图性质的 Karp 猜想

李德英[①]　**堵丁柱**[②]

(①华中师范大学数学系, 武汉 430070; ②中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要　所有非平凡、单调的图性质的判定树复杂性等于$\binom{n}{2}$, 其中 n 是图的顶点数. 这就是关于图性质的 Karp 猜想. 综述关于 Karp 猜想的研究进展.

关键词　**Karp 猜想**　**Boole 函数**　**判定树**　**诡函数**

关于图性质的 Karp 猜想是计算复杂性理论中的一个著名未解决问题, 它与图论、拓扑和代数相关联, 是相当引人入胜的数学研究课题. 本文综述关于该猜想的研究进展, 期望获得更多人的研究兴趣.

1　Boole 函数和图性质

当一个函数的变量定义域和函数值域都是二元集合{0, 1}时, 称它为 Boole 函数. 逻辑函数是 Boole 函数. 值 1 和 0 在逻辑问题中的意义为“真”和“假”. 3 种逻辑运算与、或、非, 分别对应 3 种 Boole 运算: Boole 积、Boole 和、非. 它们的定义如表 1.

表 1

x	y	xy	$x+y$	$\bar{x}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

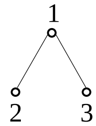
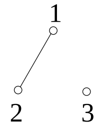
图性质也是 Boole 函数. 举例来说, 3 个顶点 1, 2, 3 上的图之连通性有如下表达式:

$$\mathrm{connect}_3(x_{12}, x_{13}, x_{23}) = x_{12}x_{13} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{23}.$$

每个图 G 可以解释为一个变量赋值

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & G \text{ 含连接顶点 } i \text{ 和 } j \text{ 的边 } (i, j), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

依照这种解释,

connect$_3$() = 1,　connect$_3$() = 0.

4 个顶点 1, 2, 3, 4 上的图之连通性有较复杂的表达式:

$$\begin{aligned}\mathrm{connect}_4(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) &= (x_{12}x_{13} + x_{12}x_{23} + x_{13}x_{23})(x_{14} + x_{24} + x_{34}) \\ &\quad + (x_{13} + x_{23})x_{14}x_{24} + (x_{12} + x_{23})x_{14}x_{34} + (x_{13} + x_{12})x_{24}x_{34} + x_{14}x_{24}x_{34}.\end{aligned}$$

一般来说, n 个顶点上图性质是一个具有 $n(n-1)/2$ 个变量的 Boole 函数, 其每个变量对应于一个顶点对, 该变量取值 1 当且仅当架在对应顶点对之间的边存在. 图性质在图同构下是不变的, 这是它有别于普通 Boole 函数的特征. 亦即, Boole 函数 $f(x_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n)$是图性质, 当且仅当对{1, 2, .., n}上任意置换 s,

$$f(x_{ij}, 1 \leqslant i < j \leqslant n) = f(x_{\sigma(i)\, s\,(j)}, 1 \leqslant i < j \leqslant n).$$

有一类重要的图性质——单调的图性质. 当一个图的子图(这里的子图, 顶点集不变)具有

某性质时，该图一定也有此性质，这种图性质称为单调增．当一个图具有某性质时，该图的子图都有此性质，这种图性质称为单调减．一个图性质是单调的当且仅当它是单调增或者单调减的．图的连通性和图的可平面性都是单调的，前者为单调增，后者为单调减．

单调性的概念可以推广到一般 Boole 函数上．倘若 $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$，则记 $(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n)$．倘若

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n),$$

则 Boole 函数 f 称为单调增．倘若

$$(x_1, \ldots, x_n) \leqslant (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(y_1, \ldots, y_n),$$

则 Boole 函数 f 称为单调减．倘若它是单调增或者单调减的，则 Boole 函数 f 称为单调的．

2 判定树和 Karp 猜想

Boole 函数也可以用具有特殊标记的有根二分树来表达．考虑 Boole 函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$．如果 $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$，那么用一个带标记 1 的顶点表示；如果 $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$，那么用一个带标记 0 的顶点表示；如果 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 不是常数，也就是说，它是非平凡的，那么用一个变量 x_i 来标记树根，然后由树根引两条边，分别标记上 0 和 1，引至表达 Boole 函数 $f|_{x_i=0}$ 和 $f|_{x_i=1}$ 的两个子树．这样用递归方法造出的表示 Boole 函数的树称为判定树．图 1 就是一个例子．

