玻色场中量子态的非 Gauss 性

献给严加安院士 80 华诞

傅双双¹, 骆顺龙^{2,3}, 张悦^{4,5*}

1. 北京科技大学数理学院, 北京 100083;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;

4. 北京量子信息科学研究院, 北京 100193;

5. 北京大学物理学院, 北京 100871

E-mail: shuangshuang.fu@ustb.edu.cn, luosl@amt.ac.cn, zhangyue@baqis.ac.cn

收稿日期: 2020-09-30; 接受日期: 2020-12-17; 网络出版日期: 2021-11-05; * 通信作者

中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: FRF-TP-19-012A3) 和国家自然科学基金 (批准号: 11875317 和 61833010) 资助项目

摘要 在连续变量的量子信息理论中, 玻色场中量子态的非 Gauss 性是一种重要的资源. 近十年来, 人们引进了多种基于距离和相对熵的非 Gauss 性度量, 用来刻画非 Gauss 性的不同侧面. 由于 Gauss 量子态的集合在辛变换所对应的酉操作下具有不变性, 因此, 我们希望非 Gauss 性的度量也具有这种辛变换下的不变性. 基于 Gauss 态正好是一类量子不确定性关系的最小不确定性态, 本文提出一个具有辛不变性的非 Gauss 性度量并揭示其基本性质. 对玻色场中的一些重要量子态, 本文计算其非 Gauss 性.

关键词 玻色场 Gauss 态 非 Gauss 性 辛群 不确定性关系 Wigner-Yanase 信息

MSC (2020) 主题分类 81P15, 81P16

1 引言

Gauss 态在连续变量的量子信息理论和实验中都起着基础的作用, 扮演着核心的角色 (参见文献 [1–5]). Gauss 态有几个显著而重要的特征: (i) Gauss 态有优美的数学结构, 可以用二次型和辛群简洁刻画, 便于理论分析 (参见文献 [6, 7]); (ii) Gauss 态在物理实验中容易制备和操控; (iii) Gauss 态包含了相当广泛的态, 如相干态、压缩相干态和热态等; (iv) Gauss 态是研究经典和量子信息的基本平台 (参见文献 [8–10]).

随着连续变量的量子信息理论和技术的快速发展, 人们逐渐认识到非 Gauss 态在量子信息处理中的重要性 (参见文献 [11–16]). 近十几年来, 有关非 Gauss 性的刻画和量化得到了广泛的关注和研究, 各种非 Gauss 性度量被引入 (参见文献 [17–23]). 但是, 非 Gauss 性是一个非常复杂的概念, 没有任何

英文引用格式: Fu S, Luo S, Zhang Y. Non-Gaussianity of quantum states in bosonic fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1731–1742, doi: 10.1360/SSM-2020-0295

一个度量能够完整地描述非 Gauss 性的所有方面, 现有的非 Gauss 性的各种度量都只是从不同的侧面对其进行刻画.

文献 [24] 通过对基于 Wigner-Yanase 信息改进的 Heisenberg 不确定性关系进行研究 (参见文献 [25]), 证明了 Gauss 态正是这种量子不确定性关系的最小不确定性态, 而所有非 Gauss 态的量子不确定性乘积都严格大于下界值. 基于这一结果, Fu 等 [23] 借助量子不确定性, 提出了一种非 Gauss 性的度量. 由于玻色场中的正则对易关系在辛变换下是不变的, 而 Gauss 态的集合在辛变换所对应的 Gauss 酉操作下也是不变的 (参见文献 [4]), 因此希望一个好的非 Gauss 性度量能够具有辛不变性. 通过分析, 我们发现文献 [23] 中提出的非 Gauss 性度量并不具有辛不变性. 本文的主要工作是基于量子不确定性关系, 通过在整个辛群上取量子不确定性的最小值, 提出一个具有辛不变性的非 Gauss 性度量. 这改进了之前提出的不具有辛不变性的非 Gauss 性度量. 对于一些常见的重要量子态, 我们得到它们非 Gauss 性的显式表达式.

2 Gauss 性与非 Gauss 性

本节简要回顾经典概率论中 Gauss 性与非 Gauss 性的定义及度量. 相应地, 我们也回顾单模玻色场中 Gauss 量子态的定义和非 Gauss 性.

2.1 经典概率论中的 Gauss 性与非 Gauss 性

在经典概率论与数理统计中, Gauss (正态) 分布是一种十分常见和重要的分布. 不仅如此, 由中心极限定理可知, Gauss 分布在经典概率论中占据着核心地位. 服从 Gauss 分布的一维随机变量 X , 其概率密度函数可表示为

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $u = E(X)$ 表示随机变量 X 的均值 (一阶原点矩), 而 $\sigma^2 = E(X-u)^2$ 表示随机变量的方差 (二阶中心矩). 服从 Gauss 分布的随机变量, 其概率密度函数完全由其一阶矩和二阶矩确定.

