《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

2022 年度陈嘉庚科学奖专辑

陈嘉庚科学奖——数理科学奖

莫毅明

1980 年获美国斯坦福大学博士学位，随后在普林斯顿大学任职，其后在巴黎大学(奥赛)与哥伦比亚大学任教授，1994 年担任香港大学数学系讲座教授. 1999 年始任数学研究所所长，2011 年始任明德教授. 2015 年当选中国科学院院士，2017 年当选香港科学院院士. 长期致力于多复变函数论、复微分几何与代数几何的研究.

获奖项目名称

复微分几何及其应用

获奖项目介绍

复微分几何是现代数学的一个核心领域，在函数论、代数几何、数论等其他数学分支中也发挥着重要作用. 莫毅明解决了该领域与相关领域的一系列基础性问题，其首先提出的极小有理切线簇(variety of minimal rational tangents, VMRT)概念已经成为被广泛使用的研究工具. 莫毅明与Hwang利用关于VMRT的复微分几何方法解决了一系列代数几何的经典问题，证明了不可约紧埃尔米特对称空间在凯勒形变下的刚性定理，并解决了代数几何领域著名的拉萨斯菲尔德问题. 沙努尔猜想是超越数论中的核心猜想，它大幅推广了数论中经典的林德曼定理，而厄克斯-沙努尔猜想是其在函数域上的类推. 莫毅明运用包括莫-钟紧致化定理的复微分几何方法，以及代数几何里Chow概型与其万有族的概念，证明了秩为 1 时对任意格成立的厄克斯-林德曼定理，其思路适用于志村簇，从而于2019 年与Pila和Tsimerman合作证明了任意志村簇上的厄克斯-沙努尔定理. 这成功逾越了从模曲线的乘积到高维志村簇之间的鸿沟，并已成为复几何和算术几何之间成功合作的一个标志性成果.

科学通报
评 述
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

复微分几何与其应用

莫毅明

香港大学数学系, 香港
E-mail: nmok@hku.hk

2022-06-10收稿, 2022-08-10修回, 2022-08-10接受, 2022-08-16网络版发表
香港研究资助局优配研究金(17301518, 17304321)资助

摘要 《复微分几何与其应用》源自本人早期对有界对称域Ω的有限体积商空间$X_\Gamma := \Omega/\Gamma$以及对偶Hermite紧型对称空间$S$的研究. 本人解决广义Frankel猜想的论文揭示了极小有理切线簇(variety of minimal rational tangents, VMRT)对单直纹射影流形$(X,\mathcal{K})$的几何意义, 与Hwang合作建立了一套通过VMRT结构$\pi:\mathscr{C}(X)\to X$与其万有族$\rho:\mathcal{U}\to\mathcal{K}$发展出来的微分几何理论, 用以解决包括有理齐性空间G/P的Kähler形变刚性与Lazarsfeld问题等的经典难题, 并建立了关于保持VMRT局部双全纯映照的Cartan-Fubini延拓原则, 后来Hong和Mok(2010)以及Mok和Zhang(2019)又发展了非同维Cartan-Fubini延拓原则以及子VMRT结构的延拓理论, 并且证明了Schubert与Schur刚性定理. VMRT理论同时提示了如何研究Ω的代数子簇$Z\subset\Omega$到X_Γ的投影. 运用Mok和Zhong关于有限体积完备Kähler流形的紧致化定理, 本人证明了对秩等于1的任意格成立的Ax-Lindemann定理. 对于Shimura簇, 即当Γ为算术格时, o-极小结构理论与Hodge理论提供了研究X_Γ的非常有效的工具. 在此等理论的技巧与研究成果的基础上, 本人从复微分几何以及代数几何的视角与Pila及Tsimerman合作, 成功证明了期待已久的Shimura簇上的Ax-Schanuel定理. 后者与其多方面的推广, 为数论里一系列猜想提供了强而有力的研究手段.

关键词 单直纹射影流形, 极小有理切线簇(VMRT), Cartan-Fubini原则, 有界对称域, Shimura簇, 非寻常交集

1 引言

1.1 历史背景

古典几何源于希腊, 以欧几里得约公元前300年关于平面以及立体几何的著作《几何原本》为滥觞. 高斯于1827年证明了关于三维空间曲面的“绝妙定理”, 引进了由第一基本型所确定的高斯曲率. 黎曼于1854年在德国哥廷根大学进行了《论作为几何基础的假设》的就职演讲, 奠定了黎曼几何的基础. 黎曼度量g为光滑流形X上的第一基本型, 从而在切空间$T_x(X)$上定义了内积, 并由此产生了测地线的概念. 黎曼度量唯一地确定了与其相伴随的黎曼连络, 即对X上光滑矢量场Z进行与g相适应的无挠共变微分的公式, 并且定义了黎曼曲率张量, 从而推广了高斯曲率.