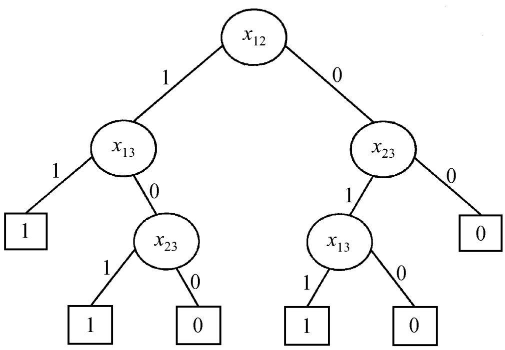


图 1 connect$_3$ 的一个判定树

判定树是 Boole 函数的一种计算模型．深度是判定树的一个重要参数，它是从树根到树叶的最长的路．一个 Boole 函数 f 可能有不只一个判定树，其中最小的深度称为 f 的判定树复杂性，记为 $D(f)$．例如，

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= 1, \\ D(x+y) &= 2, \\ D(xy) &= 2, \\ D(\text{connect}_3) &= 3, \\ D(\text{connect}_4) &= 6. \end{aligned}$$

在上述 5 例中，$D(f)$ 恰等于 f 的变量个数．这种 Boole 函数称为诡(elusive)函数．当然，Boole 函数不都是诡的，例如，$D(xy + \bar{x}y) = 2$．

关于诡函数，有以下重要的猜想：

Karp 猜想 任何非平凡、单调的图性质都是诡的．

Karp 猜想是个公认的难题. 它是在 Aanderaa-Rosenberg 猜想[1, 2]基础上发展出来的. 后者的内容是, 存在正常数e, 使得任何非平凡、单调的图性质的判定树复杂性大于en^2, 其中, n 是图的顶点个数. 这一猜想为 Rivest 和 Vuillemin[3, 4]所证明. 并且, 常数 e 在文献[5, 6]中得到多次改进.

对 Karp 猜想的研究方法大致有 3 类. 下面分别讨论之.

3 组合方法

人们最早使用组合方法证明了许多图性质是诡的[1, 7~10]. Milner 和 Welsh[11]将在此期间产生的一项重要组合证明技巧总结为如下定理:

Milner-Welsh 定理 如果一个非空单调减的图性质满足如下条件: 对具有该性质的任意图 G 以及 G 上一边 e, 总可以找到 G 外一边 e', 使得图$(G-e)\cup e'$仍然保持该性质, 那么该图性质是诡的.

Bollobas[7]用组合方法证明了, 图含 k-阶完全子图的性质是诡的. 这个证明很特殊, 不能用 Milner-Welsh 定理来解释.

4 代数方法

定义

$$m(f)=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\|x\|},$$

其中 $x=x_1,\cdots,x_n$, 并且$\|x\|$是 $x_1,\cdots,x_n$ 中 1 的个数.

代数判别法 如果$m(f)\neq 0$, 那么 f 是诡的.

这个方法是由 Rivest 和 Vuillemin[3, 4]提出的. 利用它可以得到一个有趣的关于弱对称函数的结果. 倘若一个函数在一个传递群(transitive group)的作用下值不变, 那么称它是弱对称的(weakly symmetric). 换言之, 倘若存在$\{1, \ldots, n\}$上传递置换子群 H, 使得对任意 $s\in H$,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_{s(1)},\cdots,x_{s(n)}),$$

那么 $f(x_1, \ldots, x_n)$是弱对称的. 利用代数方法, Rivest 和 Vuillemin 证明了如下定理:

Rivest-Vuillemin 定理 如果$f(x_1,\ldots,x_n)$是弱对称的, n是素数幂, 并且, $f(0,\ldots,0)\neq f(1,\ldots,1)$, 那么 f 是诡的.

同时, Rivest 和 Vuillemin 猜想, 去掉“n 是素数幂”的条件, 这个定理还成立. Illies[12]在 1978 年找到一个反例. 这样, 人们将原猜想修改成了如下形式:

Rivest-Vuillemin 猜想 任何非平凡、单调的弱对称函数都是诡的.

图性质是弱对称的, 因此, 这是 Karp 猜想的一个推广. 由 Rivest-Vuillemin 定理知道, 对 Rivest-Vuillemin 猜想的研究只需考虑 n 不是素数幂. 文献[13, 14]讨论了 n 取较小值的情形, 证明了

定理 4.1 对 n = 6, 10, 12[1)], Rivest-Vuillemin 猜想是对的.