对于一般的随机变量 Y , 其非 Gauss 性的量化一般是基于两方面的考虑. 首先, 可以从高阶矩出发定义峰度 (kurtosis)

$$\text{Kurtosis}(Y) = \frac{E(Y - E(Y))^4}{(E(Y - E(Y))^2)^2} - 3.$$

对 Gauss 随机变量而言, 上述表达式恒为 0. 因此, 只要上述表达式不为 0, 就表示相应的随机变量不是 Gauss 随机变量. 此外, 对于连续随机变量 $Y \sim f(y)$, 其 Shannon 熵定义为 (参见文献 [26])

$$H(Y) = - \int f(y) \ln f(y) dy.$$

众所周知, 当方差固定时, Gauss 随机变量具有最大的 Shannon 熵. 因此, 人们提出了一种非 Gauss 性的度量, 称为负熵 (negentropy), 其表达式为 (参见文献 [18])

$$N(Y) = H(Y_g) - H(Y),$$

其中 Y_g 是与随机变量 Y 具有相同方差的 Gauss 随机变量. 当然, 还有很多其他度量可刻画经典概率分布的非 Gauss 性.

2.2 量子态的 Gauss 性与非 Gauss 性

在量子光学中, 考虑一个单模玻色场, 其湮灭算子 a 和生成算子 $a^\dagger$ 满足正则对易关系

$$[a, a^\dagger] = \mathbf{1},$$

其中 $[A, B] = AB - BA$ 表示算子的对易 (交换) 子, $\mathbf{1}$ 为单位算子. 相应地, 玻色场中的“位置”和“动量”算子 (canonical field quadratures) 可表示为

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad P = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a - a^\dagger),$$

它们满足

$$[Q, P] = i\mathbf{1}.$$

玻色场中的任意量子态 ρ 都可以由其特征函数

$$\chi_\lambda(\rho) = \text{tr}(\rho D_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

确定, 其中 $D_\lambda = \exp(\lambda a^\dagger - \bar{\lambda} a)$ 是 Weyl 平移算子, 满足

$$D_z D_w = \exp\left(\frac{1}{2}(z\bar{w} - \bar{z}w)\right) D_{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

单模玻色场中的量子态 ρ_g 是 Gauss 态当且仅当其特征函数可以表示为如下形式 (参见文献 [6, 7]):

$$\chi_\lambda(\rho_g) = \exp\left(-\frac{1}{2}\Lambda V \Lambda^T + iu \Lambda^T\right), \quad \Lambda = (\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

其中 $u = (\langle Q \rangle, \langle P \rangle)$, $V = (v_{jk})$ 为量子态 ρ_g 的协方差矩阵, 其矩阵元为

$$v_{jk} = \frac{1}{2}(\langle \{R_j, R_k\} \rangle - \langle R_j \rangle \langle R_k \rangle), \quad j, k = 1, 2,$$

$R_1 = Q$, $R_2 = P$, $\langle A \rangle = \text{tr}(\rho_g A)$ 表示算子 A 在状态 ρ_g 的均值, $\{A, B\} = AB + BA$ 为算子 A 和 B 的反对易子. 单模 Gauss 态的集合记为 $\mathcal{G}$.

从 Gauss 量子态的定义可以看到, 其特征函数就是经典 Gauss 函数的形式, 因此, Gauss 量子态也完全由其一阶矩和二阶矩确定. 对单模玻色场, Gauss 态还可等价地用平移压缩热态表示 (参见文献 [27, 28]), 即

$$\rho_g = D_\alpha S_\zeta \rho_{\bar{n}} S_\zeta^\dagger D_\alpha^\dagger, \quad \alpha, \zeta \in \mathbb{C}, \quad \bar{n} \geq 0,$$

其中

$$S_\zeta = \exp\left(\frac{1}{2}(\zeta a^{\dagger 2} - \bar{\zeta} a^2)\right), \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

为压缩算子, 而

$$\rho_{\bar{n}} = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}\right)^n |n\rangle \langle n|$$

为热态 (thermal state), 其平均光子数为 $\bar{n} = \text{tr} \rho_{\bar{n}} a^\dagger a$, $|n\rangle$ 是 Fock 态, 满足 $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$, $n = 0, 1, \dots$

