	32.50	2.59	0.1988	-1.07025×10^{-13}

试验 2. 为更精确地观测隐含波动率的性质,分别计算漂移系数 $\sigma = 0.1, 0.2, 0.3$ 时的隐含波动率,绘制隐含波动率曲面。图 1 呈现出了隐含波动率随着敲定价格和到期日的变化趋势,同时显示当漂移系数越大时隐含波动率曲面出现在较高位置。

试验 3. 给定不同的到期日 T,绘制出两种模型中的隐含波动率随敲定价格的变化曲线见图 2,其

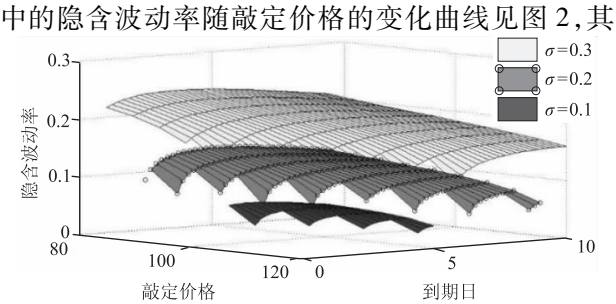

图 1　隐含波动率曲面

中 $\sigma = 0.0375$，$q = 0.015$。结果显示：1）在三幅图中，都表现为 GARCH 模型的隐含波动率较 B-S 模型的大；2）图 2（a）中的 GARCH 模型出现了波动率“微笑”的现象；3）在两个模型中隐含波动率都以连续方式随敲定价格变化，没有出现波动率跳跃；4）在两个模型中隐含波动率都在有限范围内变化，没有发散到无穷。

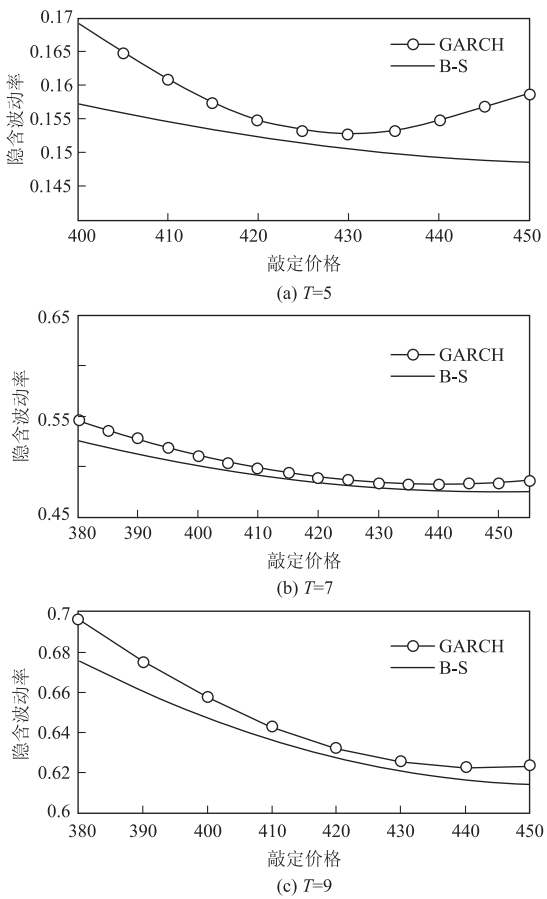

图 2　隐含波动率曲线

5　结束语

考虑标的股票支付红利的期权定价模型中的隐含波动率问题，本文分别使用 B-S 期权定价方法和 GARCH 期权定价方法讨论了模型中的隐含波动率的性态。在 B-S 波动率模型和 GARCH 波动率模型中使用了泰勒展开式，最终都得到隐含波动率依赖于二次方程的系数，所有系数都可以由初始条件来确定。然而，对于波动率行为的研究不仅限于此，如路径依赖期权定价背景下的波动率行为研究等问题，将成为今后研究的重点。

参考文献

[1] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. The Journal of Political Economy. 1973, 81(3): 637-654.

[2] DUAN J C. The GARCH Option Pricing Mode [J]. Mathematical Finance, 1992, 5(1): 13-32.

[3] 张爱玲，吴冲锋. 隐含波动率微分算法的改进——波动率表面模型[J]. 上海交通大学学报，2007，41(12)：1985-1989.

[4] GIOVANNI B, ROBERT F E, LORIANO M. A GARCH Option Pricing Model with Filtered Historical Simulation [J]. Review of Financial Studies, 2008, 21(3): 1223-1258.

[5] 郑振龙，黄薏舟. 波动率预测：GARCH 模型与隐含波动率[J]. 数量经济技术经济研究，2010，27(1)：140-150.

[6] GONG H, THAVANESWARAN A, SINGH J. A Black-Scholes Model with GARCH Volatility [J]. The Mathematical Scientist, 2010, 35(1): 37-42.

[7] MUHAMMAD S, VASILE P. Implied volatility in Black-Scholes model with GARCH volatility [J]. Procedia Economics and Finance, 2014, 8(2): 658-663.

[8] MARCELO B, SCOTT M, MARCO S. Implied volatility and the risk free rate of return in options markets [J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2015, 31(332): 1-26.

[9] SÓNIA R, BENTES. A comparative analysis of the predictive power of implied volatility indices and GARCH forecasted volatility [J]. Physical A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2015, 424(15): 105-112.

[10] MERTON, ROBERT C. Theory of rational option pricing [J]. Bell Journal of Economy and Management Science, 1973, 4(1): 141-183.