

NURBS 曲线的无自交近似等距曲线计算

赵轩艺¹⁾, 贺仕琪¹⁾, 朱春钢²⁾

¹⁾ (大连海事大学理学院 大连 116026)

²⁾ (大连理工大学数学科学学院 大连 116024)
(xyzhao@dlnu.edu.cn)

摘 要: NURBS 曲线是 CAGD 中的标准工具, 其等距曲线的计算是 CAGD 中的重要内容, 对异常情况包括自交(或自交环)、奇点等的处理是等距曲线计算的关键技术. 基于 2 阶导数采样和 NURBS 曲线的单值性, 提出一种 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线计算算法. 首先提出并证明了 NURBS 曲线无自交等距曲线的最大偏移距离; 然后通过计算最大偏移距离, 以 NURBS 曲线的单值性为约束条件计算 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线. 2 次和 3 次 NURBS 曲线无自交近似等距曲线计算的数值实例的结果表明, 所提算法可以快速、有效地生成无自交的 NURBS 曲线的近似等距曲线, 保证剩余控制顶点数尽量少且不依赖于权因子的选择, 保留了 NURBS 曲线的权因子对曲线形状的调整性.

关键词: NURBS 曲线; 等距曲线; 移除自交; 单值性

中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2022.19177

Computing Approximation Offsets of Non-Self-Intersecting NURBS Curves

Zhao Xuanyi¹⁾, He Shiqi¹⁾, and Zhu Chungang²⁾

¹⁾ (School of Science, Dalian Maritime University, Dalian 116026)

²⁾ (School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: The NURBS curve is a standard tool in CAGD. The calculation of the offset curve is an important research component in CAGD. The processing of abnormal situations, including self-intersections(or self-intersection loops) and singularities, is a key technology of offset curve calculation. Based on the second-derivative sampling and injectivity of the NURBS curve, an algorithm for computing non-self-intersecting approximate offset curve of the NURBS curve is proposed. First, the maximum offset distance of the non-self-intersecting offset curve of the NURBS curve is proposed and proved. Second, using the injectivity of the NURBS curve as a constraint condition, the non-self-intersecting offset curve of the NURBS curve is computed. Examples of computing non-self-intersecting offset curves of NURBS curves with degrees of 2 and 3 are presented. It is verified through examples that the proposed algorithm can quickly and effectively generate the approximate offset curves of the non-self-intersecting NURBS curve. Furthermore, the proposed algorithm does not depend on the choice of weights, and retains the adjustment of the weights of the NURBS curve to the curve shape.

Key words: NURBS curves; offset curves; remove self-intersections; injectivity

收稿日期: 2021-06-19; 修回日期: 2021-07-20. 基金项目: 国家自然科学基金(11801053, 12071057); 中央高校基本科研业务费专项资金(3132021195). 赵轩艺(1989—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算几何、CAD; 贺仕琪(1996—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为计算几何、CAD; 朱春钢(1977—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算几何、CAD.

随着机械行业 CNC 数控技术的发展, 传统的数控加工方式面临程序复杂、增降速频繁、表面粗糙等诸多问题. 由于 NURBS 曲线通用的数学表达式可以描述任意自由曲线或标准解析曲线, 同时 NURBS 具有产生光滑曲率的柔性, 因此 NURBS 曲线的等距曲线近似算法广受关注. 等距曲线又称为偏移曲线, NURBS 曲线的等距技术因其优势被广泛地应用于数控加工^[1-3]、铣削仿真^[4-5]、机械制造^[6]等方面. 采用 NURBS 曲线等距近似算法进行曲面零件的加工, 能够有效地提高零件加工精度与表面质量^[7-8].

通常, 等距曲线比原曲线更复杂. 例如, 原曲线是规则的, 等距曲线可能存在局部的或全局的切线不连续等情形, 从而导致产生新的自交点或环. 生成 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线不仅保证了曲线形状与原曲线更接近, 同时可以保证信息不缺失^[9-11]. 因此, 对 NURBS 曲线的等距曲线上的自交点或环的处理是 NURBS 曲线等距设计中必须处理的异常情况; 同时, 避免自交点或环的产生, 以及移除自交(包括自交环)是 CAGD 中的重要内容^[12-13].

近年来, 国内外学者对生成 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线做了大量工作. Pekerman 等^[6]使用二法线准则和简单的直接代数消去移除自交; Alcázar 等^[14]通过代数算法将等距自交点参数化, 建立隐式方程, 从而移除自交; 梁盈富等^[15]改进 4 阶阿当姆斯微分方程, 预估等距近似过程的曲线参数, 可以一定程度地移除生成等距曲线时产生的自交点和环; Hong 等^[16]通过多边形网格表示外边界算法^[17], 从参数空间中的等距切边区域的角度出发提出一种移除等距自交算法; 秦睿等^[18]基于空间距离生成无自交的等距曲线.

Piegl 等^[19]基于边界的 2 阶导数^[20]采样, 提出一种 NURBS 曲线等距算法. 该算法对特殊形状曲线能够给出精确的等距量, 在对一般自由型曲线生成近似的等距曲线的过程中产生的误差较小, 且等距近似后的曲线控制点的数量少. Kumar 等^[21]通过去除采样点形成的自交闭环生成无自交的等距曲线, 实际上, 该算法可能会去除过多的采样点, 在插值反求控制顶点时可能会把在给定的误差限内的节点移除, 从而产生更大的误差.

若 NURBS 曲线没有自交点, 称其具有单值性. Zhao 等^[22]通过定义适定性的 NURBS 曲线的控制多边形, 且根据 NURBS 曲线的 Toric 退化理论^[23]进行证明, 给出了 NURBS 曲线单值的充要条件. 在等

距曲线计算过程中, 当曲率半径小于等距偏移距离 d 、沿着法向量正向的反方向等距偏移^[24]时, 等距曲线可能会自交. 为避免这一情形, Piegl 等^[19]提出的算法始终假设曲率半径大于 d . 与这些算法不同, 本文考虑一种包含此情形的 NURBS 曲线等距算法, 基于 NURBS 曲线的单值条件提出一种 NURBS 曲线的无自交近似等距算法.