Gauss 量子态在连续变量的量子信息中有着特别重要的地位, 但近年来随着量子信息理论的发展和技术的进步, 人们逐渐认识到非 Gauss 量子态在很多量子信息处理任务中可作为一种有用的资源 (参见文献 [11–16]). 因此, 有关非 Gauss 性的刻画和量化开始得到广泛研究 (参见文献 [17–23]). 对于单模玻色场中的任意一个量子态, 都有一个参考 Gauss 态与其对应, 它们具有相同的一阶矩和二阶矩. 很多非 Gauss 性的度量都是基于量子态与其参考 Gauss 态的距离定义的 (参见文献 [11–15]). 但是, 非 Gauss 性是玻色场中很多量子态的一个非常丰富和微妙的特征, 对非 Gauss 性的刻画需要从多个角度去展开, 除了上述基于距离的非 Gauss 性度量外, 还有基于保真度和不确定性关系的非 Gauss 性度量 (参见文献 [21–23]). 下面基于改进的量子不确定性关系, 给出一个具有辛不变性的非 Gauss 性度量并揭示其基本性质.

3 基于不确定性的非 Gauss 性度量

本节首先回顾一类改进的量子不确定性关系, 证明 Gauss 态正是这类量子不确定性关系的最小不确定性态. 然后给出本文的主要结果, 即提出一个新的非 Gauss 性度量, 通过对其性质的分析和具体例子的计算, 说明这一度量的合理性, 并与之前的度量进行比较.

3.1 改进的量子不确定性关系

不确定性关系是量子力学中的一个基本原理 (参见文献 [29]), 位置算子 Q 和动量算子 P 的不确定性关系由 Heisenberg [30] 在 1927 年首次提出. 我们知道, 相干态和压缩相干态, 作为特殊的 Gauss 态, 是满足 Heisenberg 不确定性关系的最小不确定性态 (参见文献 [31, 32]), 即它们能够使得下面的不确定性关系中的等号成立:

$$V(\rho, Q)V(\rho, P) \geq \frac{1}{4} |\text{tr}(\rho[Q, P])|^2 = \frac{1}{4}, \quad (3.1)$$

其中 $V(\rho, A) = \text{tr}(\rho A^2) - (\text{tr}(\rho A))^2$ 表示算子 A 在量子态为 ρ 时的方差, 量化的是总的不确定性.

对上述 Heisenberg 不确定性关系进行信息修正, 文献 [25] 提出了如下改进的不确定性关系:

$$U(\rho, Q)U(\rho, P) \geq \frac{1}{4} |\text{tr}(\rho[Q, P])|^2 = \frac{1}{4}, \quad (3.2)$$

其中 $U(\rho, X) = \sqrt{V^2(\rho, X) - C^2(\rho, X)}$ 可理解为量子不确定性的度量, $C(\rho, X) = V(\rho, X) - I(\rho, X)$ 可作为经典不确定性的度量, 而 $I(\rho, X) = -\frac{1}{2} \text{tr}([\sqrt{\rho}, X]^2)$ 正是著名的 Wigner-Yanase 信息 (参见文献 [33–40]). 因 $0 \leq I(\rho, X) \leq V(\rho, X)$, 故 $U(\rho, X) \leq V(\rho, X)$, 因此, 不确定性关系 (3.2) 改进了 Heisenberg 不确定性关系 (3.1).

3.2 Gauss 态作为最小不确定性态

对单模玻色场, 考虑复表示情形的辛变换, 它们构成如下辛群:

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \left\{ s = \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \nu \\ \bar{\nu} & \mu \end{pmatrix} : \mu, \nu \in \mathbb{C}, |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \right\},$$

正则对易关系在辛变换下是不变的, 即若

$$\begin{pmatrix} a_s \\ a_s^\dagger \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \nu \\ \bar{\nu} & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}, \quad s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}},$$

则依然有 $[a_s, a_s^\dagger] = \mathbf{1}$. 下面给出本文的第一个理论结果:

定理 3.1 考虑对应于

$$Q_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_s + a_s^\dagger), \quad P_s = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a_s - a_s^\dagger)$$

的改进了的量子不确定性关系

$$U(\rho, Q_s)U(\rho, P_s) \geq \frac{1}{4}, \quad s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}, \quad (3.3)$$

则 Gauss 态的集合 $\mathcal{G}$ 正好是对应上述不确定性关系的最小不确定性态的集合, 即如果记

$$\mathcal{G}_s = \left\{ \rho : U(\rho, Q_s)U(\rho, P_s) = \frac{1}{4} \right\}, \quad s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}},$$

则

$$\mathcal{G} = \bigcup_{s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}_s.$$

证明 设 Γ_s 是辛变换 s 的西表示 (参见文献 [41–46]), 满足

$$\begin{aligned} \Gamma_s^\dagger a \Gamma_s &= a_s = \bar{\mu}a + \nu a^\dagger, \\ \Gamma_s^\dagger a^\dagger \Gamma_s &= a_s^\dagger = \mu a^\dagger + \bar{\nu}a, \end{aligned}$$