通过正交标架的选择, 在m维光滑流形X上给定黎曼度量g等同于给出标架丛从$\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$到$\mathrm{O}(m)$的约化. 欧几里得空间是黎曼流形的一个模型, 局部欧几里得空间完全可以由曲率张量等于0来刻画. 事实上, 由$x_0\in X$通过单连通邻域返回自身闭曲线上的平行移动所生成的局部和乐群, 当黎曼曲率张量等于0时, 可以证明是平凡的, 由此推出(X,g)是局部欧几里得空间.

20世纪初, Cartan得到了半单李代数及与其相伴随的黎曼对称空间的完整分类. 后者构成一类重要的几何结构的模型. 对于以齐性空间G/H作为模型的流形M, Cartan引进了在相伴随的主纤维丛上的Cartan连

引用格式: 莫毅明. 复微分几何与其应用. 科学通报, 2022, 67
Mok N. Complex differential geometry and its applications (in Chinese). Chin Sci Bull, 2022, 67, doi: 10.1360/TB-2022-0589

络. 其相适应的曲率张量Ω一如黎曼曲率张量给出刻画模型几何结构的准则, 由此, M局部等价于G/H当且仅当$\Omega=0$.

16世纪引进复数$z=x+\mathrm{i}y$. 微积分在复数域的推广诱导出全纯函数f的概念, 通过柯西-黎曼方程来刻画, 即$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$, 其中$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, 称为$(0,1)$矢量; $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, 称为$(1,0)$矢量. 全纯坐标变换定义了黎曼面, 例如, 黎曼球面为两个复平面所覆盖, 交集上坐标变换为$w=\frac{1}{z}$. 多复变的全纯坐标变换定义了复流形, 例如, 射影空间$\mathbb{P}^n:=(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\sim$是紧复流形, 其中$u\sim v$表示存在非零复数$\lambda$使得$u=\lambda v$. n维复流形的复结构为$J\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z_k}$, $J\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right)=-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \bar z_k}$, $1\leqslant k\leqslant n$. 由此$T_X^{\mathbb{C}}=T_X^{1,0}\oplus T_X^{0,1}$. 这里$T_X^{1,0}$等同于全纯切从$T_X$. 恒有与全纯坐标选取无关的柯西-黎曼算子

$$\bar\partial f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\mathrm{d}\overline{z^k}.$$

与复流形(X,J)相吻合的黎曼度量g称为Hermite度量, 在(T_X,g)上存在唯一与g相吻合而且$(0,1)$切矢量的共变微分等同于$\bar\partial$的仿射连络D. 由此(X,g)上同时存在Hermite连络D与黎曼连络在T_X上的限制∇. 若以$\omega_g=\mathrm{i}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}g_{\alpha\bar\beta}\mathrm{d}z^\alpha\wedge\mathrm{d}\overline{z^\beta}$标记$(X,g)$上的基本$(1,1)$形式, 则$D=\nabla$当且仅当$\mathrm{d}\omega_g=0$. 满足后者的Hermite度量$g$称为Kähler度量. 由此, 任意Kähler流形(X,g)的复子流形$(Z,g|_Z)$恒为Kähler流形. Kähler流形(X,g)上存在局部势函数φ使得$\omega_g=\mathrm{i}\partial\bar\partial\varphi$.

以$[w_0,\cdots,w_n]$标记$\mathbb{P}^n$的齐性坐标, $\alpha:\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}\to\mathbb{P}^n$为自然投射. 在$\mathbb{P}^n$上存在典型的Kähler度量, 即Fubini-Study度量g, 使得$\alpha^*\omega_g=\mathrm{i}\partial\bar\partial\log\|w\|^2$. 因此, 任意射影流形$Z\subset\mathbb{P}^n$均为Kähler流形.

Poincaré和Koebe证明了单值化定理: 单连通黎曼面三分为黎曼球面$\mathbb{P}^1$、复平面$\mathbb{C}$与单位圆盘Δ, 按顺序分别赋有曲率恒等于+1、0与−1的Hermite度量. 在高维即使是紧流形的万有覆盖也难以分类. 若以紧黎曼面的分类为借鉴, 则相应地有有界对称域Ω、欧几里得空间与紧型Hermite对称空间S, 而刻画具有特殊曲率性质的紧复流形为重要问题. 对于一般的紧复流形X, 存在以Kodaira维数$\kappa(X)$为分类手段的双有理分类理论, 其中满足$\kappa(X)=\dim(X)$的流形称为一般型紧流形, 满足$\kappa(x)=-\infty$的极端情形被猜想为等价于单直纹(即充满黎曼球面的)紧流形, 两者按序可以类比为亏格$\geqslant 2$的紧黎曼面与黎曼球面的推广.

1.2 “复微分几何与其应用”的缘起与大纲

作为“复微分几何与其应用”研究项目的前期工作, 本人的研究范畴围绕着Kähler几何, 特别是有界对称域Ω的紧或者具有有限体积的商空间$X_\Gamma:=\Omega/\Gamma$, 包含有限体积Kähler流形的紧致化定理(参见定理3.4), 以及紧型Hermite对称空间S的曲率刻画, 即广义Frankel猜想(参见定理2.1).

