



复 Grassmann 流形中拥挤常曲率全纯球面的分类

献给彭家贵教授 80 寿辰

费杰¹, 焦晓祥², 王军^{3*}

1. 西交利物浦大学数学物理学院基础数学系, 苏州 215123;

2. 中国科学院大学数学科学学院雁栖湖校区, 北京 101408;

3. 南京师范大学数学科学学院, 南京 210023

E-mail: jie.fei@xjtlu.edu.cn, xxjiao@ucas.edu.cn, wangjun706@njnu.edu.cn

收稿日期: 2024-03-07; 接受日期: 2024-04-25; 网络出版日期: 2024-08-26; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12371055) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20221320) 资助项目

摘要 本文提出关于复 Grassmann 流形 $G(k, N)$ 中拥挤常曲率全纯二维球面 (简称为 “PCCH S^2 ” (pinched constantly curved holomorphic two-spheres)) 的 “基石直和” 构造机制, 并完全分类 $G(4, 8)$ 中非退化的 PCCH S^2 .

关键词 复 Grassmann 流形 拥挤 常 Gauss 曲率 全纯二维球面

MSC (2020) 主题分类 53C20, 53C24

1 引言

子流形的第二基本形式模长的拥挤问题是子流形几何的一个重要研究课题. Simons^[21] 首次得到了著名的 Simons 不等式, 它是关于单位球面 S^{n+p} 中 n 维紧致无边极小子流形 M^n 上第二基本型模长平方 S 的积分不等式, 即

$$\int_{M^n} \left[\left(2 - \frac{1}{p} \right) S - n \right] S * 1 \geq 0,$$

其中 $*1$ 表示 M^n 在诱导度量下的体积元. 由此推导出, 如果在极小子流形 M^n 上满足拥挤条件

$$\left(2 - \frac{1}{p} \right) S - n \leq 0,$$

则 $S = 0$ (此时 M^n 是 S^{n+p} 中的全测地 n 维球面 S^n) 或 $S = n/(2 - 1/p)$. Chern 等^[3] 利用活动标架法完全分类了 $S = n/(2 - 1/p)$ 的极小子流形.

英文引用格式: Fei J, Jiao X X, Wang J. Classification of pinched constantly curved holomorphic two-spheres in the complex Grassmann manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 49–66, doi: 10.1360/SSM-2024-0056

定理 1.1 ^[3] S^4 中的 Veronese 曲面和 S^{n+1} 中的超曲面

$$M_{m,n-m} = S^m \left(\sqrt{\frac{m}{n}} \right) \times S^{n-m} \left(\sqrt{\frac{n-m}{n}} \right)$$

是 S^{n+p} 中满足 $S = n/(2 - 1/p)$ 的仅有的 n 维紧致极小子流形.

注 1.1 对于 $p = 1$ 的情形, 相关结果由 Lawson ^[17] 利用不同的方法独立证明.

我们知道 Kähler 流形中的复子流形都是极小的. 对于具有全纯截面曲率为 1 的复射影空间 $\mathbb{C}P^{n+p}$ 中的紧复子流形 M^n , Ogiue ^[19] 推导了复版本的 Simons 型积分不等式

$$\int_{M^n} \left[\left(2 - \frac{1}{2p} \right) S - \frac{n+2}{2} \right] S * 1 \geq 0,$$

并确定了 $\mathbb{C}P^{n+p}$ 中满足 $S = \frac{n+2}{4-1/p}$ 的所有复子流形.

定理 1.2 ^[19] $\mathbb{C}P^2$ 中的复超二次曲面 Q_1 是 $\mathbb{C}P^{n+p}$ 中满足

$$S = \frac{n+2}{4-1/p}$$

的仅有的紧复子流形.

注 1.2 $\mathbb{C}P^2$ 中的复超二次曲面 Q_1 酉等价于 $\mathbb{C}P^2$ 中的 Veronese 曲面 $\mathcal{V}_0^{(2)}$ ($\mathcal{V}_k^{(n)}$ 的定义见第 2.2 小节).

随后, Tanno ^[22] 推广了上述结果, 获得了 Simons 型积分不等式

$$\int_{M^n} [3S - (n+2)] S * 1 \geq 0$$

并且证明了当 $S = (n+2)/3$ 时, M^n 作为复超二次曲面 Q_1 嵌入在某个 $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^{1+p}$ 中.

复超二次曲面 Q_n 是 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 的代数子流形, 定义如下:

$$Q_n = \{[Z = (z_1, \dots, z_{n+2})] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 0\},$$

其中 $[Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+2})]$ 是 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 的齐次坐标. 众所周知, Q_n 可以被视为实 Grassmann 流形 $G(2, n+2; \mathbb{R})$, 并且 Q_n 的几何结构比空间形式 S^n 和 $\mathbb{C}P^{n+1}$ 的几何结构要复杂得多, 因此本文作者在文献 [24] 中关注 Q_n 中的极小曲面, 得到了几类有关 Q_n 中具有常 Kähler 角的浸入极小曲面的 Simons 型积分不等式, 其中的被积函数包含 Kähler 角和其他 3 个由第一基本型和第二基本型所定义的几何不变量 τ_X 、 τ_Y 和 τ_{XY} . 此外, 文献 [24] 分类了 Q_n 中满足积分不等式中等号情形的全纯 2 维球面和全实极小 2 维球面.

复 Grassmann 流形 $G(k, N)$ 是 N 维复向量空间 $\mathbb{C}^N$ 中所有 k 维复子空间所构成的复流形, 它们是复射影空间的自然推广, 其全纯截面曲率不是常数, 且其几何结构也比空间形式复杂. Chern 和 Wolfson ^[4]、Uhlenbeck ^[23] 及 Burstall 和 Wood ^[2] 分别从不同角度刻画了 $G(k, N)$ 中的调和 2 维球面. 目前, 关于 $G(k, N)$ 中常曲率极小 2 维球面的分类结果主要集中在低维和齐性的情形. Chi 和 Zheng ^[5] 首先得到了 $G(2, 4)$ 中一族互不等价的 Gauss 曲率 $K = 2$ 的全纯 2 维球面. 这个结果表明 Calabi 刚性定理不再成立. Li 和 Yu ^[18] 完全分类了 $G(2, 4)$ 中常曲率的全纯 2 维球面, 并确定了 Gauss 曲率 $K = 4, 4/3, 2, 1$. Jiao 和 Yu ^[16] 证明了 $G(2, N)$ 中线性满的非退化全非分歧常曲率的全纯 2 维球面的 Gauss 曲率 $K = 4/(N-2)$. Jiao 和 Peng ^[14, 15] 在非奇异的条件下给出了 $G(2, 5)$ 中全纯 2 维球面的分类, 曲率值的分布为 $K = 4, 2, 4/3, 1, 4/5$. Peng 和 Xu ^[20] 及 Fei ^[7] 分别给出了 $G(2, N)$ 中线性满的

齐性全纯 2 维球面的分类, 并分别确定了其 Gauss 曲率 $K = 4/(N-2)$ 和 $K = 2/(N-2)$. He 等^[12] 在全非分歧和线性满的条件下给出了 $G(2, 5)$ 中曲率值 $K = 4/3$ 的全纯 2 维球面的完全分类, 得到了两族非齐性的例子. Jiao^[13] 研究了 $G(k, N)$ 中全非分歧非退化的伪全纯调和序列, 完全确定了这些序列元素的映射度和 Gauss 曲率值. 当外围空间 $G(k, N)$ ($k \geq 2$) 的维数增大时, 会出现更多的难以控制的不变量, 因此分类问题比较困难.