本文利用基于 2 阶导数采样法^[19], 在进行非均匀 B 样条曲线插值等距点前, 先判断哪些点在插值之后会产生自交, 提出一种移除自交的算法, 得到无自交的最大等距偏移距离, 用于计算新的等距点; 再根据等距点的数量反求控制顶点, 在给定的误差限内将 NURBS 分段成有理 Bézier 曲线段^[25]; 通过节点移除算法^[26]去掉多余的控制顶点, 由适定性条件验证最后剩余的控制顶点构成的控制多边形是适定的, 进而得到 NURBS 曲线的非自交等距曲线.

本文算法不需要计算曲率, 通过分析几何位置关系给出无自交的最大等距偏移距离, 不仅能最大程度地保留等距得到的采样点数量, 且在节点移除过程中不会产生更大的误差; 同时给出不需要计算曲率就可得到的无自交的最大等距偏移距离, 其更具有几何直观性且便于计算, 利于实际应用.

1 NURBS 曲线的等距曲线

Piegl 等^[27]提出对 NURBS 曲线定义的描述, 为前后文描述统一, 做出如下定义.

定义 1. $B = \{b_i | i = 0, 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^2$ 表示控制顶点集; $\omega = \{\omega_i | i = 0, 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$ 表示权因子集, 其值不全为 0; $N_{i,p}(u)$ 表示定义在非均匀节点向量 $U = \{0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_n, 1, \dots, 1\}$ 上的 p 次 B 样条基函数, 则平面上一条 p 次 NURBS 曲线为

$$c(u) = (x(u), y(u)) = \left(\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) x_i, \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) y_i \right) \quad (1)$$

其中, $R_{i,p}(u) = \frac{\omega_i N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(u)}, u \in U$; x_i, y_i 表示控制顶点的坐标分量, 节点向量首末的重数都为 $p+1$ 重.

依次用直线段连接相邻 2 个控制顶点所得的折线多边形称为控制多边形, 记为 P .

依次用直线段连接相邻 2 个控制顶点所得的折线多边形称为控制多边形, 记为 P .

等距曲线定义为点的轨迹, 它们的距离是恒定的, 即原曲线上每点沿着该点处的法矢方向等距偏移一个距离所得点的轨迹. 由文献[28]可知, 对于一条 P 次 NURBS 曲线 $c(u)$, 其 1 阶导数及其模长分别定义为

$$\begin{cases} c'(u) = (x'(u), y'(u)) \\ |c'(u)| = \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \end{cases} \quad (2)$$

由文献[19]可知, $c(u)$ 的等距曲线 $C(u) = (C_x(u), C_y(u))$ 可表示为

$$C(u) = c(u) \pm dN(u) \quad (3)$$

其中,

$$\begin{cases} C_x(u) = x(u) + dy'(u)/\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \\ C_y(u) = y(u) - dx'(u)/\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \end{cases} \quad (4)$$

或

$$\begin{cases} C_x(u) = x(u) - dy'(u)/\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \\ C_y(u) = y(u) + dx'(u)/\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \end{cases} \quad (5)$$

d 表示 NURBS 曲线 $c(u)$ 每点的法向量方向移动的距离(可正可负); $N(u)$ 表示 u 处的单位法向量. 本文中取 d 的移动方向为 $(y'(u), -x'(u))$.

对于 NURBS 曲线, 每个 B 样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 的 1 阶导数计算公式为

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} N_{i,p}(u) &= N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \\ &\quad \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \end{aligned} \quad (6)$$

所以有 $c'(u) = \left(\sum_{i=0}^n R'_{i,p}(u) x_i, \sum_{i=0}^n R'_{i,p}(u) y_i \right)$. 其中,

$$R'_{i,p}(u) = \frac{d}{du} R_{i,p}(u) = \frac{L - K}{\left(\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(u) \right)^2} \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} L &= \omega_i \frac{d}{du} N_{i,p}(u) \times \sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(u), \\ K &= \omega_i N_{i,p}(u) \times \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{d}{du} N_{i,p}(u). \end{aligned}$$

曲线的曲率描述了其切向量相对于弧长的转动率. 由等距曲线的定义可知, 等距曲线与原始曲线在一定距离上是平行的^[29], 自由曲线中可能会包含曲率变化程度不同的不规则曲线段, 当进行自由曲线等距偏移时, 即使原曲线是非自交的, 在曲率变化大的曲线段部分仍然会在等距偏移的过程

中产生自交, 如图 1 所示. 给定一个距离 d , 利用采样点法对 NURBS 曲线进行等距偏移时, 会生成一个由等距采样点形成的自交环.



图 1 产生自交的 NURBS 等距曲线

在曲率变化大的曲线段上, 切向量转动大, 即 2 个点的切向量夹角大, 则其对应的法向量夹角小. 因此选取的等距偏移距离 d 较大时, 采样点的轨迹会出现“回折”, 即形成自交环. 此时, 利用插值算法进行等距曲线拟合时, 可知插值曲线是非单值的, 即存在自交点(环). 由于单位法向量 $N(u)$ 是有向的^[30], 因此选取特定的等距偏移距离 d , 沿法向量正向或反向等距偏移会存在自交点(环). 如图 2 所示, 沿反向的等距曲线 C_2 即为自交的等距曲线.

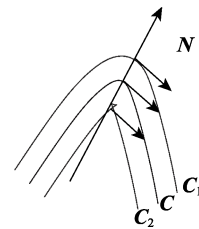


图 2 正向的等距曲线和反向的等距曲线

由上述分析可知, 此自交环通常出现在曲率变化较大的曲线段部分. 由几何关系可知, 法向量与切向量垂直, 当 2 个切向量相交时, 其对应的法向量必然相交.

2 本文算法

本文利用 NURBS 曲线的单值条件提出一种 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线的计算算法.

定义 2^[22]. 给定一条 P 阶 NURBS 曲线 $c(u)$, P 表示控制多边形, $B = \{b_i | i = 0, 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^2$ 表示控制顶点集, $\tilde{B}$ 表示 B 的子集, $\tilde{P}$ 表示 P 的子集, 且是由 $\tilde{B}$ 中相邻的点顺次连接成线段的并集, 当且仅当 P 满足以下条件时, 称 P 是非适定的; 否则称 P 是适定的.

条件 1. 对于控制顶点集 $B = \{b_i | i = 0, 1, \dots, n\}$, 如果 P 中有自交点, 或者存在一个子集 $\tilde{B} \subset B$, 使 P 的子集 $\tilde{P}$ 有自交点.