从20世纪90年代末开始, Hwang和Mok[1~9]发展了一套在单直纹射影流形$(X,\mathcal{K})$上由极小有理曲线诱导出来的微分几何理论. 具体而言, 在X上的一般点x可以定义由极小有理曲线的切线组成的子簇$\mathscr{C}_x(X)\subset\mathbb{P}T_x(X)$, 简称VMRT(variety of minimal rational tangents). 文献[1~10]等发展了一套既能用以攻克难题, 又具有一般理论意义的方法学, 从而解决了包含Picard数为1的G/P的Kähler形变刚性问题(参见定理2.2)和Lazarsfeld问题等经典代数几何问题. 与G结构不一样, VMRT结构$\pi:\mathscr{C}(X)\to X$作为纤维空间, 一般而言并非局部平凡的, 然而通过$\mathcal{K}$与其万有族上的微分系统, 发展出一套在VMRT结构上的微分几何理论, 从而验证了Cartan-Fubini原则(参见定理2.3). 文献[1]解决了赋有可约G结构的单直纹射影流形的刻画问题. 本人[11]提出了关于G/P的“重识问题”并解决了对称与接触流形的特例(参见定理2.4), 又与其他合作者发展了一套由Cartan-Fubini原则启发的非同维Cartan-Fubini定理[12]以及关于刻画$(X,\mathcal{K})$上的单直纹射影子簇的子VMRT理论[13,14], 解决了G/P上光滑Schubert链的Schur刚性等[14~16]刻画问题(参见定理2.5).

本人的研究范畴包含了与数论有关系的几何问题, 首先是解决了由Clozel和Ullmo[17]提出的有关不可约对称有界域至其乘积的全纯等距芽[18,19]以及全纯保度量映照芽[20]的刻画问题, 用以解决文献[17]中关于模对应的交换子的刻画问题(参见定理3.1). 更为广泛被关注的课题是Shimura簇上的函数域超越性理论(参见定理3.2). 本人[21,22]引进了一套糅合Kähler几何与代数几何里关于Chow概型与万有族的方法, 用以研究有界对称域Ω上通过Borel嵌入$\Omega\subset S$所定义的代数子簇Z到拟射影商空间X_Γ的投影$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包,

证明了当秩为1时适用于任意格Γ的Ax-Lindemann定理(参见定理3.3). Mok等人[23]在模型理论的o-极小结构[24]与复微分几何[25]等方法的基础上, 通过运用Hilbert概型与节丛(jet bundle)证明了Shimura簇上的Ax-Schanuel猜想(参见定理3.4), 其方法通过文献[26]被推广到周期域, 从而提供了Shafarevich猜想的重要研究手段[27,28]. 此外, 文献[23]的方法被广泛推广到混合Shimura簇[29~31](参见定理3.5). 另一方面, 对于任意格子群$\Gamma \subset \Omega$, 文献[24]中的数点定理并不适用, 由此文献[22]提供了一条使用复微分几何的崭新路径. 在此方向, 文献[32]通过研究Ω上圆盘的等距嵌入及应用Poincaré-Lelong方程证明了双代数射影流形的刻画定理(参见定理3.6).

2 VMRT几何理论

2.1 Kähler几何经典难题“广义Frankel猜想”: VMRT作为几何载体

“Frankel猜想”指的是源自Frankel[33]的猜想, 即具正全纯双截曲率的紧Kähler流形必然双全纯等价于射影空间$\mathbb{P}^n$. 1980年, Siu和Yau[34]运用稳定调和映照的方法证明了Frankel猜想. 同时, 按照在代数几何领域里更强的“Hartshorne猜想”, 任意具丰富切丛的射影流形必然双正则等价于$\mathbb{P}^n$. 1979年, Mori[35]发展了有理曲线的存在性与形变理论, 从而正面解决了Hartshorne猜想.

“广义Frankel猜想”指的是具非负全纯双截曲率的紧Kähler流形(X, g)必然局部等价于欧几里得空间与紧型对称空间的乘积. 按照20世纪70年代已知的结果, 问题可简化为证明“任意具非负全纯双截曲率和在一点具有正Ricci曲率并且第二Betti数为1的紧Kähler流形(X, g)必然双全纯等价于不可约紧型Hermite空间”. 运用Hamilton[36]定义的Ricci流, Bando[37]证明了上述流形(X, g)在Ricci流的演变下保持Kähler性质, 并且在3维时保持“具有非负全纯正截曲率”的性质. 另外, Mok和Zhong[38,39]证明了具有非负全纯双截曲率和正Ricci曲率的紧Kähler-Einstein流形必然双全纯等距于不可约紧型Hermite空间. 本人解决了广义Frankel猜想[40].

定理2.1 设(X, g)为具有非负全纯双截曲率的紧Kähler流形, 并以$(\widetilde{X}, \widetilde{g})$标记$(X, g)$的万有覆盖. 则$(\widetilde{X}, \widetilde{g})$必然双全纯等距于$(\mathbb{C}^n, s) \times (M, h)$, 其中$s$为$\mathbb{C}^n$上的欧几里得度量, 而$M$双全纯等价于紧型Hermite对称空间. 同时, (M, h)双全纯等距于$(M_1, h_1) \times \cdots \times (M_\ell, h_\ell)$, 其中所有$M_k (1 \leqslant k \leqslant \ell)$均为不可约紧型Hermite对称空间, 而当$M_k$的秩$\geqslant 2$时, (M_k, h_k)为紧型Hermite对称空间.