不过证明是用拓扑方法.

1) n = 12 情形的证明含于 Gao S X, Du D Z, Hu X D 等的近期论文: Rivest-Vuillemin conjecture is true for monotone Boolean functions with twelve variables. 该文已为 Disc Appl Math 接受

5 拓扑方法

一个有限集合 V 的子集族 D 称为复形, 倘若

$$A\subset B, B\in D\Rightarrow A\in D.$$

如果把用$|V|-1$ 维空间中线性无关的$|V|$个点来表示, 那么 D 中每个子集 A 对应于一个$|A|-1$ 维单纯形 $\hat{A}$. 这个导出的几何单纯复形 $\hat{D}=\{\hat{A}\mid A\in \hat{D}\}$ 称为 D 的几何表示. 由于每个 $v\in V$ 由 $\hat{D}$ 的顶点表示, 每个 $A\in D$ 由 $\hat{D}$ 的面表示, 因此也称每个 $v\in V$ 是 D 的顶点, 每个 $A\in D$ 是 D 的面.

对每个单调减的 Boole 函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$, 可以定义一个与之相关的复形如下:

$$D_f=\{A\in\{x_1,\cdots,x_n\}\mid f|_{x_i=0, x_i\notin A}\equiv 1\}.$$

对于单调增的 Boole 函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$, 注意 $\bar{f}(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ 都是单调减的, 并且两者的判定树复杂性均与 f 相同, 因此可以化为单调减的 Boole 函数来研究.

Euler 示性数是个重要的拓扑不变量. 复形 D 的 Euler 示性数定义如下:

$$c(D)=\sum_{A\in D, A\neq\varnothing}(-1)^{|A|-1}.$$

它与代数判别法有很紧密的关系. 事实上,

$$c(D_f)=-m(f)+1.$$

这意味着, 代数判别法可以用拓扑方法表述:

(1) 如果 $c(D_f)\neq 1$, 那么 f 是诡的.

Milner-Welsh 定理也有一个拓扑表述方法. 为了解释它, 定义: 倘若一个复形的面不是其他面的真子面, 那么它是极大的. 如果一个面本身不是极大的, 并且包含它的极大面是惟一的, 那么称它为自由面. 可以证明, Milner-Welsh 定理中条件等价于 D_f 没有自由面. 因此, 可以将 Milner- Welsh 定理表述为:

(2) 如果 D_f 非空并且没有自由面, 那么 f 是诡的.

一个非常自然的问题是, 能不能把(1)和(2)中的两个拓扑条件统一到一个条件下面? 答案是肯定的. 为此目的, 再引入一个概念: 如果复形有自由面, 那么去掉该自由面和包含它的所有面, 剩余部分还是个复形. 这一变换称为初等塌陷(elementrary collaps). 倘若一个复形可经一系列初等塌陷变至空复形, 那么它称为可塌的(collapsible).

拓扑判别法 如果 D_f 不是可塌的, 那么 f 是诡的.

如果 D_f 非空并且没有自由面, 那么 D_f 一定不是可塌的. 另外, 不难证明, 如果 D_f 是可塌的, 那么 $c(D_f)=1$. 因此, (1)和(2)都是拓扑判别法的推论.

如何来证明复形的不可塌性呢? 许多不动点定理提供了好机会. 例如说, 可塌复形的几何表示上到自身的连续映射一定有不动点. 这样一来, 只要能设计出一个无不动点的映射, 就能证明不可塌性了. 怎样设计这种映射呢? 通常, 人们考虑复形的自同构. 一个由复形 $\ddot{A}$ 的顶点集 V 到 V 的映射 f 称为自同构, 倘若对任意 $A\in D$, $f(A)=\{f(v)\mid v\in A\}\in D$. 任意复形的自同构都可以线性延伸成它的几何表示上的连续映射, 称为它诱导的单纯映射.

复形的自同构形成一个置换群. 可塌复形的自同构群若满足某些条件, 它所诱导的单纯映射群会有公共的不动点. 下面是一个例子[15]:

不动点定理 设 G 是可塌复形的一个自同构群. 如果 G 有一个正规子群满足如下条件:

(a) $|H|$ 是素数幂,

(b) 商群 G/H 是循环群,

那么 G 所诱导的单纯映射群会有公共的不动点.

Kahn 等人[6]利用这一定理证明了:

定理 5.1 当顶点个数 n 是素数幂时, Karp 猜想为真.