条件 2. 对于 B , 存在 $\tilde{B} \subset B$, 使子集 $\tilde{P}$ 中的某条边 $\overline{b_{k_i} b_{k_{i+1}}}$ 与子集 $\tilde{B}$ 中任意 3 个连续的控制顶点 $b_{k_j}, b_{k_{j+1}}, b_{k_{j+2}}$ ($k_{j+2} < k_i$ 或 $k_{i+1} < k_j$) 构成的三角形内部的交集是非空的.

定理 1^[22]. 给定 NURBS 曲线 $c(u)$ 的控制顶点集 $B = \{b_i | b_i \in B\} \subset \mathbb{R}^2$, 控制多边形记为 P , 权因子集为 $\omega = \{\omega_i > 0 | i = 0, 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$, NURBS 曲线 $c(u)$ 单值的充要条件是其控制多边形 P 是适定的.

由定义 2 可知, 若控制多边形是非适定的, 存在一组正权因子, 使曲线存在自交点. 进一步分析, 对于一条曲线, 如果沿着单位法向量的某一方向、以无自交的最大等距偏移距离偏移时, 等距点的轨迹不会产生自交点(环). 在插值这些等距点之前, 首先反求控制顶点, 其次去掉多余的控制顶点, 进而利用控制多边形是适定的作为约束条件, 得到无自交的等距曲线.

2.1 等距曲线自交的移除

在等距曲线的算法中, 关于自交点(环)的处理, 通常有如下几种做法^[27].

(1) 改变权因子. 对于如图 3a 所示的 2 次 NURBS 曲线, 将 b_3 对应的权因子 $\omega_3=9$ 改为 $\omega_3=1$, 则可以如图 3b 所示移除自交点. 但是, 这种做法只能处理依靠改变权因子移除等距曲线的自交.

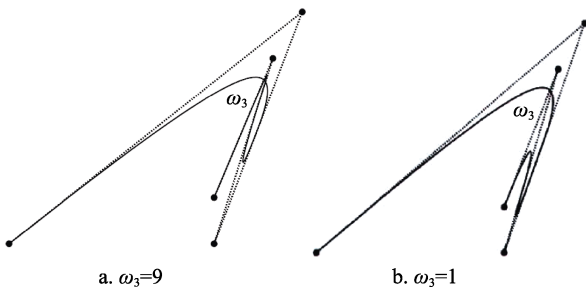


图 3 改变 ω_3 的 NURBS 曲线

(2) 改变控制顶点. 由于以这种算法移除自交会使原曲线表达式发生变化, 不利于实际应用, 因此通常不采用此算法.

(3) 改变节点向量. 通过改变节点向量移除自交点在计算过程中往往不易操作.

(4) 改变等距偏移距离. 本文算法首先计算无自交的最大等距偏移距离, 然后利用控制多边形

的适定性约束, 给定任意正权因子, 可生成无自交的 NURBS 曲线的等距曲线, 同时避免了曲率的计算, 更简便.

2.2 无自交的最大等距偏移距离

定理 2^[20]. 设 $c(u): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 表示 C^2 连续的 NURBS 曲线, $c'(u)$ 表示其线性逼近, 且有 $c(a) = c'(a)$, $c(b) = c'(b)$, 则有

$$\sup_{a \leq u \leq b} \|c(u) - c'(u)\| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup_{a \leq u \leq b} \|c''(u)\|.$$

由定理 2, 基于 2 阶导数的边界, 计算 NURBS 曲线 $c(u)$ 的采样点个数^[19]为

$$n = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^w \times \sqrt{\frac{M_0}{8}} \quad (8)$$

$$w = \begin{cases} 0.50, & \text{线性近似} \\ 0.34, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $M_0 = x''(u)_{\max}^2 + y''(u)_{\max}^2$; $x(u), y(u)$ 表示曲线的坐标分量; ε 表示误差.

给定初始等距偏移距离 d_0 , 根据式(3)对采样点进行等距偏移, 等距偏移采样点形成的轨迹出现局部自交, 如图 4 所示.

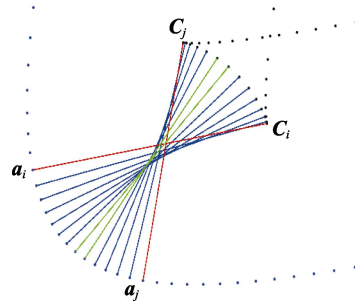


图 4 等距偏移采样点轨迹形成自交环

等距偏移形成的自交轨迹第 1 个回折转向点对应的采样点记为 a_i 点, 等距点形成自交轨迹的第 2 个回折转向点对应的采样点记为 a_j 点. 由式(3), 设原曲线上的采样点 a_i 和 a_j 对应的等距点分别为 $C_i = C(u_i), C_j = C(u_j)$, u_i 和 u_j 分别表示定义域内的第 i 个和第 j 个参数, 且 $i < j$. 将 a_i 与 C_i 之间的线段记为 $\overline{a_i C_i}$, a_j 与 C_j 之间的线段记为 $\overline{a_j C_j}$ (图 4 中红色线段). a_i 与 a_j 之间的采样点分别表示为 $a_{i+1}, \dots, a_{j-1}$ ($i < i+1 < j-1 < j$), 对应的等距点分别表示为 $C_{i+1}, \dots, C_{j-1}$, 其之间的线段分别记为 $\overline{a_{i+1} C_{i+1}}, \dots, \overline{a_{j-1} C_{j-1}}$ (图 4 中蓝色线段). 在这些线段

中,任意 2 条必然相交,将任意 2 条线段 $\overline{a_i C_{i_k}}$ 和 $\overline{a_l C_{i_l}}$ ($i \leq i_k, i_l \leq j$) 的交点记为 q_{i_k} , 必然能找到 $\min\{\overline{a_i q_{i_k}}, \dots, \overline{a_j q_{i_k}}\}$, 令线段 $\overline{a_i C_{i_m}}$ 与 $\overline{a_l C_{i_l}}$ ($i < i_m < i_l < j$) (图 4 中绿色线段)的交点为 q_{i_m} . 有 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min\{\overline{a_i q_{i_k}}, \dots, \overline{a_j q_{i_k}}\}$.