由于 $G(k, N)$ 中的全纯 2 维球面在 $G(k, N)$ 的调和 2 维球面的构造理论中发挥重要作用, 因此考虑从 Riemann 曲面 M 到 $G(k, N)$ 中的全纯浸入, Wang 等^[25] 建立了如下 Simons 型积分不等式:

$$\int_M (S^2 - 4(\text{tr}\tau^2)S - 32(\text{tr}\tau^2)^2 + 32\text{tr}\tau^3) * 1 \geq 0, \quad (1.1)$$

其中, $\text{tr}\tau = 1$, $\text{tr}\tau^2$ 和 $\text{tr}\tau^3$ 是浸入曲面的一阶切触不变量, 并且他们确定了 $G(2, N)$ 中满足拥挤条件 $S^2 - 4(\text{tr}\tau^2)S - 32(\text{tr}\tau^2)^2 + 32\text{tr}\tau^3 \leq 0$ 的所有常曲率全纯 2 维球面. 进一步地, Fei 和 Wang^[10] 分类了 $G(3, N)$ 中满足拥挤条件的常曲率全纯 2 维球面. 下文将 $G(k, N)$ 中满足拥挤条件的常曲率全纯 2 维球面简称为 PCCH S^2 (pinched constantly curved holomorphic two-spheres).

上述分类的主要工具是 Chern 和 Wolfson^[4] 发展的活动标架法和调和序列方法, 用于研究从 2 维球面到 $G(k, N)$ 的调和映射的构造. 分类的关键步骤是根据调和序列情形选择适当的酉标架, 并利用拥挤条件求解 Maurer-Cartan 结构方程, 从而确定拉回的 Maurer-Cartan 形式和浸入映射.

从分类结果中可以发现一个非常有趣的直和性质: 考虑 $G(k, N)$ 中所有 PCCH S^2 构成的集合 $\mathcal{F}_k$, 如果 $f_1 \in \mathcal{F}_k, f_2 \in \mathcal{F}_l$, 则它们的直和 $f_1 \oplus f_2 \in \mathcal{F}_{k+l}$. 此外, $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$ 中的元素都可以分解为下面一些基石的直和:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &:= \mathcal{V}_0^{(0)} : S^2 \rightarrow [1] = G(1, 1), \\ \alpha_{1,2} &:= \mathcal{V}_0^{(1)} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = G(1, 2), \quad K = 4, \quad S = 0, \\ \alpha_{1,3} &:= \mathcal{V}_0^{(2)} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 = G(1, 3), \quad K = 2, \quad S = 4, \\ \alpha_{2,3} &:= \begin{bmatrix} \mathcal{V}_0^{(2)} \\ \mathcal{V}_1^{(2)} \end{bmatrix} : S^2 \rightarrow G(2, 3), \quad K = 2, \quad S = 4, \\ \alpha_{2,4}^t &:= \begin{bmatrix} \mathcal{V}_0^{(2)} & 0 \\ \cos t \mathcal{V}_1^{(2)} & \sin t \mathcal{V}_0^{(0)} \end{bmatrix} : S^2 \rightarrow G(2, 4), \quad K = 2, \quad S = 4 \cos^2(2t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

其中约定常值映射 $\mathcal{V}_0^{(0)}$ 和恒同映射 $\mathcal{V}_0^{(1)}$ 是 $\mathcal{F}_1$ 中的元素. 利用直和性质和基石, $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$ 中的分类结果可叙述为如下定理:

定理 1.3 在相差外围空间等距作用下, 表 1 和 2 中的元素穷尽了所有 $G(2, N)$ 和 $G(3, N)$ 中的 PCCH S^2 .

注 1.3 若分解式中含有因子 $\alpha_{1,1}$ 或 $\alpha_{2,3}$, 则浸入映射是退化的.

根据定理 1.3 的结果, 本文提出如下问题:

问题 1.1 任何 $G(k, N)$ 中的 PCCH S^2 是否都酉等价于某些基石的直和?

根据直和性质, 表 3 列举 $G(4, N)$ 中非退化的 PCCH S^2 的所有可能的直和, 并猜测表 3 中的元素穷尽了 $G(4, N)$ 中所有全非分歧非退化的 PCCH S^2 .

为简化讨论, 本文仅考虑 $G(4, 8)$ 中非退化的情形, 下面是本文的主要定理:

定理 1.4 $G(4, 8)$ 中非退化的 PCCH S^2 一定酉等价于 $\alpha_{2,4}^t \oplus \alpha_{2,4}^s, 0 < t, s < \pi/2$.

表 1 $G(2, N)$ 中的 PCCH S^2

直和分解	N	K	S
$\alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	4	2	$4 \cos^2(2t)$
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3}$	5	4/3	16/9
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	6	1	2
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,2}$	3	4	0
$\alpha_{2,3}$	3	2	4
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,3}$	4	2	4

 表 2 $G(3, N)$ 中的 PCCH S^2

直和分解	N	K	S
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	6	4/3	$16 \cos^2(2t)/9$
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	7	1	$1 + \cos^2(2t)$
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	8	4/5	32/25
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	9	2/3	4/3
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,2}$	4	4	0
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{2,3}$	4	2	4
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,3}$	5	2	4
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	5	2	$4 \cos^2(2t)$
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{2,3}$	5	4/3	16/9
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{2,3}$	6	1	2
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3}$	6	4/3	16/9
$\alpha_{1,1} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	7	1	2

 表 3 $G(4, N)$ 中非退化的 PCCH S^2

直和分解	N	K	S
$\alpha_{2,4}^t \oplus \alpha_{2,4}^s, 0 < t, s < \pi/2$	8	1	$\cos^2(2t) + \cos^2(2s)$
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	9	4/5	$(16 + 16 \cos^2(2t))/25$
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{2,4}^t, 0 < t < \pi/2$	10	2/3	$(8 + 4 \cos^2(2t))/9$
$\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	11	4/7	48/49
$\alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3} \oplus \alpha_{1,3}$	12	1/2	1

本文余下内容的结构如下. 第 2 节回顾一些预备知识, 包括 $G(k, N)$ 中全纯浸入曲面的几何和 $\mathbb{C}P^n$ 中的 Veronese 序列. 第 3 节简要回顾 $G(k, N)$ 中全纯浸入曲面的 Simons 型积分不等式和拥挤定理. 第 4 节给出定理 1.4 的证明.

2 预备知识

2.1 $G(k, N)$ 中全纯浸入曲面的几何

本小节回顾复 Grassmann 流形 $G(k, N)$ 中全纯浸入曲面的几何, 详见文献 [4]. 指标范围约定

如下:

$$1 \leq A, B, C \leq N, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k, \quad k+1 \leq i \leq N.$$

设 $e = \{Z_1, \dots, Z_N\}$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中的一个酉标架, 满足

$$(Z_A, Z_B) = \delta_{AB},$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbb{C}^N$ 中标准的 Hermite 内积. 酉标架构成的空间等同于酉群 $U(N)$. 设

$$dZ_A = \sum_B \omega_{AB} Z_B,$$

其中 $\Omega = (\omega_{AB})$ 被称为是 $U(N)$ 的 Maurer-Cartan 形式, 满足 $\Omega + \Omega^* = 0$ 和 Maurer-Cartan 结构方程

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega, \quad (2.1)$$

这里 $*$ 表示共轭转置.

$G(k, N)$ 中的元素可用 $Z_1 \wedge Z_2 \wedge \dots \wedge Z_k \neq 0$ 表示, 向量 $\{Z_\alpha\}$ 和正交补向量 $\{Z_i\}$ 分别可相差一个 $U(k)$ 和 $U(N-k)$ 变换. $G(k, N)$ 上标准度量由下式给出:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, i} \omega_{\alpha i} \bar{\omega}_{\alpha i}.$$

当 $k=1$ 时, 这就是 $\mathbb{C}P^{N-1} = G(1, N)$ 上具有全纯截面曲率为 4 的 Fubini-Study 度量.

设 $f: M \rightarrow G(k, N)$ 是从 Riemann 曲面 M 到 $G(k, N)$ 的全纯浸入, 在 M 上赋予诱导的 Riemann 度量

$$ds_M^2 = f^* ds^2 = \phi \bar{\phi}, \quad (2.2)$$

其中 ϕ 表示 M 上局部 $(1, 0)$ 型余切标架, 在相差一个 $U(1)$ 变换下唯一确定. M 在此诱导度量下的结构方程可写为

$$d\phi = -\sqrt{-1}\rho \wedge \phi, \quad d(\sqrt{-1}\rho) = \frac{K}{2}\phi \wedge \bar{\phi}, \quad (2.3)$$

其中, ρ 是诱导度量的实值联络形式, K 是 Gauss 曲率.