同时, 他们也证明了, 当顶点个数 $n = 6$ 时, Karp 猜想为真. 可塌复形的几何表示上单纯映射的全部不动点也是个 Euler 示性数为 1 的几何复形. 这就是所谓的 Hopf 指标定理. Yao[16]利用它证明了:

定理 5.2 任意非平凡、单调的二部图性质是诡的.

Triesch[17]利用 Wreath 积构造满足不动点定理条件的自同构群, 证明了如下结果:

定理 5.3 如果具有某非平凡、单调减的性质的图都不含长度不超过 4 的圈, 那么该图性质是诡的.

他在文献[18]中将此结果做了改进.

6 未解决问题

有关 Karp 猜想和 Rivest-Vuillemin 猜想[12, 19], 通过对下述问题的讨论, 会认识得更清楚些:

(ⅰ) 已经知道, 拓扑判别法中的条件不是必要条件, 充分必要条件是什么样的呢?

(ⅱ) 图含 Hamilton 圈的性质是诡的吗?

(ⅲ) 对非平凡、单调的弱对称函数 $f(x_1, \ldots, x_n)$是否存在一个正常数e, 使得 $D(f) \geqslant en$?

(ⅳ) 关于无环有向图上的 Karp 猜想[20]仍然是 Rivest-Vuillemin 猜想的特殊情况. 是否能将所有无向图上的结果都推广到无环有向图上, 例如, 当顶点个数 n 是素数幂时, 无环有向图上的 Karp 猜想真吗?

(ⅴ) Bollobas[8]的组合证明方法可以对(ⅰ)提供什么样的提示?

致谢 本工作为国家基础研究发展规划资助项目.

参 考 文 献

1 Best M R, van Emde Boas P, Lenstra H W Jr. A sharpened version of the Aanderaa-Rosenberg conjecture. Report ZW 30/74, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1974

2 Rosenberg A L. On the time required to recognize properties of graphs: a problem. SIGACT News, 1973, 5(4): 15~16

3 Rivest R L, Vuillemin S. A generalization and proof of the Aanderaa-Rosenberg conjecture. In: Proc SIGACT Conf, Albuquerque, 1975

4 Rivest R L, Vuillemin S. On recognizing graph properties from adjacency matrices. Theoretical Computer Science, 1976, 3: 371~384

5 Kleitman D J, Kwiatkowski D J. Further results on the Aanderaa-Rosenberg conjecture. Journal of Combinatorial Theory, Ser B, 1980, 28: 85~95

6 Kahn J, Saks M, Strutevant D. A topological approach to evasiveness. Combinatorica, 1984, 4: 297~306

7 Bollobas B. Complete subgraphs are elusive. Journal of Combinatorial Theory, Ser B, 1976, 21: 1~7

8 Bollobas B. Extremal Graph Theory. New York: Academic Press, 1978

9 Holt R C, Reingold E M. On the time required to detect cycles and connectivity in directed graphs. Math Systems Theory, 1972, 6: 103~107

10 Kirkpatrick D. Determining graph properties from matrix representations. In: Proc Sixth ACM Symp, in Theory of Computing, Seattle, 1974. 84~90
11 Milner E C, Welsh D J A. On the computational complexity of graph theoretical properties. In: Proc Fifth British Combinatorial Conf. Winnipeg: Utilitas Math, 1976, 471~487
12 Du D Z, Ko K I. Theory of Computational Complexity. New York: John Wiley, 2000
13 Gao S X, Hu X D, Wu W. Nontrivial monotone weakly symmetric Boolean functions with six variables are elusive. Theoretical Computer Science, 1999, 223: 193~197
14 Gao S X, Wu W, Du D Z, et al. Rivest-Vuillemin conjecture on monotone Boolean functions is true for ten variables. J Complex, 1999, 15: 526~536
15 Oliver R. Fixed point sets of group actions on finite cyclic complexes. Comment Math Halv, 1975, 50: 155~177
16 Yao A C. Monotone bipartite graph properties are evasive. SIAM J Comput, 1988, 17: 517~520
17 Triesch E. Some results on elusive graph properties. SIAM J Comput, 1994, 23: 247~254
18 Triesch E. On the recognition complexity of some graph properties. Combinatorica, 1996, 16: 259~268
19 堵丁柱. 判定树理论导引. 长沙: 湖南教育出版社, 1998
20 King V. A lower bound for the recognition of digraph properties. Combinatorica, 1990, 10: 53~59

(2000-07-11 收稿, 2000-08-16 收修改稿)