证明运用了非线性偏微分方程里的Ricci流与代数几何领域里的Mori理论. 综合文献[37~39], 本人[40]证明了任意维具有非负全纯双截曲率的紧Kähler流形(X, g)在Ricci流的演化中保持此曲率性质, 并且在存在一点$x_0 \in X$使得$\mathrm{Ric}(X, g)(x_0) > 0$的前提下, Kähler流形$(X, g_t)$, $t > 0$, 满足$\mathrm{Ric}(X, g_t) > 0$. 已知可以假设$b_2(X) = 1$, 因此Picard数为1. 文献[35]蕴涵X上存在着极小有理曲线, 并且对一般的参数化极小有理曲线$f : \mathbb{P}^1 \to X$, 有$f^*T_X \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^p \oplus \mathcal{O}^q$, $1 + p + q = n = \dim(X)$. 由此可知X为单直纹射影流形, 而且在一般点$x \in X$, 由所有切线$[T_x(\ell)] \in \mathbb{P}T_x(X)$所组成的集合的拓扑闭包$\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$为$p$维射影子簇. 虽然还没有引进一个名称, 但是$\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$恰恰是后来定名为极小有理切线簇(VMRT)的射影子簇(参见定理2.2). 当在一般点$x \in X$恒有VMRT $\mathscr{C}_x(X) \subsetneq \mathbb{P}T_x(X)$时, 文献[40]证明的关键在于验证当$t > 0$时$\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$在$(X, g_t)$上是平移不变的, 因此通过Berger对对称空间的刻画证明了X必然双全纯等距于秩$\geqslant 2$不可约紧型Hermite空间, 从而证明了广义Frankel猜想.

2.2 Picard数为1的有理齐性空间G/P在Kähler形变中的刚性问题: 由VMRT生成的亚纯分布

设X为任意单直纹射影流形(如Fano流形), 并以T_X标记其切丛, $\mathbb{P}T_X$标记其射影化切丛. 固定X上一个正线丛(L, h), 有理曲线$\Lambda \subset X$称为X上的极小有理曲线当且仅当Λ为自由有理曲线, 并且在所有自由有理曲线C中相对于L的次数$\deg_L(C) := \int_C c_1(L, h)$当$C = \Lambda$时取最小值, 其中对参数化有理曲线$f : \mathbb{P}^1 \to X$, $C = f(\mathbb{P}^1)$; Λ称为自由有理曲线当且仅当$\mathbb{P}^1$上矢量丛$f^*(T(X)) \geqslant 0$, 即$f^*(T(X)) \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)$, 其中所有$a_i \geqslant 0$, $n := \dim_{\mathbb{C}} X$.

以$\mathcal{Q}_0$标记包含某极小有理曲线C的Chow概型的不可约分支, 并以$\mathcal{Q}$标记其正规化. 定义$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{Q}_0$为$\mathcal{Q}_0$上

用以标记极小有理曲线的稠密Zariski开集, 则$\mathcal{K}_0$的正则化$\mathcal{K} \subset Q$为光滑的, 称为极小有理分支. 在$\mathcal{K}$上存在万有族$\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$与其赋值映照$\mu : \mathcal{U} \to X$, 并且有切线映照$\tau : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathbb{P}T_X$. $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$是以黎曼球面$\mathbb{P}^1$为纤维的局部平凡全纯纤维丛. 万有族$\mathcal{U}$上的点$w \in \mathcal{U}$等同于$(\Lambda, x)$, 其中$\Lambda := f(\mathbb{P}^1)$为极小有理曲线, 并且$x = f(0)$. 赋值映照$\mu : \mathcal{U} \to X$定义为$\mu(w) := x$. 设$x$为$\Lambda$的光滑点, 则$\tau(w) := [T_x(\Lambda)] \in \mathbb{P}T_x(X)$. 由所有极小有理曲线的切线组成的子簇的闭包$\mathscr{C}(X) \subset \mathbb{P}T_X$在一般点$x$上的纤维$\mathscr{C}_x(X)$称为$(X, \mathcal{K})$的极小有理切线簇(variety of minimal rational tangents, VMRT), $\pi : \mathscr{C}(X) \to X$称为$(X, \mathcal{K})$的VMRT结构. 运用VMRT几何理论, Hwang和Mok[2]解决了有关形变刚性代数几何经典难题.

定理2.2 设S为不可约紧Hermite对称空间, 并设$\pi : \mathcal{X} \to \Delta$为由紧复流形构成的正则族. 假设当$t \neq 0$时$X_t := \pi^{-1}(t)$双全纯等价于$S$, 并且中心纤维$X_0 : \pi^{-1}(0)$ 为Kähler流形. 那么, X_0也是双全纯等价于S的.