由上所述,假设 $a_{i_m} = (x_1, y_1)$, $a_{i_l} = (x_2, y_2)$, $C_{i_m} = (x_3, y_3)$, $C_{i_l} = (x_4, y_4)$, $q_{i_m} = (x, y)$, 通过代数运算可得点 q_{i_k} 的坐标. 因为 $a_{i_m} q_{i_m}$ 所在的方向是点 a_{i_m} 的法向量方向, $a_{i_l} q_{i_m}$ 所在的方向是点 a_{i_l} 的法向量方向, 则有 $a_{i_m} q_{i_m} \perp a_{i_m}$, $a_{i_l} q_{i_m} \perp a_{i_l}$; 又由式(3)(4), 故点 a_{i_m} 到 q_{i_m} 的等距偏移距离可表示为

$$d_{\max} = \frac{x - x_1}{y'_1} \times \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} \quad (9)$$

$$\text{或 } d_{\max} = \frac{y_1 - y}{x'_1} \times \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}.$$

由于点 a_{i_l} 到 q_{i_m} 的等距偏移距离也为 $d_{\max}$, 故 $d_{\max}$ 可表示为

$$d_{\max} = \frac{x - x_2}{y'_2} \times \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2} \quad (10)$$

$$\text{或 } d_{\max} = \frac{y_2 - y}{x'_2} \times \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}. \text{ 其中, } x'_1, y'_1 \text{ 和 } x'_2, y'_2$$

分别表示 $c(u)$ 在 a_{i_m} 处和 a_{i_l} 处的 1 阶导数坐标分量.

由上所述, 则有如下定理.

定理 3. 设 $A = \min\{\overline{a_i q_{i_k}}, \dots, \overline{a_j q_{i_k}}\}$, 若任意线段 $\overline{a_{i_k} C_{i_k}}$ ($i \leq i_k \leq j$) 与 $a_{i_m}, a_{i_l}, q_{i_m}$ 3 点构成的三角形 $\triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m}$ 内部的交集是空集, 则有 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$, 且 a_{i_m} 到 q_{i_m} 的等距偏移距离为 $d_{\max}$, $i < i_m < i_l < j$.

证明. 首先证明 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$. 假设存在线段 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}}$ ($k_m \neq i_k, i_l, i < k_m < j$) 与点 $a_{i_m}, a_{i_l}, q_{i_m}$ 构成的 $\triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m}$ 内部的交集为非空, 使 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$. 下面讨论点 a_{k_m} 处的切线方向与点 a_{i_m} 或 a_{i_l} 处的切线方向的关系.

(1) 当采样点 a_{k_m} 在采样点 a_{i_m} 之前或 a_{i_l} 之后, 若在点 a_{k_m} 处的切线方向与点 a_{i_m} 或点 a_{i_l} 处的切线方向平行, 此时则有 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}} \cap \triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m} = \emptyset$, 与已知不符, 故舍去; 若点 a_{k_m} 处的切线方向与点 a_{i_m} 或点 a_{i_l} 处的切线方向不平行, 仅讨论点 a_{k_m} 在点 a_{i_m} 之

前的情况, 由已知设 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}} \cap \overline{a_{i_l} C_{i_l}} = q_{k_l}$, $\overline{a_{k_m} C_{k_m}} \cap \overline{a_{i_m} C_{i_m}} = q_{k_m}$, 因为 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}}$ 与 $\triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m}$ 内部的交集非空, 所以点 q_{k_l} 在 a_{i_m} 与 q_{i_m} 之间, q_{k_m} 在 a_{i_l} 与 q_{i_m} 之间, 即 $\overline{a_{i_m} q_{k_m}} < \overline{a_{i_m} q_{i_m}}$, $\overline{a_{i_l} q_{k_l}} < \overline{a_{i_l} q_{i_m}}$, 这与 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$ 矛盾.

(2) 若点 a_{k_m} 处的切线方向与点 a_{i_m} 或点 a_{i_l} 处的切线方向不平行, 不论采样点 a_{k_m} 在何处, 因为 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}}$ 与 $\triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m}$ 内部的交集是非空的, 所以 $\overline{a_{k_m} C_{k_m}}$ 与 $\overline{a_{i_m} C_{i_m}}$ 的交点在 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}}$ 上, $\overline{a_{k_m} C_{k_m}}$ 与 $\overline{a_{i_l} C_{i_l}}$ 的交点在 $\overline{a_{i_l} q_{i_m}}$ 上, 则一定与 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$ 矛盾.

综上所述, 假设不成立. 故对于任意线段 $\overline{a_{i_k} C_{i_k}}$ ($i \leq i_k \leq j$) 与 $a_{i_m}, a_{i_l}, q_{i_m}$ 3 点构成的 $\triangle a_{i_m} a_{i_l} q_{i_m}$ 内部的交集为空, 则有 $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$, 实际上, a_{i_m} 与 a_{i_l} 是相邻的 2 个采样点. 证毕.

下面证明 a_{i_m} 到 q_{i_m} 的等距偏移距离为 $d_{\max}$. 在式(3)中 $|N(u)| \approx 1$, 所以, 采样点 a_{i_m} 到等距点 q_{i_m} 的等距偏移距离的大小可表示为 $|\overline{a_{i_m} q_{i_m}}|$, 如果 $|\overline{a_{i_m} q_{i_m}}|$ 不是无自交的最大等距偏移距离, 即以 $|\overline{a_{i_m} q_{i_m}}|$ 为等距偏移距离时, 等距偏移之后仍产生自交. 假设存在采样点与等距点的连线线段 $\overline{a_{j_m} C_{j_m}}$ 与 $\overline{a_{j_l} C_{j_l}}$ ($j_m, j_l \neq i_m, i_l$) (此时等距点 C_{j_m} , C_{j_l} 是以 $|\overline{a_{i_m} q_{i_m}}|$ 为等距偏移距离得到的等距点)的交点为 q_{j_m} , 使 $|\overline{a_{j_m} q_{j_m}}| = d_M$ 为无自交的最大等距偏移距离, 可知 $d_M < d_{\max}$, 所以 $d_M = |\overline{a_{j_m} q_{j_m}}| < |\overline{a_{i_m} q_{i_m}}| = d_{\max}$. 由上一步证明可知, $\overline{a_{i_m} q_{i_m}} (\text{or } \overline{a_{i_l} q_{i_m}}) = \min A$, 故不存在 q_{j_m} , 即 a_{i_m} 到 q_{i_m} 的等距偏移距离为 $d_{\max}$. 证毕.