选取沿 f 的局部酉标架 e 使得 $f(x) = [Z_1 \wedge Z_2 \wedge \dots \wedge Z_k]$. 由于 f 是全纯的, 所以 $U(N)$ 上的 Maurer-Cartan 形式通过 e 拉回后 (仍用 ω_{AB} 表示) 形如

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & A\phi \\ -A^*\bar{\phi} & \Omega_2 \end{pmatrix},$$

其中, Ω_1 和 Ω_2 分别是 M 上 $u(k)$ 值和 $u(N-k)$ 值的 1-形式, $A = (a_{\alpha i})$ 是 M 上局部 $k \times (N-k)$ 复矩阵值的光滑函数, 具有常秩和可能的孤立奇点. 如果 $\text{rank} A = k$, 则称映射 f 是非退化的. 此定义与标架选取无关.

由等距条件 (2.2) 得

$$\sum_{\alpha, i} a_{\alpha i} \bar{a}_{\alpha i} = 1. \quad (2.4)$$

利用结构方程 (2.1) 和 (2.3), 可得

$$dA \equiv \sqrt{-1}\rho A + \Omega_1 A - A\Omega_2 \pmod{\phi} \quad (2.5)$$

和

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= -AA^*\phi \wedge \bar{\phi} + \Omega_1 \wedge \Omega_1, \\ d\Omega_2 &= A^*A\phi \wedge \bar{\phi} + \Omega_2 \wedge \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

根据 (2.5), 令

$$DA := dA - \Omega_1 A + A\Omega_2 - \sqrt{-1}\rho A = P\phi, \quad (2.7)$$

其中, DA 是 A 的共变微分, P 是 M 上局部 $k \times (N - k)$ 复矩阵值的光滑函数. 用 S 表示 f 的第二基本型的模长平方, 则

$$S = 4\text{tr}PP^* =: 4|P|^2.$$

选取另一个沿 f 的西标架 $\tilde{e}$ 使得 $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_k$ 张成 f , 则 $\tilde{e} = U \cdot e$, 其中, $U = \text{diag}(U_1, U_2)$, U_1 和 U_2 是 M 上局部 $U(k)$ 值和 $U(N - k)$ 值的光滑函数. 根据

$$\tilde{\Omega} = dU \cdot U^{-1} + U\Omega U^{-1},$$

有变换公式

$$\tilde{A} = U_1 A U_2^{-1}, \quad \tilde{P} = U_1 P U_2^{-1}. \quad (2.8)$$

令 $\tau = AA^*$. 由于 ϕ 在相差 $U(1)$ 变换下唯一确定, 所以根据 (2.8) 易知 $\det \tau$ 和 $\text{tr} \tau^m$ ($m \geq 1$) 都是 M 上整体定义的不变量.

定理 2.1 ^[25] 设 $f: M \rightarrow G(k, N)$ 是全纯浸入, 则 f 的 Gauss 方程由下式给出:

$$K = 4\text{tr} \tau^2 - \frac{1}{2}S. \quad (2.9)$$

2.2 $\mathbb{C}P^n$ 中的 Veronese 序列

接下来介绍 $\mathbb{C}P^n$ 中的 Veronese 序列. 利用 S^2 上的全纯坐标 z , Veronese 映射 $\mathcal{V}^{(n)}: S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ 由下式给出:

$$\mathcal{V}^{(n)}(z) = \left[1, \sqrt{\binom{n}{1}}z, \dots, \sqrt{\binom{n}{l}}z^l, \dots, z^n \right].$$

根据文献 [1], 可知这是一个线性满的全纯嵌入, 在相差 $\mathbb{C}P^n$ 的刚性运动下是唯一确定的, 其 Gauss 曲率为常数 $4/n$. 设 $\mathcal{V}_0^{(n)}, \mathcal{V}_1^{(n)}, \dots, \mathcal{V}_n^{(n)}$ 是由 $\mathcal{V}^{(n)} = \mathcal{V}_0^{(n)}$ 生成的调和序列, 且 $\mathcal{V}_l^{(n)} = [f_l^n] = [f_{l,0}^{(n)}, \dots, f_{l,p}^{(n)}, \dots, f_{l,n}^{(n)}]$, 其中 $f_{l,p}^{(n)}$ 由下面表达式显式给出:

$$f_{l,p}^{(n)}(z) = \frac{l!}{(1+z\bar{z})^l} \sqrt{\binom{n}{p}} z^{p-l} \sum_k (-1)^k \binom{p}{l-k} \binom{n-p}{k} (z\bar{z})^k.$$

映射 $\nu_l^{(n)} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ 是具有常曲率和常 Kähler 角分别为

$$K_l^{(n)} = \frac{4}{n+2l(n-l)}, \quad \cos \alpha_l^{(n)} = \frac{n-2l}{n+2l(n-l)}$$

的共形极小浸入. 这个调和序列 $\nu_0^{(n)}, \nu_1^{(n)}, \dots, \nu_n^{(n)}$ 就是 $\mathbb{C}P^n$ 中著名的 Veronese 序列, 可作为构造 $G(k, N)$ 中所有齐性 2 维球面的基石 (参见文献 [7, 9, 20]). 约定 $\mathbb{C}P^0$ 中的 Veronese 映射是常值映射 $\nu_0^{(0)} = [1]$. 令 $e_l^{(n)} = f_l^{(n)} / \|f_l^{(n)}\|$, $0 \leq l \leq n$. 则 $\{e_0^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ 是 $\nu_0^{(n)}$ 的一个 Frenet 标架,

$$de_l^{(n)} = -\sqrt{l(n-l+1)}\bar{\varphi}e_{l-1}^{(n)} + (n-2l)\sqrt{-1}\omega e_l^{(n)} + \sqrt{(l+1)(n-l)}\varphi e_{l+1}^{(n)} \quad (2.10)$$

(参见文献 [1, 7]), 其中, $\varphi\bar{\varphi}$ 是 S^2 上曲率为 4 的标准度量, -2ω 是这个度量的实联络形式.

引言中的基石 $\alpha_{2,4}^t$ 是 $G(2, 4)$ 中所有常曲率为 2 的全纯 2 维球面 (参见文献 [5]). 选取沿 $\alpha_{2,4}^t$ 的酉标架 $e = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ 如下:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (e_0^{(2)}, 0), \\ Z_2 &= (\cos te_1^{(2)}, \sin te_0^{(0)}), \\ Z_3 &= (\sin te_1^{(2)}, -\cos te_0^{(0)}), \\ Z_4 &= (e_2^{(2)}, 0). \end{aligned}$$

由 (2.10) 可以计算酉标架 e 拉回的 Maurer-Cartan 形式:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\sqrt{-1}\omega & \sqrt{2}\cos t\varphi & \sqrt{2}\sin t\varphi & 0 \\ -\sqrt{2}\cos t\bar{\varphi} & 0 & 0 & \sqrt{2}\cos t\varphi \\ -\sqrt{2}\sin t\bar{\varphi} & 0 & 0 & \sqrt{2}\sin t\varphi \\ 0 & -\sqrt{2}\cos t\bar{\varphi} & -\sqrt{2}\sin t\bar{\varphi} & -2\sqrt{-1}\omega \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

3 Simons 型积分不等式和拥挤定理

本节简要回顾复 Grassmann 流形 $G(k, N)$ 中全纯浸入曲面的 Simons 型积分不等式和拥挤定理, 详细证明见文献 [10, 25].

对等式 (2.7) 两边求外微分并利用 (2.3)、(2.6) 和 (2.7), 有

$$d(P\phi) = \Omega_1 \wedge P\phi + P\phi \wedge \Omega_2 + \sqrt{-1}\rho \wedge P\phi + \left(\frac{K}{2}A - 2\tau A\right)\bar{\phi} \wedge \phi, \quad (3.1)$$

它等价于

$$DP := dP - \Omega_1 P + P\Omega_2 - 2\sqrt{-1}\rho P = P_{,1}\phi + \left(\frac{K}{2}A - 2\tau A\right)\bar{\phi}, \quad (3.2)$$

其中, DP 是 P 的共变微分, $P_{,1}$ 是 M 上局部 $k \times (N-k)$ 复矩阵值的光滑函数. 因为 f 等距, 故 $\text{tr}\tau = 1$.