对任意复矢量空间V, 若以$\alpha : V - \{0\} \to \mathbb{P}V$标记商映照, 则对任意集合$E \subset \mathbb{P}V$以$\widetilde{E}$标记$\alpha^{-1}(E)$. 设$(X, \mathcal{K})$为任意单直纹射影流形, $\pi : \mathscr{C}(X) \to X$为其VMRT结构. 以$W \subset T_X$标记在一般点$x \in X$由$\widetilde{\mathscr{C}_x}(X)$生成的亚纯分布. 定理2.2证明的关键在于运用有理曲线的形变理论证明两个关于W的可积性的结果. 一方面, 如果$W \subsetneq T_X$, 文献[2]证明了W的可积性蕴涵着X的Picard数$\geqslant 2$. 另一方面, 又给出了$W \subsetneq T_X$可积的充分条件如下:

(†) 假设X的一般点x上的切线簇$\mathcal{T}_x(X) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W_x)$为线性非退化的, 则分布$W \subsetneq T_X$是可积的.

运用这两个结果, 文献[2]推导出在定理2.1的中心纤维X_0的一般点x_0上$\mathscr{C}_{x_0}(X_0) \subset \mathbb{P}T_{x_0}(X_0)$射影等价于模型$S$上的VMRT $\mathscr{C}_{x_0}(S) \subset \mathbb{P}T_0(S)$, 然后运用G结构理论与多复变函数论的Hartogs延拓定理得以重构$X_0 \cong S$.

以文献[2]为出发点, 文献[2,6,8,9,41]解决了Picard数为1的G/P上的Kähler形变刚性问题. 除了7维Fano齐性接触流形GQ(1, 5)(即5维超二次曲面上射影直线的模空间)以外, $S = G/P$的复结构均在Kähler形变的过程中保持不变. 文献[6]解决了G/P属于长根类的情形(即极大抛物子群$P \subset G$由李代数$\mathfrak{g}$的Dynkin图的长根所定义), 使用了代数的证明方法, 运用了Yamaguchi[42]刻画G/P上自然零幂微分系统的代数方法, 也使用了半单复李代数通过生成元素与Serre关系重构的结果, 关键在于根据上一段所叙述的条件(†)否定了VMRT所生成的亚纯分布W在$t \to 0$时发生突变. Hwang和Mok[9]则解决了主要的短根类(关乎C_n与例外李群F_4)的Kähler形变刚性问题. 以$\sigma : \Delta(\epsilon) \to \mathcal{X}$标记$\pi : \mathcal{X} \to \Delta$在充分小的圆盘$\Delta(\epsilon)$上的一般全纯截面. 文献[9]首先证明了VMRT $\mathscr{C}_{\sigma(t)}(X_t) \subset \mathbb{P}T_{\sigma(t)}(X_t)$当$t \to 0$时不可能发生突变. 设$Q \subset \mathbb{P}^m$为线性非退化的射影子簇, 以$\mathrm{Aut}'(Q) \subset \mathbb{P}\mathrm{GL}(m+1, \mathbb{C})$标记保持$Q$的射影线性自同构, $\mathfrak{aut}'(Q)$标记其李代数. 文献[9]发展了关于$\mathfrak{aut}'(Q)$的延拓的一般理论, 从而对由X_t上的整体矢量场所组成的复李代数$H^0(X_t, T_{X_t}) \cong \mathfrak{g}$当$t \to 0$时所发生的变异给出了限制, 用以重构$X_0 \cong G/P$.

Pasquier和Perrin[43]发现了Fano齐性接触流形S = GQ(1, 5)可以突变为拟齐性Fano流形, 突变的发生恰恰对应于$\mathscr{C}_0(X_t) \cong \mathbb{P}^1 \times Q^1$(其中$Q^1 \subset \mathbb{P}^2$为二次有理曲线)突变为$\mathscr{C}_0(X_0)$ ≅非平凡Hirzebruch曲面$\Sigma_2 = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$的情形. Hwang和Mok在Kähler形变问题上的基础理论为研究各类拟齐性Fano流形的形变理论提供了重要的工具. 例如, Fu和Li[44]最近证明了单李代数G的奇妙扩充$\overline{G} =: S$的Fano形变刚性, 即在$t \neq 0$时$X_t \cong S$并且在X_0为Fano流形的前提下恒有$X_0 \cong S = \overline{G}$. 另外, 作为文献[9]所引进的关于线性非退化射影簇延拓理论的后续研究, Fu和Hwang[45]完成了$\mathfrak{aut}'_1(Q) \neq 0$射影簇$Q \subset \mathbb{P}^N$的分类, 其中$\mathfrak{aut}'_1(Q) \neq 0$为李代数$\mathfrak{aut}'(Q)$的第一次延拓.