不确定性关系 (3.3) 可等价地表述为

$$U(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger, Q)U(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger, P) \geq \frac{1}{4}, \quad s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}. \quad (3.4)$$

为了求解上述不确定性关系的最小不确定性态, 首先分析如下不确定性关系:

$$U(\sigma, Q)U(\sigma, P) \geq \frac{1}{4} \quad (3.5)$$

的最小不确定性态. 记

$$J(\sigma, X) = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \sqrt{\sigma}, X - \text{tr}(\sigma X) \}^2,$$

则

$$\begin{aligned} I(\sigma, X) &= V(\sigma, X) - C(\sigma, X), \\ J(\sigma, X) &= V(\sigma, X) + C(\sigma, X), \\ U(\sigma, X) &= \sqrt{I(\sigma, X)J(\sigma, X)}. \end{aligned}$$

相应地, 不确定性关系 (3.5) 可以表为

$$I(\sigma, Q)J(\sigma, Q)I(\sigma, P)J(\sigma, P) \geq \frac{1}{16}. \quad (3.6)$$

实际上 (参见文献 [25])

$$\begin{cases} I(\sigma, Q)J(\sigma, P) \geq \frac{1}{4}, \\ I(\sigma, P)J(\sigma, Q) \geq \frac{1}{4}, \end{cases} \quad (3.7)$$

因此, 不确定性关系 (3.5) 中等号成立当且仅当 (3.7) 中的两个不等式中等号都成立. 由 Schwarz 不等式, 可得到最小不确定性态应同时满足 (参见文献 [24])

$$\{\sqrt{\sigma}, Q - \text{tr}(\sigma Q)\} = ix[\sqrt{\sigma}, P], \quad (3.8)$$

$$\{\sqrt{\sigma}, P - \text{tr}(\sigma P)\} = iy[\sqrt{\sigma}, Q], \quad (3.9)$$

其中 $x^2 = 1/4I^2(\sigma, P)$, $y^2 = 1/4I^2(\sigma, Q)$.

下面基于象征演算 (symbol calculus), 对满足等式 (3.8) 和 (3.9) 的量子态进行分析, 给出满足上述要求的量子态的象征 (symbol), 证明其恰好对应 Gauss 量子态的象征 (参见文献 [47–49]).

在单模玻色场的 Fock-Bargmann 表示中, Hilbert 空间为

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 解析}, \langle f | f \rangle < \infty\},$$

其中

$$\langle f | h \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} h(z) e^{-\bar{z}z} d\text{Re}z d\text{Im}z.$$

湮灭算子 a 和生成算子 $a^\dagger$ 则分别可表示为

$$af(z) = \frac{\partial}{\partial z} f(z), \quad a^\dagger f(z) = zf(z).$$

相干态用函数 $e_\xi(z) = \exp(\bar{\xi}z)$ 表示 (未归一化), 通常记为 $|\xi\rangle = e_\xi$. 任意一个定义域包含相干态的算子 T 都可以用其 Wick 象征表示为

$$\widehat{T}(\bar{\xi}, \eta) = \langle e_\xi | T | e_\eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}.$$

不难证明 (参见文献 [49])

$$\begin{aligned} \widehat{Ta}(\bar{\xi}, \eta) &= \eta \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta), \quad \widehat{aT}(\bar{\xi}, \eta) = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta), \\ \widehat{a^\dagger T}(\bar{\xi}, \eta) &= \bar{\xi} \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta), \quad \widehat{Ta^\dagger}(\bar{\xi}, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta). \end{aligned}$$

令 $T = \sqrt{\rho}$, 则算子等式 (3.8) 和 (3.9) 可以表示为如下的偏微分方程组:

$$(u' - y'(\bar{\xi} - \eta)) \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta), \quad (3.10)$$

$$(x'(\bar{\xi} + \eta) + v') \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \widehat{T}(\bar{\xi}, \eta), \quad (3.11)$$

其中

$$y' = \frac{y+1}{y-1}, \quad x' = \frac{x-1}{x+1}, \quad u' = \frac{2u}{y+1}, \quad v' = \frac{2v}{x+1}, \quad u = \text{tr}(\sigma(a - a^\dagger)), \quad v = \text{tr}(\sigma(a + a^\dagger)).$$

解微分方程组 (3.10) 和 (3.11) 得

$$\hat{T}(\bar{\xi}, \eta) = c \exp \left(\frac{x' - y'}{4} (\bar{\xi}^2 + \eta^2) + \frac{x' + y'}{2} \bar{\xi} \eta + \frac{u' + v'}{2} \bar{\xi} + \frac{v' - u'}{2} \eta \right),$$

其中 c 为常数. 因此, 满足不确定性关系 (3.5) 的最小不确定性态 $\sigma = T^2$ 对应的是 Gauss 态. 结合不等式 (3.3)–(3.5), 可以看到, 存在 $s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}$, 使得对应不确定性关系 (3.3) 的量子态 ρ 满足 $\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger = \sigma$, 即 $\rho = \Gamma_s^\dagger \sigma \Gamma_s$. 由于 σ 为 Gauss 态, Γ_s 为辛变换对应的酉操作, 而 Gauss 态在辛变换对应的酉操作下依然是 Gauss 态, 我们这样就证明了对应改进的不确定性关系 (3.3) 的最小不确定性态是 Gauss 态.