对等式 (3.2) 两边再求外微分, 直接计算可得

$$d(P_{,1}\phi) = \Omega_1 \wedge P_{,1}\phi + P_{,1}\phi \wedge \Omega_2 + 2\sqrt{-1}\rho \wedge P_{,1}\phi - \frac{dK}{2}A \wedge \bar{\phi}$$

$$+ \left(\frac{3K}{2}P - 3\tau P - 3PA^*A \right) \bar{\phi} \wedge \phi. \quad (3.3)$$

通过微分算子分解 $d = \partial + \bar{\partial}$ 和公式 $\bar{\partial}\partial t = -\frac{1}{4}\Delta t \phi \wedge \bar{\phi}$, 本文作者计算了重要不变量 $\text{tr}\tau^2$ 和第二基本型模长平方在诱导度量下的 Laplacian.

定理 3.1 设 $f : M \rightarrow G(k, N)$ 是全纯浸入, 则

$$-\frac{\Delta \text{tr}\tau^2}{4} = 4\text{tr}\tau^3 - K\text{tr}\tau^2 - 2\text{tr}(\tau PP^*) - 2\text{tr}(A^*AP^*P), \quad (3.4)$$

$$-\frac{\Delta |P|^2}{4} = 3|P|^4 - 8(\text{tr}\tau^2)|P|^2 + 4(\text{tr}\tau^2)^2 - 4\text{tr}\tau^3 + 5\text{tr}(\tau PP^*) + 5\text{tr}(A^*AP^*P) - |P_{,1}|^2. \quad (3.5)$$

利用 (3.4)、(3.5) 和 Gauss 方程 (2.9), 易得

$$\Delta \left(\frac{5\text{tr}\tau^2}{8} + \frac{|P|^2}{4} \right) + 3|P|^4 - 3\text{tr}\tau^2|P|^2 - 6(\text{tr}\tau^2)^2 + 6\text{tr}\tau^3 = |P_{,1}|^2. \quad (3.6)$$

等式 (3.6) 两边分别在 M 上积分并利用散度定理, 得到 Simons 型积分不等式:

定理 3.2 设 M 是紧致无边的 Riemann 曲面, $f : M \rightarrow G(k, N)$ 是全纯浸入, 则

$$\int_M (|P|^4 - \text{tr}\tau^2|P|^2 - 2(\text{tr}\tau^2)^2 + 2\text{tr}\tau^3) * 1 \geq 0. \quad (3.7)$$

注意到 $S = 4|P|^2$, 不等式 (3.7) 等价于引言中的积分不等式 (1.1).

定理 3.3 (拥挤定理) 设 M 是紧致无边的 Riemann 曲面, $f : M \rightarrow G(k, N)$ 是具有常曲率 K 的全纯浸入.

(1) 如果在 M 上满足拥挤条件

$$|P|^4 - \text{tr}\tau^2|P|^2 - 2(\text{tr}\tau^2)^2 + 2\text{tr}\tau^3 \leq 0, \quad (3.8)$$

则 $K > 0$ 且 M 是 Riemann 球面 S^2 .

(2) 下面 3 个条件相互等价:

(a) $|P|^4 - \text{tr}\tau^2|P|^2 - 2(\text{tr}\tau^2)^2 + 2\text{tr}\tau^3 = 0$;

(b) $K^2 - 6K\text{tr}\tau^2 + 8\text{tr}\tau^3 = 0$;

(c) $P_{,1} = 0$.

证明 (1) 根据积分公式 (3.7) 和条件 (3.8) 可得

$$|P|^4 - \text{tr}\tau^2|P|^2 - 2(\text{tr}\tau^2)^2 + 2\text{tr}\tau^3 = 0 \quad (3.9)$$

和 $\int_M |P_{,1}|^2 * 1 = 0$, 故 $P_{,1} = 0$. 根据 Gauss 方程 (2.9) 和 (3.9) 可得

$$K^2 - 6K\text{tr}\tau^2 + 8\text{tr}\tau^3 = 0. \quad (3.10)$$

由求根公式知 $K = 3\text{tr}\tau^2 \pm \sqrt{9(\text{tr}\tau^2)^2 - 8\text{tr}\tau^3}$ 是正的, 故 K 为正常数. 由球面的刚性知 M 同胚于 Riemann 球面 S^2 .

(2) 由 (1) 的证明知 (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c), 下面证明 (c) $\Rightarrow$ (b). 如果 $P_{,1} = 0$, 结合 (3.3), 则有

$$KP - 2\tau P - 2PA^*A = 0. \quad (3.11)$$

易得

$$2\mathrm{tr}(\tau PP^* + A^* AP^* P) = K|P|^2. \quad (3.12)$$

结合 (3.4)、(3.5) 和 (3.12) 可得

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta \mathrm{tr} \tau^2}{4} &= 4\mathrm{tr} \tau^3 - K\mathrm{tr} \tau^2 - K|P|^2, \\ -\frac{\Delta |P|^2}{4} &= 3|P|^4 - 8(\mathrm{tr} \tau^2)|P|^2 + 4(\mathrm{tr} \tau^2)^2 - 4\mathrm{tr} \tau^3 + \frac{5}{2}K|P|^2. \end{aligned}$$

再结合 Gauss 方程可得

$$-\frac{\Delta K}{12} = K^2 - 6K\mathrm{tr} \tau^2 + 8\mathrm{tr} \tau^3.$$

根据 K 是常数可得 (b) 成立. 证毕. $\square$

注 3.1 (3.11) 在分类定理证明中起到关键作用.

4 $G(4, 8)$ 中非退化 PCCH S^2 的分类

本节考虑 $G(k, 2k)$ 中非退化的 PCCH S^2 的分类问题, 约定指标范围如下:

$$1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq k, \quad k+1 \leq \bar{\alpha} := \alpha + k, \quad \bar{\beta} := \beta + k, \quad \bar{\gamma} := \gamma + k \leq 2k.$$

根据 (2.7) 计算可得

$$d \det A = \det A (\mathrm{tr} \Omega_1 - \mathrm{tr} \Omega_2 + k\sqrt{-1}\rho) \pmod{\phi}.$$

因此 $\det A$ 是一个解析型函数, 即 $\det A$ 或者恒等于 0, 或者其零点是孤立的. 这些孤立的零点称为分歧点. 如果没有分歧点, 则称映射 f 是非分歧的.

引理 4.1 设 $f: S^2 \rightarrow G(k, 2k)$ 是非退化的 PCCH S^2 , 则 f 是非分歧的.

证明 由于全纯浸入 $f: M \rightarrow G(k, 2k)$ 是非退化的, 则 $\det A$ 的零点是孤立的. 易知 $|\det A|$ 是 S^2 上整体定义的. 设 p 是一个分歧点, 即 $|\det A|(p) = 0$, 根据分歧点的孤立性, 选取 p 的邻域 $U(p)$ 使得 p 是邻域中唯一的分歧点, 任取一个开集 $V \subset U(p)$, $p \notin V$. 在 V 上根据变换公式 (2.8) 以及复矩阵的奇异值分解, 可以选取合适的酉标架使得

$$A = \mathrm{diag}\{t_1, t_2, \dots, t_k\},$$

其中, $t_1, t_2, \dots, t_k$ 均为实正值函数, 称为 f 的奇异值. 记 $P = (p_{\alpha\beta})$, 从等式 (2.7) 可得

$$dt_\alpha - t_\alpha(\omega_{\alpha\alpha} - \omega_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} + \sqrt{-1}\rho) = p_{\alpha\alpha}\phi, \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} t_\alpha\omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - t_\beta\omega_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}\phi, \\ t_\beta\omega_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} - t_\alpha\omega_{\beta\alpha} = p_{\beta\alpha}\phi, \quad \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (4.2)$$