2.3 Cartan-Fubini延拓原则与Lazarsfeld问题的解决

以(S, g)标记紧型秩$\geqslant 2$不可约Hermite对称空间, $\dim(S) = n$, $G_c := \mathrm{Aut}_0(S, g)$, $K \subset G_c$为参考点$0 \in S$的稳定子群, $S = G_c/K$. 设$G := \mathrm{Aut}_0(S)$, $P \subset G$为极大抛物子群, $S = G/P$, $P = K^{\mathbb{C}} M^-$, $K^{\mathbb{C}} \subset K$为P的Levi子群, $M^- \subset P$为幂单根式. 那么, S上自然存在着全纯$K^{\mathbb{C}}$结构. S由双正则于$\mathbb{C}^n$的一类Zariski开集U所覆盖, 其中$U \cong \mathbb{C}^n$上存在Harish-Chandra全纯坐标, 并且$\mathbb{C}^n$上的欧几里得平移$T_a(z) = z + a (a \in \mathbb{C}^n)$构成$G$的Abel复子群$M^+$, 因此$S$上的自然$K^{\mathbb{C}}$结构在$U$上的限制通过$K^{\mathbb{C}} \times U \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$来体现, 即$S$的自然$K^{\mathbb{C}}$结构是平坦的. $K^{\mathbb{C}}$作用在$T_x(S)$上, 由$T_x(S)$的最高权矢量

诱导出$\mathcal{W}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$, 称为最高权轨道. 容易证明, 后者等同于$S$上的VMRT $\mathscr{C}_x(S)$, 即纤维子丛$\mathcal{W} = \mathscr{C}(S)$. 设$U, V \subset S$为连通非空开集, $f : U \xrightarrow{\cong} V$为保持自然$K^{\mathbb{C}}$结构的双全纯映照, 即

$$[\mathrm{d}f](\mathcal{W}|_U) = \mathcal{W}|_V.$$

运用李代数的上同调理论, Ochiai[46]证明了存在$F \in \mathrm{Aut}(S)$使得

$$f \equiv F|_U.$$

由于在S上$\mathcal{W} = \mathscr{C}(S)$, Ochiai上述的定理启发了对VMRT结构的推广, 称为Cartan-Fubini原则. 文献[5]证明了以下的Cartan-Fubini延拓定理.

定理2.3 设$(X, \mathcal{K})$与$(X', \mathcal{K}')$为Picard数为1的单直纹射影流形. 假设$(X, \mathcal{K})$在一般点$x \in X$的VMRT $\mathscr{C}_x(X)$维数为$p \geqslant 1$, 并且在$\mathscr{C}_x(X)$的一般点$[\alpha] \in \mathrm{Reg}(\mathscr{C}_x(X))$的射影第二基本型$\sigma_{[\alpha]}$的核(†) $\mathrm{Ker}(\sigma_{[\alpha]}) = 0$. 设$U \subset X$, $U' \subset X'$为非空连通开集, 并且$f : U \xrightarrow{\cong} U'$为双全纯映照, 使得$[\mathrm{d}f](\mathscr{C}(X)|_U) = \mathscr{C}(X')|_{U'}$. 那么, 存在双全纯映照$F : X \xrightarrow{\cong} X'$, 使得$F|_U \equiv f$.

以ν标记高斯映照. 要求(†) $\mathrm{Ker}(\sigma_{[\alpha]}) = 0$等同于要求$\mathrm{d}\nu([\alpha])$是单射的. 假如VMRT $\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$为非线性子流形, $p \geqslant 1$, 则$\mathrm{d}\nu([\alpha])$在一般点$[\alpha] \in \mathrm{Reg}(\mathscr{C}_x(X))$必然是单射的.

定理2.3的证明运用了代数几何领域中关于有理曲线的Mori分裂引理以及多复变解析延拓与全纯包的方法, 首先是证明了VMRT结构$\pi : \mathscr{C}(X) \to X$上的重言叶状结构$\mathscr{F}$在上述非退化条件(†)下完全由纤维空间$\pi : \mathscr{C}(X) \to X$所确定, 证明涉及在$\mathscr{C}(X)$与模型空间上构造微分系统. 证明同时推导出对任意单直纹射影流形$(X, \mathcal{K})$在一般点$x \in X$的切线映照$\tau_x : \mathcal{U}_x \dashrightarrow \mathscr{C}_x(X)$为全纯双有理映照. 另外, 在$X \not\cong \mathbb{P}^n$和Picard数为1的前提下, 文献[7]从Cartan-Fubini原则推导出任意有限全纯映照$h : Y \to X$均为刚性的.

代数几何领域里的Lazarsfeld问题是Lazarsfeld[47]提出的. Hwang和Mok[3]正面回答了此问题.

定理2.4 设$f : Z \to X$为从Picard数为1的有理齐性空间$Z = G/P$到光滑复流形X的非常值满射全纯映照. 则或者$X = \mathbb{P}^n$, 或者$f : Z \xrightarrow{\cong} X$.

Hwang和Mok[3]运用Ochiai上述定理与G/P上全纯微分系统[42]首次正面解决了Lazarsfeld问题, 在文献[7]中又给出了脱离了G/P的分类理论而基本根据上述Cartan-Fubini延拓定理推导出来的证明.