2.3 NURBS 曲线的无自交近似等距算法

根据定义 2 提出的单值性条件及定理 1, 本文在 NURBS 曲线单值条件的基础上提出一种无自交的近似等距算法. 在给出无自交的近似等距算法前, 先给出无自交的最大等距偏移距离算法.

算法 1. 无自交的最大等距偏移距离算法.

输入. 节点向量 U , 控制顶点集 B , 权因子集 ω , 初始等距偏移距离 d_0 .

输出. 无自交的最大等距偏移距离 $d_{\max}$.

Step1. 根据形状不变因子 k 识别圆弧曲线, 如果 $k=2$, 输入的 NURBS 曲线表示圆, 则 $d_{\max}=d_0$.

Step2. 将输入的 NURBS 曲线分段成有理 Bézier 曲线段.

Step3. 利用式(8)计算采样点个数 n .

Step4. 利用式(1)计算采样点 $\mathbf{a}_k$, 利用式(3)计算等距点 $\mathbf{C}_k$.

Step5. 判断偏移等距点的轨迹是否存在自交, 如果等距点的轨迹没有自交, 则 $d_{\max}=d_0$; 如果等距点的轨迹有自交环, 则确定自交部分采样点下标 i, j :

Step5.1. 利用式(9)或式(10)在每个自交环上分别计算处于该自交环的无自交最大等距偏移距离, 记为 d_s , s 表示自交环的个数;

Step5.2. 计算 $d_{\max} = \min\{d_1, \dots, d_s\}$.

Step6. 输出无自交的最大等距偏移距离 $d_{\max}$.

在算法 1 中, 首先要识别 NURBS 曲线是否表示圆弧. 由于 NURBS 曲线的圆弧表示并不唯一, 因此可根据形状不变因子^[31]识别圆弧. 对于 2 次和 3 次 NURBS 表示的圆弧, 由文献[31]可知, 将 NURBS 曲线分段成有理 Bézier 曲线段 $\mathbf{S}(u)$, 即

$$\mathbf{S}(u) = \frac{\omega_i \mathbf{P}_i B_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,p}(u)}, p=2,3.$$

其中, $B_{i,p}(u)$ ($p=2,3$) 表示 Bézier 基函数, $\mathbf{P}_i$ 表示控制顶点. 当形状不变因子 $k=2$ 时, $\mathbf{S}(u)$ 表示的是圆弧.

由算法 1 得到无自交的最大等距偏移距离 $d_{\max}$. 由于等距偏移距离 d 是任意的, 如果在 $d_{\max}$ 之内等距偏移, 可以直接得到无自交的近似等距曲线; 如果在 $d_{\max}$ 之外等距偏移, 则需要进一步讨论, 通过迭代可以移除自交. 因此, 本文提出一种权因子为正的 NURBS 曲线的无自交的近似等距曲线的计算算法.

算法 2. NURBS 曲线的无自交近似等距曲线算法.

输入. 节点向量 $\mathbf{U}$, 控制顶点集 $\mathbf{B}$, 权因子集 ω , 初始等距偏移距离 d_0 .

输出. 无自交的近似等距曲线 $\mathbf{C}(u)$.

Step1. 由算法 1 得到无自交的最大等距偏移距离 $d_{\max}$.

Step2. 识别圆弧曲线, 如果 $k=2$, 输入的 NURBS 曲线表示圆:

Step2.1. 对识别的圆以 $d_{\max}$ 为等距偏移距离, 利用式(3)得到等距点 $\mathbf{C}_k$. 对自由型 NURBS 曲线, 如果

$d \leq d_{\max}$, 利用式(3)计算等距点 $\mathbf{C}_k$, 转 Step3; 否则, 令 $d = d - d_{\max}$, 计算等距点 $\mathbf{C}_k$;

Step2.2. 由算法 1 计算迭代 t 次的无自交最大等距偏移距离 $d_{\max}^t$, 令 $d_{\max} = d_{\max}^t$, 重复 Step2.1 和 Step2.2.

Step3. 反求控制顶点.

Step4. 控制多边形适定性判断.

Step5. 节点移除, 去掉多余控制顶点.

Step6. 输出无自交的近似等距曲线 $\mathbf{C}(u)$.

3 实例与结果分析

本文分别列举 2 次、3 次 NURBS 曲线移除自交实例, 数据均保留小数点后 2 位.

例 1. 设 3 次 NURBS 曲线 $\mathbf{c}(u)$ 的节点向量为 $\mathbf{U} = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\right\}$, 控制顶点分别为 $\mathbf{b}_0 = (2.5, 8)$, $\mathbf{b}_1 = (1.5, 4.5)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 5)$, $\mathbf{b}_3 = (4.5, 5)$, $\mathbf{b}_4 = (5.5, 3)$, $\mathbf{b}_5 = (6.5, 5)$ 和 $\mathbf{b}_6 = (6, 8)$; 设权因子为 $\omega = \{1, 2, 1, 3, 2, 1, 2\}$, 3 次 NURBS 曲线及其等距曲线 $\mathbf{C}(u)$ 如图 5a 所示. 由式(8)得到采样点个数为 209, 设初始等距偏移距离 $d_0 = 0.60$, 由式(3)对采样点等距偏移, 其轨迹出现局部自交, 如图 5b 所示.

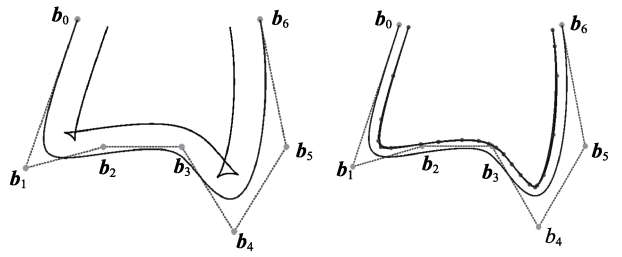


图 5 移除自交的 NURBS 等距曲线

例 2. 设 2 次 NURBS 曲线 $\mathbf{c}(u)$ 的节点向量为 $\mathbf{U} = \left\{0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1\right\}$, 5 个控制顶点分别为 $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (0.5, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 2.5)$, $\mathbf{b}_3 = (3.5, 2.5)$ 和 $\mathbf{b}_4 = (4, 2)$; 设权因子为 $\omega = \{1, 2, 2, 1, 2\}$, 由式(8)得到采样点个数为 56; 设初始等距偏移距离 $d_0 = 1.00$, 等距曲线如图 6a 所示. 对采样点进行等距偏移, $\mathbf{b}_1$ 附近的采样点等距偏移的轨迹出现自交, 如图 6b 所示.