结合文献 [23] 中的证明可以看到, 对任意 Gauss 态, 都存在 $s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}$, 使得不确定性关系 (3.3) 中的等号成立. 综合以上, 得到 $\mathcal{G} = \bigcup_{s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \mathcal{G}_s$. $\square$

3.3 基于量子不确定性的非 Gauss 性度量

利用 Gauss 态是量子不确定性关系 (3.3) 的最小不确定性态这一物理刻画, 我们可以用量子不确定性来量化非 Gauss 性. 引进如下基于量子不确定性的非 Gauss 性度量:

$$N_g(\rho) = \min_{s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \sqrt{U(\rho, Q_s) U(\rho, P_s)} - \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

定理 3.2 非 Gauss 性度量 $N_g(\rho)$ 满足如下性质.

- (1) 对任意量子态 ρ , 有 $N_g(\rho) \geq 0$, 其中 $N_g(\rho) = 0$ 当且仅当该量子态 ρ 是 Gauss 态.
- (2) $N_g(\rho)$ 在相空间的平移变换下是不变的, 即

$$N_g(D_\lambda \rho D_\lambda^\dagger) = N_g(\rho), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

- (3) $N_g(\rho)$ 在基于辛变换的酉操作下是不变的, 即

$$N_g(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger) = N_g(\rho), \quad \forall s \in \text{Sp}_{\mathbb{C}},$$

其中 Γ_s 是辛变换 $s = \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \nu \\ \bar{\nu} & \mu \end{pmatrix}$ 的酉表示: $\Gamma_s^\dagger a \Gamma_s = \bar{\mu} a + \nu a^\dagger$, $\Gamma_s^\dagger a^\dagger \Gamma_s = \mu a^\dagger + \bar{\nu} a$. 特别地, $N_g(\rho)$ 在相空间的旋转变换下是不变的, 即

$$N_g(e^{i\theta a^\dagger a} \rho e^{-i\theta a^\dagger a}) = N_g(\rho), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

证明 上述性质 (1) 和 (2) 可以很容易从非 Gauss 性度量的定义得到. 性质 (3) 可如下证明:

$$\begin{aligned} N_g(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger) &= \min_{t \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \sqrt{U(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger, P_t) U(\Gamma_s \rho \Gamma_s^\dagger, Q_t)} - \frac{1}{2} \\ &= \min_{t \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \sqrt{U(\rho, \Gamma_s^\dagger P_t \Gamma_s) U(\rho, \Gamma_s^\dagger Q_t \Gamma_s)} - \frac{1}{2} \\ &= \min_{s' \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}} \sqrt{U(\rho, P_{s'}) U(\rho, Q_{s'})} - \frac{1}{2} \\ &= N_g(\rho). \end{aligned}$$

证毕. $\square$

为方便计算一些常见量子态的非 Gauss 性, 我们给出非 Gauss 性度量 $N_g(\rho)$ 的一种等价表述形式. 记

$$H_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{z}a + za^\dagger), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.13)$$

不难验证辛变换后的“位置”算子 Q_s 和“动量”算子 P_s 可以等价地写成

$$Q_s = \frac{1}{\sqrt{2}}((\bar{\mu} + \bar{\nu})a + (\mu + \nu)a^\dagger) = H_z, \quad P_s = \frac{1}{\sqrt{2i}}((\bar{\mu} - \bar{\nu})a - (\mu - \nu)a^\dagger) = H_w.$$

其中 $z = \mu + \nu$, $w = i(\mu - \nu)$. 而辛变换条件 $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ 可等价地表示为 $\text{Im}(\bar{z}w) = 1$. 有了上述记号, 非 Gauss 性度量 $N_g(\rho)$ 可等价地表示为

$$N_g(\rho) = \min_{z, w} \sqrt{U(\rho, H_z)U(\rho, H_w)} - \frac{1}{2}, \quad (3.14)$$

其中 $z, w \in \mathbb{C}, \text{Im}(\bar{z}w) = 1$.