由于 $\omega_{\alpha\alpha}$ 、 $\omega_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}$ 和 $\sqrt{-1}\rho$ 都是纯虚的且 t_α 是实值的, 则根据 (4.1) 易得

$$dt_\alpha = p_{\alpha\alpha}\phi + \overline{p_{\alpha\alpha}\phi}.$$

等式 (3.11) 用分量改写为

$$(K - 2t_\alpha^2 - 2t_\beta^2)p_{\alpha\beta} = (K - 2t_\alpha^2 - 2t_\beta^2)p_{\beta\alpha} = 0. \quad (4.3)$$

在等式 (4.3) 中取 $\alpha = \beta$, 得 $(K - 4t_\alpha^2)p_{\alpha\alpha} = 0$. 下面证明 $p_{\alpha\alpha}$ 在 V 上恒为 0. 如果 $p_{\alpha\alpha}$ 在某点 x 处不为 0, 则在 x 的一个小邻域 $V_x \subset V$ 中不为 0. 因此在 V_x 中, $K = 4t_\alpha^2$. 由于 K 是常数, 故 t_α 在 V_x 中是常数. 从而 $p_{\alpha\alpha}$ 在 V_x 中恒为 0, 得到矛盾, 故 $p_{\alpha\alpha}$ 恒为 0 且 t_α 是常数. 又因为 f 是非退化且 $\text{tr}\tau = t_1^2 + \cdots + t_k^2 = 1$, 故 t_α ($1 \leq \alpha \leq k$) 都是介于 0 和 1 之间的正常数. 因此, 在邻域 V 上 $|\det A| = t_1 t_2 \cdots t_k$ 均为正常数. 由 V 的任意性以及 $|\det A|$ 的连续性, 得到 $|\det A|(p)$ 也是正值, 这与 p 是分歧点矛盾. 因此, $|\det A|$ 在 S^2 没有零点, 且为正常数. $\square$

利用 Jiao^[13] 已证结论: 当常 Gauss 曲率的全纯映射 $f: S^2 \rightarrow G(k, 2k)$ 是非分歧非退化时, 其 Gauss 曲率 $K = 4/k$.

引理 4.2 设 $f: S^2 \rightarrow G(k, 2k)$ 是非退化的 PCCH S^2 , 则 f 的 Gauss 曲率为 $K = 4/k$.

根据引理 4.1 的证明, 由 (4.1) 可知

$$\omega_{\alpha\alpha} - \omega_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} + \sqrt{-1}\rho = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq k. \quad (4.4)$$

由于 Ω 是反 Hermite 的, 从方程组 (4.2) 可解得

$$\begin{cases} \omega_{\alpha\beta} = \frac{t_\beta p_{\alpha\beta} \phi + t_\alpha \bar{p}_{\beta\alpha} \bar{\phi}}{t_\alpha^2 - t_\beta^2}, & \omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \frac{t_\alpha p_{\alpha\beta} \phi + t_\beta \bar{p}_{\beta\alpha} \bar{\phi}}{t_\alpha^2 - t_\beta^2}, & t_\alpha \neq t_\beta, \\ \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, & p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha} = 0, & t_\alpha = t_\beta. \end{cases} \quad (4.5)$$

结合拥挤条件 $P_{,1} = 0$ 和 $p_{\alpha\alpha} = 0$, 等式 (3.2) 采用分量形式可改写为

$$\sum_{\gamma \neq \alpha} p_{\alpha\gamma} \omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}} - \sum_{\gamma \neq \alpha} \omega_{\alpha\gamma} p_{\gamma\alpha} = \left(\frac{K}{2} t_\alpha - 2t_\alpha^3 \right) \bar{\phi}, \quad (4.6)$$

$$dp_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} p_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma} p_{\alpha\gamma} \omega_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} - 2\sqrt{-1}\rho p_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (4.7)$$

引理 4.3 $G(k, 2k)$ 中非退化 PCCH S^2 的分类转化为通过定理 3.3 中的拥挤条件从等式 (4.3)–(4.7) 中求解 $p_{\alpha\beta}$, 从而得到拉回的 Maurer-Cartan 形式 $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$, 由此可根据齐性流形中子流形的存在唯一性^[11] 确定浸入映射.

下面仅对 $G(4, 8)$ 的情形给出完整分类, 此时 $k = 4$, $K = 1$, 则可选取 $\phi = 2\varphi$, $\rho = -2\omega$.

证明 第 1 步 首先利用定理 3.3 中的拥挤条件 (b) $K^2 - 6K\text{tr}\tau^2 + 8\text{tr}\tau^3 = 0$ 确定奇异值 t_1, t_2, t_3 和 t_4 之间的关系. 利用

$$\begin{aligned} \text{tr}\tau &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = 1, \\ \text{tr}\tau^2 &= t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 + t_4^4, \\ \text{tr}\tau^3 &= t_1^6 + t_2^6 + t_3^6 + t_4^6, \end{aligned}$$

拥挤条件 (b) 可因式分解为

$$\left(\frac{1}{2} - t_1^2 - t_2^2 \right) \left(\frac{1}{2} - t_1^2 - t_3^2 \right) \left(\frac{1}{2} - t_2^2 - t_3^2 \right) = 0,$$

故 $t_1^2 + t_2^2 = 1/2$ 或者 $t_1^2 + t_3^2 = 1/2$ 或者 $t_2^2 + t_3^2 = 1/2$. 不失一般性 (可以交换酉标架中向量 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 的顺序), 有

$$t_2^2 + t_3^2 = \frac{1}{2}, \quad t_1^2 + t_4^2 = \frac{1}{2}.$$

第 2 步 根据奇异值重数分成如下 4 种情形.

情形 I 4 个互不相同的奇异值, 即 t_1 、 t_2 、 t_3 和 t_4 互不相同.

情形 II 1 个双重奇异值和 2 个单重奇异值, 即 $t_2 = t_3$, $t_1 \neq t_4$ 或者 $t_2 \neq t_3$, $t_1 = t_4$. 不失一般性, 不妨假设

$$t_2 = t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t_1 \neq t_4 \left(\neq \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

情形 III 2 个双重奇异值, 即 $t_1 = t_2$, $t_3 = t_4$ 或者 $t_1 = t_3$, $t_2 = t_4$. 不失一般性, 不妨假设

$$t_1 = t_2 \neq t_3 = t_4.$$

情形 IV 1 个重数为 4 的奇异值, 即

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注 4.1 不存在重数为 3 的奇异值.

第 3 步 对上述 4 种情形逐一讨论求解.

情形 I t_1 、 t_2 、 t_3 和 t_4 两两不同. 对于这种情形, 酉标架中的向量 $\{Z_A\}$ 允许如下变换:

$$\begin{aligned} Z_\alpha &\rightarrow Z_\alpha e^{\sqrt{-1}\theta_\alpha}, & Z_{\bar{\alpha}} &\rightarrow Z_{\bar{\alpha}} e^{\sqrt{-1}\theta_\alpha}, \\ \{Z_1, Z_5\} &\leftrightarrow \{Z_4, Z_8\}, & \{Z_2, Z_6\} &\leftrightarrow \{Z_3, Z_7\}, \end{aligned}$$

其中 θ_α 是 S^2 上局部光滑函数. 由于 $t_2^2 + t_3^2 = t_1^2 + t_4^2 = 1/2$, 所以

$$t_2^2 + t_4^2 \neq \frac{1}{2}, \quad t_3^2 + t_4^2 \neq \frac{1}{2}, \quad t_1^2 + t_2^2 \neq \frac{1}{2}, \quad t_1^2 + t_3^2 \neq \frac{1}{2}.$$

由关系式 (4.3) 可得

$$p_{12} = p_{21} = p_{13} = p_{31} = p_{24} = p_{42} = p_{34} = p_{43} = 0. \quad (4.8)$$

比较等式 (4.6) 两端 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 前的系数并利用 (4.5), 对固定的 α , 有

$$\begin{cases} \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{p_{\alpha\gamma} p_{\gamma\alpha}}{t_\alpha^2 - t_\gamma^2} = 0, \\ \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{|p_{\alpha\gamma}|^2 + |p_{\gamma\alpha}|^2}{t_\alpha^2 - t_\gamma^2} = 2t_\alpha^2 - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.9)$$