根据算法 1 可得出 $\mathbf{a}_{i_m}$ 点 $(-0.64, 2.29)$, $\mathbf{a}_{i_l}$ 点 $(-0.35, 2.71)$ 和 $\mathbf{q}_{i_m}$ 点 $(0.24, 1.98)$, 由式(9)或式(10)

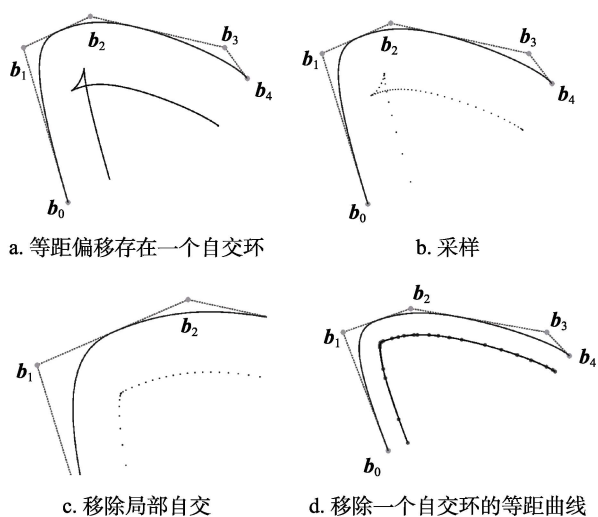


图 6 2 次无自交 NURBS 曲线等距曲线

得本例的 $d_{\max} = 0.46$. 以 0.46 为偏移距离得到的等距点如图 6c 所示. 去除多余的控制顶点后, 验证剩余 27 个控制顶点构成的控制多边形的适定性, 最后插值等距点得到无自交的等距曲线 $C(u)$, 如图 6d 所示.

例 3. 使用例 2 中定义的控制顶点、节点向量和初始偏移距离, 设权因子 $\omega = \{3, 1, 1.5, 6.5, 3, 2, 7\}$, NURBS 曲线及其等距曲线如图 7a 所示. 计算得本例的 $d_{\max} = 0.22$, 去除多余的控制顶点后, 验证剩余 22 个控制顶点构成的控制多边形的适定性, 最后进行插值得到无自交的等距曲线 $C(u)$, 如图 7b 所示.

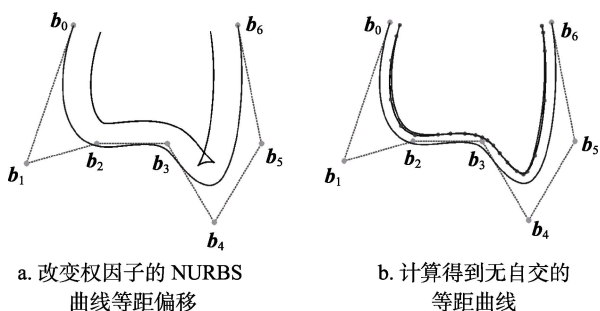


图 7 改变权因子的 3 次无自交等距曲线

例 4. 对例 2 中的 3 次 NURBS 曲线 $c(u)$, 若生成等距偏移 0.60 的等距曲线, 第 1 次等距偏移的 $d_{\max} = 0.21$, 所以当等距偏移距离为 $d = d - d_{\max} = 0.49$ 时, 再次计算无自交的最大等距偏移距离, 将其记为 $d_{\max}^1$, 可知 $d_{\max}^1 = 0.14$; 以 $d = d - d_{\max}^1 = 0.35$ 为等距偏移距离, 得到 $d_{\max}^2 = 0.12$;

依次进行, 迭代 5 次, 得到 $d_{\max}^5 = 0.04$ 时输出非自交的等距曲线 $C(u)$, 如图 8 所示.

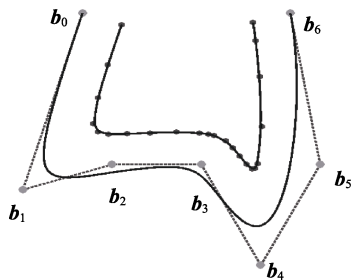


图 8 3 次无自交的 NURBS 等距曲线

例 5. 设 3 次 NURBS 曲线 $c(u)$ 的节点向量为 $U = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\right\}$, 控制顶点分别为 $b_0 = (1, 5)$, $b_1 = (4, 4.5)$, $b_2 = (7.5, 2)$, $b_3 = (6, 2)$, $b_4 = (11, 4.5)$, $b_5 = (13, 5)$ 和 $b_6 = (15, 4)$, 设权因子为 $\omega = \{1, 2, 1.5, 3, 2, 1, 1\}$, 初始等距偏移距离 $d_0 = 0.40$, NURBS 曲线及其等距曲线如图 9a 所示. 原曲线在 b_3 和 b_4 附近的曲线出现了尖点, 等距曲线出现自交, 由算法 1 及式(9)或式(10)得到本例中的 $d_{\max} = 0.02$. 由式(8)得到采样点个数为 77, 去除多余的控制顶点后, 验证剩余 24 个控制顶点构成的控制多边形的适定性, 最后进行插值得到无自交的等距曲线 $C(u)$, 如图 9b 所示.

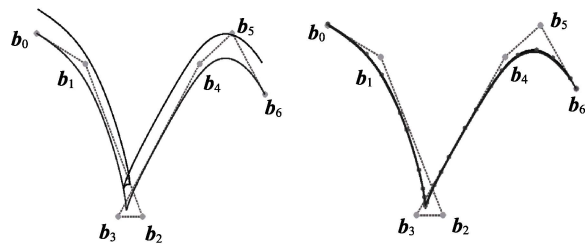


图 9 特殊情形的无自交 NURBS 等距曲线

4 误差分析

在等距曲线的计算过程中, 等距曲线 $C(u)$ 表示精确等距偏移. 然而, 在实际数值计算的过程中得到的等距曲线为 $C'(u)$, $C(u)$ 与 $C'(u)$ 之间就会产生误差, 这是不可避免的情况, 因此实际误差为 $E(u) = |C(u) - C'(u)|$.