2.4 G结构与Picard数为1的G/P上的重识问题: 极小有理曲线至$\mathscr{C}(X)$重言提升(tautological lifting)的相对第二基本型的平移不变性

以S标记n维紧型秩$\geqslant 2$的不可约Hermite对称空间. 根据(定理2.3), S上存在着自然的可积(即平坦) $K^{\mathbb{C}}$结构. $K^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$是可约线性李代数. Guillemin[48]发展了关于可约全纯G结构的可积性的理论, 定义了有限多个类似于曲率的张量Θ_k, 而所有$\Theta_k = 0$给出G结构为平坦的充要条件. Hwang和Mok[1]证明了具可约G结构单直纹射影流形的刻画定理.

定理2.5 设$L \subsetneq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$为可约线性子群, 而$X$为赋有$L$结构的单直纹射影流形. 那么, X必然全纯等价于某秩$\geqslant 2$不可约Hermite对称空间S.

X上的L结构给出最高权轨道$\mathcal{W} \subset \mathbb{P}T_X$. 文献[1]首先证明了$\mathcal{W} = \mathscr{C}(X)$, 从而$X$上所有极小有理曲线$\ell$的重言提升$\hat{\ell}$均在$\mathcal{W}$上, 并运用$T_X|_\ell$的标准分裂推导出上述所有曲率类张量$\Theta_k = 0$.

Mok[11]提出了如下关于Picard数为1的$G/P =: S$的重识问题: 若$(X, \mathcal{K})$为Picard数为1的单直纹射影流形, 而其在一般点$x \in X$的VMRT $\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$射影等价于$\mathscr{C}_0(S) \subset \mathbb{P}T_0(S)$, 那么, X是否全纯等价于S? 提出重识问题的一个动因在于为形变刚性$\nu : \mathcal{X} \to \Delta$提供证明机制: 首先证明在一般截面$s : \Delta(\epsilon) \to \mathcal{X}$上VMRT没有当$t \to 0$时出现突变, 然后引用(假设成立)对"重识问题"的正面解得到$X \cong S$的结论. 另外, 重识问题在特殊情形早被Mok[49]证明并用以刻画某些赋有数值有效切丛的Fano流形. 本人观察到在VMRT结构$\pi : \mathscr{C}(X) \to X$上, 沿着一条标准极小有理曲线$\ell \subset X$的重言提升$\hat{\ell} \subset \mathscr{C}(X)$, $\pi : \mathscr{C}(X) \to X$的相对射影第二基本型$\sigma$是平移不变的, 更确切地, σ可以理解为$\mathbb{P}^1$上某个平凡全纯矢量丛上的全纯截面, 由此从ℓ的x点σ唯一且平凡地从$[\alpha] := [T_x(\ell)]$平移到另一点y上的$[\beta] := [T_y(\ell)]$. 恰恰可以从σ的平移不变性推导出在X上的稠密Zariski开集上定义的S结构可以解析延拓到整个X上, 从而由文献[1]得到$X \cong S$的结论. 当S为齐性接触流形时, 同样地, 第3次基本型也是平移不变的. 对其他长根类$S := (\mathfrak{g}, \alpha_k)$, Hong和Hwang[50]得

到了同样的结果, 证明涉及Cartan连络的构造. 短根类辛Grassmann流形$S = (C_n, \alpha_k)(2 \leqslant k \leqslant n-1)$的情形最近被Hwang和Li[51]正面解决了.

2.5 非同维Cartan-Fubini与子VMRT结构的延拓: G/P上Schubert刚性与Schur刚性

Hong和Mok[12](包含Mok[52]的特例)证明了如下的非同维Cartan-Fubini延拓定理.

定理2.6 设$(Z,\mathcal{H})$与$(X,\mathcal{K})$为单直纹射影流形. 假设Z的Picard数为1, 并且$\mathscr{C}_z(Z)$在一般点$z \in Z$的维数> 0. 设$U \subset Z$为连通开集, $f: U \to X$为全纯浸入. 假设f谨守VMRT, 并且相对于$(\mathcal{H},\mathcal{K})$为非退化的. 那么, 存在有理映照$F: Z \dashrightarrow X$, 使得$F|_U \equiv f$.

$(X,\mathcal{K})$的好集指的是满足$\tau_x: \mathcal{U}_x \dashrightarrow \mathscr{C}_x(X)$为双有理全纯映照的点集, 其补集称为坏集. f谨守VMRT指的是在一般点$z \in U$, $[\mathrm{d}f](\mathscr{C}_z(Z))$为$\mathscr{C}_{f(z)}(X)$的线性截面. 相对于$(\mathcal{H};\mathcal{K})$, 全纯浸入$f: U \to X$称为非退化当且仅当$f(U)$并非包含在$(X,\mathcal{K})$的坏集$B$里, 并且在一般点$z \in U$及一般光滑点$\alpha \in \widetilde{\mathscr{C}_z}(Z)$, $\mathrm{d}f(\alpha)$为$\widetilde{\mathscr{C}}_{f(z)}(X)$的光滑点; 而$\widetilde{\mathscr{C}}_{f(z)}(X) \subset T_{f(z)}(X)$处于$\mathrm{d}f(\alpha)$的第二基本型$\sigma$当限制于$T_{\mathrm{d}f(\alpha)}(\mathrm{d}f(\widetilde{\mathscr{C}_z}(Z))) \subset T_{\mathrm{d}f(\alpha)}(\widetilde{\mathscr{C}}_{f(z)}(X))$时仅有平凡核, 即