3.4 若干重要量子态的非 Gauss 性

为了对上面引入的非 Gauss 性度量有更加直观的理解, 我们讨论一些重要量子态的非 Gauss 性.

(1) Fock 态

由于 Fock 态 $|n\rangle$ 为纯态, 因此有

$$U(|n\rangle\langle n|, H_z) = V(|n\rangle\langle n|, H_z) = \left(n + \frac{1}{2}\right)|z|^2.$$

直接计算可得

$$N_g(|n\rangle\langle n|) = n, \quad n = 0, 1, \dots$$

这表明随着 n 的增加, 非 Gauss 性增加. 这符合我们的直观预期.

(2) ON 态

作为真空态和 Fock 态的叠加态, ON 态

$$|\text{ON}\rangle = \sqrt{1-p}|0\rangle + \sqrt{p}|n\rangle, \quad n = 1, 2, \dots$$

是量子计算的资源单元, 近年来引起了人们的关注 (参见文献 [50]). 直接计算得到

$$U(|\text{ON}\rangle\langle \text{ON}|, H_z) = V(|\text{ON}\rangle\langle \text{ON}|, H_z) = \left(np + \frac{1}{2}\right)|z|^2, \quad n > 2.$$

由此可得其非 Gauss 性为

$$N_g(|\text{ON}\rangle\langle \text{ON}|) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{1+8p^3}-1), & n = 1, \\ \frac{1}{2}(\sqrt{1+24p^2}-1), & n = 2, \\ np, & n \neq 1, 2. \end{cases}$$

我们看到, 随着 n 的增加, 非 Gauss 性增加.

(3) Schrödinger 猫态

对于 Schrödinger 偶 - 猫态

$$|\alpha_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+2e^{-2|\alpha|^2}}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

和 Schrödinger 奇 - 猫态

$$|\alpha_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2-2e^{-2|\alpha|^2}}}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

计算可得

$$\begin{aligned} U(|\alpha_{+}\rangle\langle\alpha_{+}|, H_z) &= \left(|\alpha|^2 \tanh(|\alpha|^2) + \frac{1}{2|z|^2}(\alpha^2 \bar{z}^2 + \bar{\alpha}^2 z^2) + \frac{1}{2} \right) |z|^2, \\ U(|\alpha_{-}\rangle\langle\alpha_{-}|, H_z) &= \left(|\alpha|^2 \coth(|\alpha|^2) + \frac{1}{2|z|^2}(\alpha^2 \bar{z}^2 + \bar{\alpha}^2 z^2) + \frac{1}{2} \right) |z|^2. \end{aligned}$$

相应地, 它们的非 Gauss 性分别为

$$\begin{aligned} N_g(|\alpha_{+}\rangle\langle\alpha_{+}|) &= \sqrt{\left(|\alpha|^2 \tanh|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - |\alpha|^4 - \frac{1}{2}}, \\ N_g(|\alpha_{-}\rangle\langle\alpha_{-}|) &= \sqrt{\left(|\alpha|^2 \coth|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - |\alpha|^4 - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

特别地,

$$N_g(|\alpha_{+}\rangle\langle\alpha_{+}|) \leq N_g(|\alpha_{-}\rangle\langle\alpha_{-}|).$$

这与当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, Schrödinger 偶 - 猫态趋于真空态 $|0\rangle$, 而 Schrödinger 奇 - 猫态趋于 Fock 态 $|1\rangle$ 是相容的.

(4) Fock 对角态

对于 Fock 对角态

$$\rho_F = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle\langle n|,$$

计算可得

$$U(\rho_F, H_z) = |z|^2 \sqrt{\left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}} (n+1) \right)^2}.$$

因此,

$$N_g(\rho_F) = \sqrt{\left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{p_n p_{n+1}} (n+1) \right)^2} - \frac{1}{2},$$

其中 $\bar{n} = \text{tr}(\rho_F a^\dagger a)$ 为平均光子数.

3.5 比较

文献 [23] 基于不确定性给出了一个非 Gauss 性度量 $N_G(\rho)$, 用本文的记号, 其表达式可等价地表示为

$$N_G(\rho) = \min_{\theta} \sqrt{U(\rho, H_{e^{i\theta}}) U(\rho, H_{ie^{i\theta}})} - \frac{1}{2}, \quad (3.15)$$

其中 H_z 由 (3.13) 定义. 不难看出, 表达式 (3.15) 中实际上是在辛群的极大紧致子群

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\} \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}$$

上取最小, 而在 $N_g(\rho)$ 的表达式 (3.12) 中, 是在整个辛群上对量子不确定性乘积取最小, 因此显然有

$$N_G(\rho) \geq N_g(\rho).$$

对于上述的例子, $N_G(\rho)$ 与 $N_g(\rho)$ 都是相等的 (参见文献 [23]). 但一般来说, 它们并不相等.