结合 (4.8) 和 (4.9) 可知

$$\begin{cases} p_{14} p_{41} = p_{23} p_{32} = 0, \\ \frac{|p_{14}|^2 + |p_{41}|^2}{t_1^2 - t_4^2} = 2t_1^2 - \frac{1}{2} \neq 0, & \frac{|p_{23}|^2 + |p_{32}|^2}{t_2^2 - t_3^2} = 2t_2^2 - \frac{1}{2} \neq 0. \end{cases}$$

由此通过选取合适的酉标架使得 $p_{41} = p_{32} = 0$, 且

$$p_{14} = 2t_1^2 - \frac{1}{2}, \quad p_{23} = 2t_2^2 - \frac{1}{2}.$$

由 (4.7) 可得

$$\omega_{11} - \omega_{88} + 2\sqrt{-1}\rho = 0, \quad \omega_{22} - \omega_{77} + 2\sqrt{-1}\rho = 0. \quad (4.10)$$

将情形 I 的求解结果总结成如下引理:

引理 4.4 可以选取合适的酉标架使得拉回的 Maurer-Cartan 形式 Ω 形如

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & t_4\phi & t_1\phi & 0 & 0 & 0 \\ & \omega_{22} & t_3\phi & 0 & 0 & t_2\phi & 0 & 0 \\ & & \omega_{33} & 0 & 0 & 0 & t_3\phi & 0 \\ & & & \omega_{44} & 0 & 0 & 0 & t_4\phi \\ & & & & \omega_{55} & 0 & 0 & t_1\phi \\ & & & & & \omega_{66} & t_2\phi & 0 \\ & & & & & & \omega_{77} & 0 \\ & & & & & & & \omega_{88} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

其中对角线下方元素可以由 Ω 的反 Hermite 对称性确定. 这样的酉标架中的向量 $\{Z_\alpha\}$ 选取还允许如下变换:

$$\begin{aligned} Z_1 &\rightarrow Z_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, & Z_2 &\rightarrow Z_1 e^{\sqrt{-1}\theta_2}, \\ Z_3 &\rightarrow Z_3 e^{\sqrt{-1}\theta_2}, & Z_4 &\rightarrow Z_4 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \end{aligned}$$

而向量 $\{Z_{\bar{\alpha}}\}$ 的变换与 $\{Z_\alpha\}$ 的变换一致 (下同).

根据 (4.11) 和 Maurer-Cartan 结构方程 (2.1) 易得

$$\begin{aligned} d(\omega_{11} + \omega_{44} + \omega_{55} + \omega_{88}) &= 0, \\ d(\omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{66} + \omega_{77}) &= 0. \end{aligned}$$

由引理 4.4, 可选取合适的 θ_1 和 θ_2 使得

$$\omega_{11} + \omega_{44} + \omega_{55} + \omega_{88} = \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{66} + \omega_{77} = 0. \quad (4.12)$$

根据 (4.4)、(4.10) 和 (4.12), 可以确定 Ω 中所有对角元:

$$\omega_{11} = \omega_{22} = -\sqrt{-1}\rho, \quad \omega_{33} = \omega_{44} = \omega_{55} = \omega_{66} = 0, \quad \omega_{77} = \omega_{88} = \sqrt{-1}\rho. \quad (4.13)$$

注意到 $\phi = 2\varphi$, $\rho = -2\omega$, 由 (4.11)、(4.13) 和 (2.11) 可以看出 $[Z_1 \wedge Z_4], [Z_2 \wedge Z_3] : S^2 \rightarrow G(2, 4)$ 酉等价于常曲率为 2 的全纯 2 维球面 $\alpha_{2,4}^t$, 故 f 酉等价于 $\alpha_{2,4}^t \oplus \alpha_{2,4}^s$, $0 < t, s < \pi/2$ 且 $t \neq s$, $t + s \neq \pi/2$, $t, s \neq \pi/4$.

情形 II $t_2 = t_3 = \sqrt{2}/2$, $t_1 \neq t_4$ ($\neq \sqrt{2}/2$). 这种情形下酉标架中的向量 $\{Z_\alpha\}$ 允许如下变换:

$$\begin{aligned} Z_1 &\rightarrow Z_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \quad Z_4 \rightarrow Z_4 e^{\sqrt{-1}\theta_4}, \\ \{Z_2, Z_3\} &\text{的一个 } U(2) \text{ 变换,} \\ Z_1 &\leftrightarrow Z_4. \end{aligned}$$

易见 (4.8) 仍成立. 由 (4.5) 可知

$$p_{23} = p_{32} = 0, \quad \omega_{23} = \omega_{67}.$$

等式 (4.9) 变为

$$\begin{cases} \sum_{\gamma \neq \alpha, t_\gamma \neq t_\alpha} \frac{p_{\alpha\gamma} p_{\gamma\alpha}}{t_\alpha^2 - t_\gamma^2} = 0, \\ \sum_{\gamma \neq \alpha, t_\gamma \neq t_\alpha} \frac{|p_{\alpha\gamma}|^2 + |p_{\gamma\alpha}|^2}{t_\alpha^2 - t_\gamma^2} = 2t_\alpha^2 - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.14)$$

取 $\alpha = 1$, 可得

$$\begin{cases} p_{14} p_{41} = 0, \\ \frac{|p_{14}|^2 + |p_{41}|^2}{t_1^2 - t_4^2} = 2t_1^2 - \frac{1}{2} \neq 0. \end{cases}$$

可以选取合适的酉标架使得 $p_{41} = 0$ 且

$$p_{14} = 2t_1^2 - \frac{1}{2}.$$

利用文献 [11, (6.23)] 中相同的证明方式, 可进一步选取 $\{Z_2, Z_3\}$ 的一个合适的 $U(2)$ 变换使得 $\omega_{23} = 0$. 因此类似情形 I, 可以选取合适的酉标架使得拉回的 Maurer-Cartan 形式 Ω 形如 (4.11) 和 (4.13), 其中 $t_2 = t_3$. 故 f 酉等价于 $\alpha_{2,4}^t \oplus \alpha_{2,4}^{\pi/4}$, $t \neq \pi/4$.

情形 III $t_1 = t_2 \neq t_3 = t_4$. 这种情形下酉标架中的向量 $\{Z_\alpha\}$ 允许如下变换:

$$\begin{aligned} \{Z_1, Z_2\} &\text{的一个 } U(2) \text{ 变换,} \\ \{Z_3, Z_4\} &\text{的一个 } U(2) \text{ 变换,} \\ \{Z_1, Z_2\} &\leftrightarrow \{Z_3, Z_4\}. \end{aligned}$$

由 (4.5) 可知

$$p_{12} = p_{21} = p_{34} = p_{43} = 0, \quad \omega_{12} = \omega_{56}, \quad \omega_{34} = \omega_{78}.$$

在 (4.14) 中分别取 $\alpha = 1, 2, 3, 4$, 可得

$$\begin{cases} \frac{p_{13}p_{31}}{t_1^2 - t_3^2} + \frac{p_{14}p_{41}}{t_1^2 - t_4^2} = 0, & \frac{|p_{13}|^2 + |p_{31}|^2}{t_1^2 - t_3^2} + \frac{|p_{14}|^2 + |p_{41}|^2}{t_1^2 - t_4^2} = 2t_1^2 - \frac{1}{2}, \\ \frac{p_{23}p_{32}}{t_2^2 - t_3^2} + \frac{p_{24}p_{42}}{t_2^2 - t_4^2} = 0, & \frac{|p_{23}|^2 + |p_{32}|^2}{t_2^2 - t_3^2} + \frac{|p_{24}|^2 + |p_{42}|^2}{t_2^2 - t_4^2} = 2t_2^2 - \frac{1}{2}, \\ \frac{p_{31}p_{13}}{t_3^2 - t_1^2} + \frac{p_{32}p_{23}}{t_3^2 - t_2^2} = 0, & \frac{|p_{31}|^2 + |p_{13}|^2}{t_3^2 - t_1^2} + \frac{|p_{32}|^2 + |p_{23}|^2}{t_3^2 - t_2^2} = 2t_3^2 - \frac{1}{2}, \\ \frac{p_{41}p_{14}}{t_4^2 - t_1^2} + \frac{p_{42}p_{24}}{t_4^2 - t_2^2} = 0, & \frac{|p_{41}|^2 + |p_{14}|^2}{t_4^2 - t_1^2} + \frac{|p_{42}|^2 + |p_{24}|^2}{t_4^2 - t_2^2} = 2t_4^2 - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.15)$$