本文误差结果如图 10 所示.

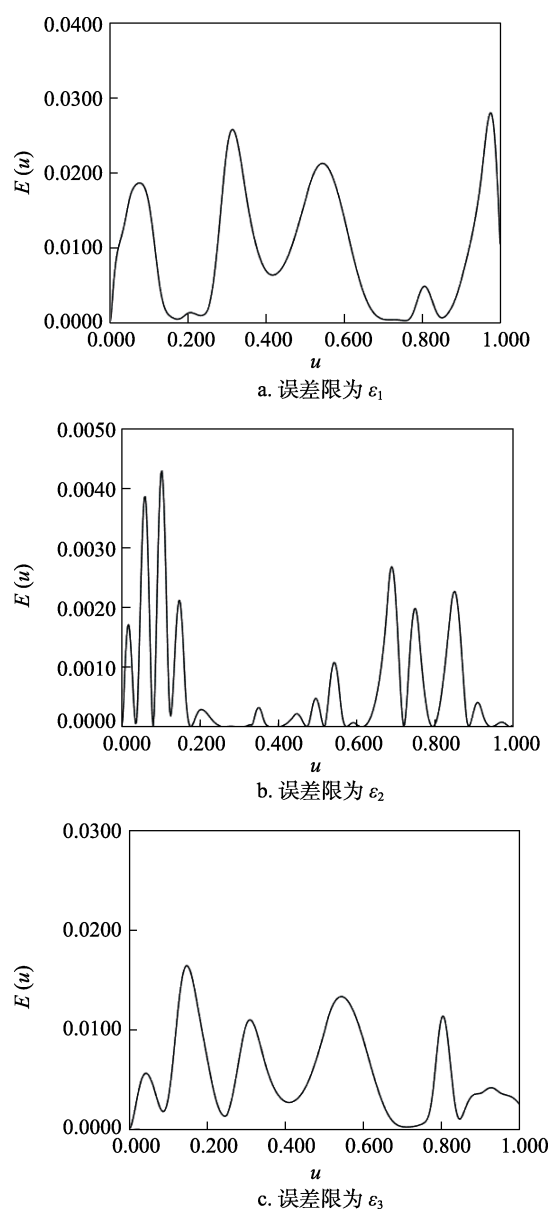


图 10 本文算法不同误差限分析

当等距偏移距离 $d \leq d_{\max}$ 时,可以保证生成的等距曲线不会产生自交.因此,对于给定的误差限 ε ,选择等距偏移距离 d 时,在满足其生成无自交等距曲线的同时也要满足 $E(u) < \varepsilon$ 且 $E(u)$ 尽可能小,这样就认为 d 选取得合适.

由算法 1 可知,例 1 中,当取 $\varepsilon_1=0.10$ 时,使 $E(u) < \varepsilon_1$,误差如图 10a 所示;例 2 中,当取 $\varepsilon_2=0.01$ 时,分别选取了 $d=0.46, 0.40 \leq d_{\max}$ 及 $d=0.30, 0.20 \leq d_{\max}$,均满足 $E(u) < \varepsilon_2$,以 $d_{\max}$ 为等距偏移距离作误差图,如图 10b 所示;例 3 中,当取 $\varepsilon_3=0.10$ 时,使 $E(u) < \varepsilon_3$,误差如图 10c 所示;例 4 中的误差 $E(u) < 0.10$;例 5 中的误差

$E(u) < 0.02$.从图 10 可以看出,本文算法以 $d_{\max}$ 为等距距离,得到的 $E(u)$ 较小.

此外,在本文的算例中均选取 350 个参数,对比移除自交之前和无自交的近似等距算法的误差值,且与 Kumar 等^[21]提出的移除自交的算法进行误差对比,结果如表 1 所示,其中选择的是最大误差值.可以看出,本文算法可以减少自交移除过程对精确度的损失,同时得到满足误差要求的 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线.

表 1 2 种算法误差对比

实例	移除自交前	算法	
		本文	Kumar 等 ^[21]
1	0.0348	0.0258	0.0406
2	0.0053	0.0043	0.0157
3	0.0238	0.0165	0.0577
4	0.0348	0.0258	0.0406
5	0.0200	0.0190	0.0188

表 2 所示为初始等距偏移距离为 0.60,取不同控制顶点个数时,利用算法 2 计算 3 次 NURBS 曲线无自交近似等距曲线的运行时间(以上实例中等距点的轨迹只包含一个自交环),其中的数据均为 10 次实例取得的平均值的结果.

表 2 不同控制顶点个数下算法 2 运行时间 s

控制顶点数	确定自交部分采样点	计算 $d_{\max}$	反求控制点
13	0.52	0.38	0.37
33	0.52	0.48	0.37
49	0.53	0.52	0.38
105	0.55	0.70	0.41

表 3 所示为误差限分别取 10^{-1} , 10^{-2} 和 10^{-3} 约束时,近似等距曲线的控制顶点个数对比,其中第 2~7 列数据来自文献[19].

表 3 控制顶点的个数对比

ε	Elb-2	Til	Lst	Lst-2	M-2	P&T	算法 2
10^{-1}	22	25	16	31	78	19	20
10^{-2}	55	67	48	49	92	33	30
10^{-3}	190	202	84	94	120	56	55

Piegl 等^[19]算法以 0.50 为等距偏移距离,与其不同,本文考虑无自交的 NURBS 的近似等距曲线的计算,由算法 1 可知无自交的最大偏移距离为 $d_{\max}=0.36$;因此,表 3 最后一列数据为等距偏移距离取 0.36 时的 3 次 NURBS 曲线的无自交近似

等距曲线的控制顶点个数. 可以看出, 采用算法 1 和算法 2 计算得到的 NURBS 曲线的无自交的近似等距曲线不会增加控制顶点的个数.