下面通过对一个具体量子态的非 Gauss 性进行计算, 说明文献 [23] 中定义的非 Gauss 性度量并不具有辛不变性. 考虑相空间上如下特殊辛变换:

$$s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}},$$

其所对应 Fock 空间上的酉算子记为 Γ_s . 对于量子态 $\Gamma_s|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|\Gamma_s^\dagger$, 通过具体计算可知, 当 $\alpha = 4 + 4i$ 时, 有

$$N_G(\Gamma_s|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|\Gamma_s^\dagger) \approx 5.342 > N_g(\Gamma_s|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|\Gamma_s^\dagger) \approx 5.179;$$

当 $\alpha = 10 + 5i$ 时, 有

$$N_G(\Gamma_s|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|\Gamma_s^\dagger) \approx 12.758 > N_g(\Gamma_s|\alpha_+\rangle\langle\alpha_+|\Gamma_s^\dagger) \approx 10.692.$$

从而, $N_G(\cdot)$ 并不具有辛不变性. 因此, $N_G(\cdot) \neq N_g(\cdot)$.

4 总结

借助 Gauss 态正好是一类量子不确定性关系的最小不确定性态这一物理刻画 (参见文献 [24]), 我们提出了一个非 Gauss 性度量. 与之前的度量相比, 这一度量在整个辛群下取最小值, 具有辛不变性. 由于辛变换具有很好的数学刻画, 因此, 这一最优化过程在数学上比较容易处理. 此外, 为了更直观地理解这一度量的合理性, 我们对一些重要量子态的非 Gauss 性进行了计算. 对于多模情形, 相应非 Gauss 性度量概念的推广和计算值得进一步研究.

参考文献

- 1 Ferraro A, Olivares S, Paris M G A. Gaussian States in Quantum Information. Napoli: Bibliopolis, 2005
- 2 Braunstein S L, van Loock P. Quantum information with continuous variables. Rev Modern Phys, 2005, 77: 513–577
- 3 Wang X B, Hiroshima T, Tomita A, et al. Quantum information with Gaussian states. Phys Rep, 2007, 448: 1–111
- 4 Weedbrook C, Pirandola S, García-Patrón R, et al. Gaussian quantum information. Rev Modern Phys, 2012, 84: 621–669
- 5 Adesso G, Ragy S, Lee A R. Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond. Open Syst Inf Dyn, 2014, 21: 1440001
- 6 Segal I E. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. II. Canad J Math, 1961, 13: 1–18
- 7 Holevo A S. Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. Amsterdam: North-Holland, 1982