利用 $t_1 = t_2, t_3 = t_4$, 由 (4.15) 易得

$$\begin{cases} p_{13}p_{31} = p_{24}p_{42} = -p_{14}p_{41} = -p_{23}p_{32}, \\ |p_{13}|^2 + |p_{31}|^2 = |p_{24}|^2 + |p_{42}|^2, \quad |p_{14}|^2 + |p_{41}|^2 = |p_{23}|^2 + |p_{32}|^2. \end{cases} \quad (4.16)$$

记

$$A = \begin{pmatrix} t_1 I_2 & 0 \\ 0 & t_3 I_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ \Omega_{43} & \Omega_{44} \end{pmatrix},$$

其中,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} p_{13} & p_{14} \\ p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}.$$

利用变换公式 (2.8), 取

$$U_1 = U_2 = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$$

是局部 $U(2) \times U(2)$ 值的光滑函数, 有

$$\tilde{Y} = U_{11} Y U_{12}^{-1}, \quad \tilde{Z} = U_{12} Z U_{11}^{-1},$$

其中 $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{Z}$ 是新酉标架下相应于 Y 和 Z 的量. 从而可知

$$|Y|^2, \quad |Z|^2, \quad |\det Y|^2, \quad |\det Z|^2$$

都是 S^2 上整体定义的.

利用分块矩阵, 由 (2.7) 和 (3.2) 并结合拥挤条件可推导出

$$\begin{cases} dY - \Omega_{11}Y + Y\Omega_{22} - \sqrt{-1}\rho Y = 0, \\ dZ - \Omega_{22}Z + Z\Omega_{11} - \sqrt{-1}\rho Z = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

利用行列式微分公式和 (4.17) 直接计算可得

$$\begin{cases} d(\det Y) = \det Y(\operatorname{tr}\Omega_{11} - \operatorname{tr}\Omega_{22} + 2\sqrt{-1}\rho), \\ d(\det Z) = \det Z(\operatorname{tr}\Omega_{22} - \operatorname{tr}\Omega_{11} + 2\sqrt{-1}\rho). \end{cases} \quad (4.18)$$

由 (4.17) 和 (4.18) 计算得到 $d|Y|^2 = d|Z|^2 = d|\det Y|^2 = d|\det Z|^2 = 0$, 故 $|Y|$ 、 $|Z|$ 、 $|\det Y|$ 和 $|\det Z|$ 都是常数. 由 (4.18), 有

$$d(\det Y \det Z) = 4\sqrt{-1}\rho \det Y \det Z.$$

故由文献 [6, 引理 9.1] 可知, $\det Y \det Z$ 是解析型函数, 它要么恒为 0, 要么零点孤立且在零点集外满足

$$\Delta \log |\det Y \det Z| \phi \wedge \bar{\phi} = 2d(4\sqrt{-1}\rho) = 4K\phi \wedge \bar{\phi} = 4\phi \wedge \bar{\phi},$$

即

$$\Delta \log |\det Y \det Z| = 4 > 0.$$

这与 $|\det Y \det Z|$ 是常数矛盾, 故 $|\det Y \det Z|$ 在 S^2 上恒等于 0, 从而 $\det Y = 0$ 或者 $\det Z = 0$. 不失一般性 (可交换 $\{Z_1, Z_2\}$ 和 $\{Z_3, Z_4\}$), 设 $\det Z = 0$. 因为 $|Z|^2$ 在 S^2 上是常数, 所以在 S^2 上有 $\text{rank} Z = 0$ 或者 $\text{rank} Z = 1$.

子情形 IIIi $\text{rank} Z = 0$, 即 $Z = 0$,

$$p_{31} = p_{32} = p_{41} = p_{42} = 0.$$

同样根据 $|Y|^2$ 和 $|\det Y|^2$ 的常值性可推得在 S^2 上 $\text{rank} Y = 1$ 或者 $\text{rank} Y = 2$ (当 $\text{rank} Y = 0$ 时, f 是全测地的).

如果 $\text{rank} Y = 1$, 进一步选取酉标架使得

$$Y = \begin{pmatrix} p_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{13} \neq 0, \quad \text{即 } p_{14} = p_{23} = p_{24} = 0.$$

这与 (4.16) 矛盾.

因此 $\text{rank} Y = 2$, 进一步选取酉标架使得

$$Y = \begin{pmatrix} p_{13} & 0 \\ 0 & p_{24} \end{pmatrix}, \quad p_{13} \neq 0, \quad p_{24} \neq 0, \quad \text{即 } p_{14} = p_{23} = 0.$$

根据 (4.15) 和 (4.16) 以及适当的标架选取, 可得

$$p_{13} = p_{24} = 2t_1^2 - \frac{1}{2}.$$

由 (4.17) 的第一个方程可知 $\omega_{12} = \omega_{34}$. 由于 $Y = (2t_1^2 - \frac{1}{2})I_2$, 所以酉标架中向量 Z_1, Z_2 和 Z_3, Z_4 还允许相差一个相同的 $U(2)$ 变换. 因此利用与文献 [11, (6.23)] 相同的证明方式, 经过合适的 $U(2)$ 变换可使得 $\omega_{12} = \omega_{34} = 0$. 将求解的 Maurer-Cartan 形式总结如下:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & t_3\phi & 0 & t_1\phi & 0 & 0 & 0 \\ & \omega_{22} & 0 & t_3\phi & 0 & t_1\phi & 0 & 0 \\ & & \omega_{33} & 0 & 0 & 0 & t_3\phi & 0 \\ & & & \omega_{44} & 0 & 0 & 0 & t_3\phi \\ & & & & \omega_{55} & 0 & t_1\phi & 0 \\ & & & & & \omega_{66} & 0 & t_1\phi \\ & & & & & & \omega_{77} & 0 \\ & & & & & & & \omega_{88} \end{pmatrix}.$$

类似于情形 I 的讨论, 通过适当的标架旋转, 对角元可由 (4.13) 给出. 从而易见 $[Z_1 \wedge Z_3], [Z_2 \wedge Z_4]: S^2 \rightarrow G(2, 4)$ 都酉等价于 $\alpha_{2,4}^t$, 故 f 酉等价于 $\alpha_{2,4}^t \oplus \alpha_{2,4}^t, t \neq \pi/4$.