5 结 语

本文在基于 2 阶导数采样得到的等距曲线算法的基础上, 提出一种 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线的计算算法. 对 NURBS 曲线采样点等距偏移后, 当等距点的轨迹存在自交情形时, 计算出无自交的最大偏移距离 $d_{\max}$. 本文提出并证明了无自交的最大等距偏移距离定理, 并给出算法(算法 1); 然后提出 NURBS 曲线的无自交近似等距曲线的算法(算法 2), 分别列举 2 次、3 次 NURBS 曲线等距生成无自交的近似等距曲线的实例. 对算法 1 和算法 2 进行验证的结果表明, 以 $d_{\max}$ 为等距偏移距离可以移除等距偏移时产生的自交, 且不依赖于权因子的选择, 保留了 NURBS 曲线的权因子对曲线形状的调整性, 有利于在机械制造工业上的应用.

本文算法尚存在一些不足之处: (1) 当初始等距偏移距离 d 接近于 0, 即当 $\mathbf{a}_{i_m}$ 与 $\mathbf{a}_{i_l}$ 的距离 $|\mathbf{a}_{i_m} - \mathbf{a}_{i_l}| < 0.01$ 时, 利用本文算法消除自交效果不显著; (2) 得到的无自交的等距曲线可能导致降低去除自交附近的等距曲线光滑性, 需要其他技术提高光滑性, 如插补技术. 这些不足将在今后的工作中改善.

参考文献(References):

- [1] Farouki R T. Pythagorean-hodograph curves: algebra and geometry inseparable[M]. Heidelberg: Springer, 2008
- [2] Shih J L, Frank Chuang S H. One-sided offset approximation of freeform curves for interference-free NURBS machining[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(9): 931-937
- [3] Zheng R Z, Kim C. An enhanced topology optimization approach based on the combined MMC and NURBS-curve boundaries[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2020, 21(8): 1529-1538
- [4] Inui M, Umez N, Tsukahara M. Simple offset algorithm for generating workpiece solid model for milling simulation[J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2017, 11(4): Article No.17-00128
- [5] Konobrytskyi D, Hossain M M, Tucker T M, *et al.* 5-axis tool path planning based on highly parallel discrete volumetric geometry representation: part I contact point generation[J]. Computer Aided Design and Applications, 2018, 15(1): 76-89
- [6] Pekerman D, Elber G, Kim M S. Self-intersection detection and elimination in freeform curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(2): 150-159
- [7] Zhao X Y, Song X D, Zhao Y L. Research on surface modeling of turbo vane of vehicle based on NURBS[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1624(2): 022001
- [8] Zhao Y G, Cai T C, Wang Z J, *et al.* Research and application on NURBS curve inverse algorithm[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 532: 253-258
- [9] Qiao Z F, Hu M, Tan Z H, *et al.* An accurate and fast method for computing offsets of high degree rational Bézier/NURBS curves with user-definable tolerance[J]. Journal of Computer Languages, 2019, 52: 1-9
- [10] Georgiev G H. Rational generalized offsets of rational surfaces[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: Article No.618148
- [11] Yue Y, Jia J. Computing offsets of NURBS curve and surface[J]. Advanced Materials Research, 2012, 542/543: 537-540
- [12] Zhu Xinxiong. Free curve and surface modeling technology[M]. Beijing: Science Press, 2000: 138-168(in Chinese)
(朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京: 科学出版社, 2000)
- [13] Chen X J, Lin Q. Properties of generalized offset curves and surfaces[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: Article No.124240
- [14] Alcázar J G, Caravantes J, Diaz-Toca G M. The square-freeness of the offset equation to a rational planar curve, computed via resultants[J]. International Journal of Algebra and Computation, 2018, 28(3): 395-409
- [15] Liang Yingfu, Zhang Yuxin, Luo Mei, *et al.* Research and application of NURBS offset algorithm in free curve offset[J]. Precise Manufacturing & Automation, 2017(2): 16-18+31(in Chinese)
(梁盈富, 张宇鑫, 罗枚, 等. NURBS 插补算法在自由曲线插补中的研究与应用[J]. 精密制造与自动化, 2017(2): 16-18+31)
- [16] Hong Q Y, Park Y, Kim M S, *et al.* Trimming offset surface self-intersections around near-singular regions[J]. Computers & Graphics, 2019, 82: 84-94
- [17] Campen M, Kobbelt L. Polygonal boundary evaluation of minkowski sums and swept volumes[J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(5): 1613-1622
- [18] Qin Rui, Liu Shengjun, Chen Zitai, *et al.* Fast construction of 2D offset curve based on distance field[J]. Journal of Zhejiang University: Science Edition, 2017, 44(1): 10-21(in Chinese)
(秦睿, 刘圣军, 陈子泰, 等. 基于距离场的二维偏移曲线快速生成方法[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2017, 44(1): 10-21)
- [19] Piegl L A, Tiller W. Computing offsets of NURBS curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(2): 147-156
- [20] Filip D, Magedson R, Markot R. Surface algorithms using bounds on derivatives[J]. Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(4): 295-311
- [21] Kumar G V V R, Shastri K G, Prakash B G. Computing non-self-intersecting offsets of NURBS surfaces[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(3): 209-228
- [22] Zhao X Y, Zhu C G. Injectivity of NURBS curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 302: 129-138
- [23] Zhang Y, Zhu C G. Degenerations of NURBS curves while all

- of weights approaching infinity[J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2018, 35(2): 787-816
- [24] Sun Y F, Nee A Y C, Lee K S. Modifying free-formed NURBS curves and surfaces for offsetting without local self-intersection [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(12): 1161-1169
- [25] Šír Z, Jüttler B. On de Casteljau-type algorithms for rational Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 288: 244-250
- [26] Tiller W. Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces[J]. Computer-Aided Design, 1992, 24(8): 445-453
- [27] Piegl L A, Tiller W. The NURBS book[M]. Heidelberg: Springer, 1997: 117-138
- [28] Liu Hao, Liu Shenglan, Zhang Chen. CAD technology and its application: MATLAB[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 2019(in Chinese)
(刘浩, 刘胜兰, 张臣. CAD 技术及其应用: MATLAB 版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2019)
- [29] Alcázar J G, Caravantes J, Diaz-Toca G M. A new method to compute the singularities of offsets to rational plane curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290: 385-402
- [30] Patrikalakis N M, Maekawa T. Shape interrogation for computer aided design and manufacturing[M]. Heidelberg: Springer, 2002
- [31] Wang Renhong, Li Chongjun, Zhu Chungang. Computational geometry course[M]. Beijing: Science Press, 2017(in Chinese)
(王仁宏, 李崇君, 朱春钢. 计算几何教程[M]. 北京: 科学出版社, 2017)