- 8 Marian P, Marian T A. Entanglement of formation for an arbitrary two-mode Gaussian state. *Phys Rev Lett*, 2008, 101: 220403
- 9 Adesso G, Datta A. Quantum versus classical correlations in Gaussian states. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 030501
- 10 Giorda P, Paris M G A. Gaussian quantum discord. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 020503
- 11 Opatrny T, Kurizki G, Welsch D G. Improvement on teleportation of continuous variables by photon subtraction via conditional measurement. *Phys Rev A*, 2000, 61: 032302
- 12 Cochrane P T, Ralph T C, Milburn G J. Teleportation improvement by conditional measurements on the two-mode squeezed vacuum. *Phys Rev A*, 2002, 65: 062306
- 13 Olivares S, Paris M G A, Bonifacio R. Teleportation improvement by inconclusive photon subtraction. *Phys Rev A*, 2003, 67: 032314
- 14 Dell'Anno F, De Siena S, Albano L, et al. Continuous-variable quantum teleportation with non-Gaussian resources. *Phys Rev A*, 2007, 76: 022301
- 15 Cerf N J, Krüger O, Navez P, et al. Non-Gaussian cloning of quantum coherent states is optimal. *Phys Rev Lett*, 2005, 95: 070501
- 16 Sabapathy K K, Ivan J S, Simon R. Robustness of non-Gaussian entanglement against noisy amplifier and attenuator environments. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 130501
- 17 Genoni M G, Paris M G A, Banaszek K. Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy. *Phys Rev A*, 2008, 78: 060303
- 18 Genoni M G, Paris M G A. Quantifying non-Gaussianity for quantum information. *Phys Rev A*, 2010, 82: 052341
- 19 Marian P, Marian T A. Relative entropy is an exact measure of non-Gaussianity. *Phys Rev A*, 2013, 88: 012322
- 20 Ghiu I, Marian P, Marian T A. Measures of non-Gaussianity for one-mode field states. *Phys Scr*, 2013, T153: 014028
- 21 Son W. Role of quantum non-Gaussian distance in entropic uncertainty relations. *Phys Rev A*, 2015, 92: 012114
- 22 Baek K, Nha H. Non-Gaussianity and entropy-bounded uncertainty relations: Application to detection of non-Gaussian entangled states. *Phys Rev A*, 2018, 98: 042314
- 23 Fu S, Luo S, Zhang Y. Quantifying non-Gaussianity of bosonic fields via an uncertainty relation. *Phys Rev A*, 2020, 101: 012125
- 24 Fu S, Luo S, Zhang Y. Gaussian states as minimum uncertainty states. *Phys Lett A*, 2020, 384: 126037
- 25 Luo S. Heisenberg uncertainty relation for mixed states. *Phys Rev A*, 2005, 72: 042110
- 26 Cover T M, Thomas J A. *Elements of Information Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1991
- 27 Marian P, Marian T A. Squeezed states with thermal noise. I: Photon-number statistics. *Phys Rev A*, 1993, 47: 4474–4486
- 28 Marian P, Marian T A. Squeezed states with thermal noise. II: Damping and photon counting. *Phys Rev A*, 1993, 47: 4487–4495
- 29 Dirac P A M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1982
- 30 Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z Physik*, 1927, 43: 172–198
- 31 Stoler D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys Rev D*, 1970, 1: 3217–3219
- 32 Stoler D. Equivalence classes of minimum-uncertainty packets. II. *Phys Rev D*, 1971, 4: 1925–1926
- 33 Wigner E P, Yanase M M. Information contents of distributions. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1963, 49: 910–918
- 34 Luo S. Wigner-Yanase skew information vs. quantum Fisher information. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 132: 885–890
- 35 Luo S. Quantum uncertainty of mixed states based on skew information. *Phys Rev A*, 2006, 73: 022324
- 36 Luo S, Sun Y. Quantum coherence versus quantum uncertainty. *Phys Rev A*, 2017, 96: 022130
- 37 Luo S, Sun Y. Coherence and complementarity in state-channel interaction. *Phys Rev A*, 2018, 98: 012113
- 38 Girolami D, Tufarelli T, Adesso G. Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty. *Phys Rev Lett*, 2013, 110: 240402
- 39 Yadin B, Vedral V. General framework for quantum macroscopicity in terms of coherence. *Phys Rev A*, 2016, 93: 022122
- 40 Marvian I, Spekkens R W, Zanardi P. Quantum speed limits, coherence, and asymmetry. *Phys Rev A*, 2016, 93: 052331
- 41 Folland G B. *Harmonic Analysis in Phase Space*. Princeton: Princeton University Press, 1989
- 42 Simon R, Mukunda N, Dutta B. Quantum-noise matrix for multimode systems: $U(n)$ invariance, squeezing, and normal forms. *Phys Rev A*, 1994, 49: 1567–1583
- 43 Segal I E. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I. *Mat-Fys Medd Danske Vid Selsk*, 1959, 31: 1–39

- 44 Shale D. Linear symmetries of free boson fields. *Trans Amer Math Soc*, 1962, 103: 149–167
- 45 Weil A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math*, 1964, 111: 143–211
- 46 Luo S. Implementing symmetries of a free Bose field via white noise operators. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2003, 19: 147–158
- 47 Berezin F A. Wick and anti-Wick operator symbols. *Math USSR Sb*, 1971, 15: 577–606
- 48 Berezin F A. General concept of quantization. *Comm Math Phys*, 1975, 40: 153–174
- 49 Luo S. Some remarks on CCR and Weyl operators. *Acta Math Sci*, 1998, 18: 120–123
- 50 Sabapathy K K, Weedbrook C. ON states as resource units for universal quantum computation with photonic architectures. *Phys Rev A*, 2018, 97: 062315

Non-Gaussianity of quantum states in bosonic fields

Shuangshuang Fu, Shunlong Luo & Yue Zhang

Abstract In quantum information processing with continuous variables, non-Gaussianity of bosonic field states is an important resource. In the last decade, several measures of non-Gaussianity based on various distances and relative entropy have been introduced to characterize different aspects of non-Gaussianity. Due to the symplectic invariance of the set of Gaussian states, it is natural to require the symplectic invariance of measures of non-Gaussianity. By exploiting a recent discovery of the fact that the set of Gaussian states coincides with the set of minimum uncertainty states for a refined family of Heisenberg uncertainty relations, we introduce a measure of non-Gaussianity which enjoys a variety of nice properties, including symplectic invariance. Fundamental properties of this measure are revealed, and non-Gaussianity of several prototypical bosonic states is evaluated explicitly to illustrate the concept.

Keywords bosonic field, Gaussian state, non-Gaussianity, symplectic group, uncertainty relation, Wigner-Yanase skew information

MSC(2020) 81P15, 81P16

doi: 10.1360/SSM-2020-0295