子情形 IIIii $\text{rank} Z = 1$, 选取酉标架使得

$$Z = \begin{pmatrix} p_{31} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{31} \neq 0, \quad \text{即 } p_{32} = p_{41} = p_{42} = 0.$$

由 (4.16) 可知, $p_{13} = 0$, $|p_{31}| = |p_{24}| \neq 0$, $|p_{14}| = |p_{23}|$. 由 (4.17) 可得 $\omega_{12} = \omega_{34} = 0$ 和

$$\begin{cases} dp_{31} = p_{31}(\sqrt{-1}\rho + \omega_{33} - \omega_{11}), \\ dp_{24} = p_{24}(\sqrt{-1}\rho + \omega_{22} - \omega_{44}). \end{cases}$$

因此 $|p_{31}|$ 和 $|p_{24}|$ 均为常数. 上式蕴涵着 $d\omega_{11} + d\omega_{22} = d\omega_{33} + d\omega_{44}$, 即 $d(\text{tr}\Omega_{11}) = d(\text{tr}\Omega_{22})$. 由 (4.17) 第一个方程和文献 [6, 引理 9.1] 可知, 如果 $\det Y$ 不为 0, 则有

$$\Delta \log |\det Y| \phi \wedge \bar{\phi} = 2d(\text{tr}\Omega_{11} - \text{tr}\Omega_{22} + 2\sqrt{-1}\rho) = 2K\phi \wedge \bar{\phi} = 2\phi \wedge \bar{\phi},$$

即

$$\Delta \log |\det Y| = 2 > 0.$$

这与 $|\det Y|$ 是常数矛盾. 故 $|\det Y| = |p_{14}p_{23}|$ 在 S^2 上恒等于 0. 又因为 $|p_{14}| = |p_{23}|$, 故 $p_{14} = p_{23} = 0$. 再根据 (4.15) 和 (4.16) 以及适当的标架旋转, 有

$$p_{31} = p_{24} = 2t_1^2 - \frac{1}{2}.$$

因此, 对于这种子情形, Maurer-Cartan 形式可总结如下:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & t_1\bar{\phi} & 0 & t_1\phi & 0 & 0 & 0 \\ & \omega_{22} & 0 & t_3\phi & 0 & t_1\phi & 0 & 0 \\ & & \omega_{33} & 0 & 0 & 0 & t_3\phi & 0 \\ & & & \omega_{44} & 0 & 0 & 0 & t_3\phi \\ & & & & \omega_{55} & 0 & t_3\bar{\phi} & 0 \\ & & & & & \omega_{66} & 0 & t_1\phi \\ & & & & & & \omega_{77} & 0 \\ & & & & & & & \omega_{88} \end{pmatrix}.$$

类似情形 I 的讨论, 可确定对角元

$$\omega_{11} = \omega_{44} = \omega_{55} = \omega_{66} = 0, \quad \omega_{22} = \omega_{33} = -\sqrt{-1}\rho, \quad \omega_{44} = \omega_{88} = \sqrt{-1}\rho.$$

易见 $[Z_1 \wedge Z_3], [Z_2 \wedge Z_4] : S^2 \rightarrow G(2, 4)$ 分别酉等价于 $\alpha_{2,4}^{\pi/2-t}$ 和 $\alpha_{2,4}^t$, 故 f 酉等价于 $\alpha_{2,4}^{\pi/2-t} \oplus \alpha_{2,4}^t$, $t \neq \pi/4$.

情形 IV $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \sqrt{2}/2$. 这种情形下酉标架中向量 $\{Z_\alpha\}$ 和 $\{Z_{\bar{\alpha}}\}$ 允许相差一个相同的 $U(4)$ 变换, 则类似文献 [11, (6.23)] 的证明, 可选取酉标架使得

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

从而 $P = 0$, f 是全测地浸入. 易见 f 酉等价于 $\alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,2} \oplus \alpha_{1,2}$, 也酉等价于 $\alpha_{2,4}^{\pi/4} \oplus \alpha_{2,4}^{\pi/4}$ (参见文献 [8]).

综上 4 种情形的讨论, 至此完成了定理 1.4 的证明. $\square$

注 4.2 本文利用 Mathematica 软件验证了当 $k = 5$ 和 $k = 6$ 时拥挤条件 (b) 没有类似于 $G(4, 8)$ 情形时的因式分解式. 故需要寻找其他方式确定奇异值之间的某些定量关系. 我们将在后续的文章中进一步研究一般 $G(k, 2k)$ 中非退化 PCCH S^2 的分类.

致谢 感谢彭家贵教授长期以来的支持和关心.

参考文献

- 1 Bolton J, Jensen G R, Rigoli M, et al. On conformal minimal immersions of S^2 into $\mathbb{C}P^n$. *Math Ann*, 1988, 279: 599–620
- 2 Burstall F E, Wood J C. The construction of harmonic maps into complex Grassmannians. *J Differential Geom*, 1986, 23: 255–297
- 3 Chern S S, do Carmo M P, Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. In: *Functional Analysis and Related Fields* (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968). New York-Berlin: Springer-Verlag, 1970, 59–75
- 4 Chern S S, Wolfson J G. Harmonic maps of the two-sphere into a complex Grassmann manifold II. *Ann of Math* (2), 1987, 125: 301–335
- 5 Chi Q S, Zheng Y B. Rigidity of pseudo-holomorphic curves of constant curvature in Grassmann manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 1989, 313: 393–406
- 6 Eschenburg J H, Guadalupe I V, Tribuzy R. The fundamental equations of minimal surfaces in $\mathbb{C}P^2$. *Math Ann*, 1985, 270: 571–598
- 7 Fei J. Classification of homogeneous holomorphic two-spheres in complex Grassmann manifolds. *Differential Geom Appl*, 2019, 62: 1–38
- 8 Fei J, He L, Wang J. Rigidity of homogeneous holomorphic S^2 in a complex Grassmann manifold $G(2, N)$. *J Geom Anal*, 2023, 33: 324
- 9 Fei J, Jiao X X, Xiao L, et al. On the classification of homogeneous 2-spheres in the complex Grassmannians. *Osaka J Math*, 2013, 50: 135–152
- 10 Fei J, Wang J. Pinched constantly curved holomorphic two-spheres in the complex Grassmann manifolds. *Results Math*, 2024, 79: 209
- 11 Griffiths P. On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry. *Duke Math J*, 1974, 41: 775–814
- 12 He L, Jiao X X, Zhou X C. Rigidity of holomorphic curves of constant curvature in $G(2, 5)$. *Differential Geom Appl*, 2015, 43: 21–44
- 13 Jiao X X. Pseudo-holomorphic curves of constant curvature in complex Grassmannians. *Israel J Math*, 2008, 163: 45–60
- 14 Jiao X X, Peng J G. Classification of holomorphic spheres of constant curvature in complex Grassmann manifold $G(2, 5)$. *Differential Geom Appl*, 2004, 20: 267–277
- 15 Jiao X X, Peng J G. On holomorphic curves of constant curvature in the complex Grassmann manifold $G(2, 5)$. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed*, 2011, 31: 237–248
- 16 Jiao X X, Yu Y. On holomorphic curves in a complex Grassmann manifold $G(2, n)$. *Arch Math (Basel)*, 2011, 96: 291–300
- 17 Lawson H B Jr. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann of Math* (2), 1969, 89: 187–197
- 18 Li Z Q, Yu Z H. Constant curved minimal 2-spheres in $G(2, 4)$. *Manuscripta Math*, 1999, 100: 305–316
- 19 Ogiue K. Complex submanifolds of the complex projective space with second fundamental form of constant length. *Kōdai Math Sem Rep*, 1969, 21: 252–254
- 20 Peng C K, Xu X W. Classification of minimal homogeneous two-spheres in the complex Grassmann manifold $G(2, n)$. *J Math Pures Appl* (9), 2015, 103: 374–399
- 21 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math* (2), 1968, 88: 62–105
- 22 Tanno S. Compact complex submanifolds immersed in complex projective spaces. *J Differential Geom*, 1973, 8: 629–641
- 23 Uhlenbeck U. Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model). *J Differential Geom*, 1989, 30: 1–50

- 24 Wang J, Fei J, Jiao X X. Simons-type inequalities for minimal surfaces with constant Kähler angle in a complex hyperquadric. *Differential Geom Appl*, 2023, 88: 102001
- 25 Wang J, Fei J, Xu X W. Pinching for holomorphic curves in a complex Grassmann manifold $G(2, n; \mathbb{C})$. *Differential Geom Appl*, 2022, 80: 101840

Classification of pinched constantly curved holomorphic two-spheres in the complex Grassmann manifolds

Jie Fei, Xiaoxiang Jiao & Jun Wang

Abstract In this paper, we propose a formation mechanism named “the direct sum of foundation stones” about pinched constantly curved holomorphic two-spheres (write “PCCH S^2 ” briefly) in the complex Grassmann manifolds $G(k, N)$, and we completely classify the non-degenerated PCCH S^2 in $G(4, 8)$.

Keywords the complex Grassmann manifolds, pinched, constant Gaussian curvature, holomorphic two-spheres

MSC(2020) 53C20, 53C24

doi: 10.1360/SSM-2024-0056