(††) $\{\zeta \in T_{\mathrm{d}f(\alpha)}(\widetilde{\mathscr{C}}_{f(z)}(X)) : \forall \xi \in T_{\mathrm{d}f(\alpha)}(\mathrm{d}f(\widetilde{\mathscr{C}_z}(Z))), \sigma(\zeta,\xi) = 0\} = \mathbb{C}\mathrm{d}f(\alpha)$.

Mok和Zhang[14]定义了在$(X,\mathcal{K})$上的子VMRT结构. 设$W \subset X - B$为连通开集, $S \subset W$为复子流形, $\dim(S) =: s \geqslant 1$, $\mathscr{C}(S) := \mathscr{C}(X) \cap \mathbb{P}T_S$. 如果自然投影$\varpi: \mathscr{C}(S) \to S$为满射的, 而且存在正整数$m$, 使得在任意点$x \in S$, ϖ处于x的纤维$\mathscr{C}_x(X)$共有m个不可约分支, 那么$\varpi: \mathscr{C}(S) \to S$称为子VMRT结构. 对于后者, 文献[14]定义了类似于(††)并且关系到$\mathscr{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$限制于$\mathscr{C}_x(S)$的第二基本型的投影几何条件(††)′, 称其为相对于子结构的非退化条件, 使得S可以通过递加极小有理曲线得以扩充. 文献[14]通过多复变函数论关于解析子集的Thullen延拓技巧证明了以下的定理.

定理2.7 设$S \subset W \subset X - B$为$s$维复子流形, $\mathscr{C}(S) := \mathscr{C}(X) \cap \mathbb{P}T_S$, $\varpi: \mathscr{C}(S) \to S$为子VMRT结构. 假设在一般点$x \in S$, $(\mathscr{C}_x(S), \mathscr{C}_x(X))$满足子结构非退化条件(††)′, 并且由$\widetilde{\mathscr{C}}(S)$线性生成的亚纯分布矢量场$\mathscr{D}$通过迭代矢量场的李括号运算生成$T_S$, 那么, 存在$s$维的不可约射影子簇$Z \subset X$使得$S \subset Z$.

Mok和Zhang[14]定义了在Picard数为1的有理齐性空间$X = G/P$的可容对$(X_0; X)$, 即(a) 包含映射$\iota: X_0 \hookrightarrow X$诱导出$\iota_*: H_2(X_0,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$; (b) 若把$X$与通过第一典型嵌入$\nu: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$所得到的映像$\nu(X)$等同起来, 则$X_0 \subset X$为射影线性截面. 若$X = G/P$由标记Dynkin图$(\mathfrak{g},\alpha_k)$所定义, 而$X_0 = H/Q$由其标记Dynkin子图$(\mathfrak{h},\alpha_\ell)$所定义,则$(X_0,X)$为可容对, 称为子图类可容对. 可容对$(X_0,X)$称为刚性对当且仅当

($*$) 给定任意以$(X_0;X)$为模型的子VMRT结构$\varpi: \mathscr{C}(S) \to S$都存在自同构$\Phi \in \mathrm{Aut}(X)$使得$\Phi(S) \subset X_0$.

文献[14]证明了以下定理.

定理2.8 设$X = G/P$是Picard数为1的有理齐性空间, $(X_0;X)$为子图类可容对, $X_0 \subset X$非线性. 那么(X_0,X)为刚性对.

在有理齐性流形$X = G/P$上的Schubert链$X_0 \subset X$具有Schur刚性当且仅当给定任意满足$[Z] = r[Z_0]$的代数圈Z恒有$g_k \in \mathrm{Aut}(X)$, $1 \leqslant k \leqslant r$, 使得$Z = g_1(X_0) + \cdots + g_r(X_0)$. Bryant[53]与Walters[54]首先考虑了紧型不可约Hermite对称空间S, 并通过积分公式得知Z于一般光滑点为某Schur微分系统$\mathscr{S}$的解. 另外, Schubert微分系统$\mathscr{D}$的解V是每一点的切空间等价于模型$X_0 \subset X$的切空间. 对称空间S上非线性光滑Schubert链的Schur刚性可以通过Schubert刚性加上$\mathscr{D} = \mathscr{S}$得以验证(Hong[55])(包括$S$上奇异Schubert链的Schur刚性问题则通过李代数上同调论由Robles-The[56]解决). 对于通过标记Dynkin子图所定义的齐性Schubert链$X_0 \subset X$, Schubert刚性等价于$(X_0;X)$为刚性对. 不过, 对非对称Picard数为1的$X = G/P$无从验证$\mathscr{D} = \mathscr{S}$. Hong和Mok[15]通过研究$X_0 \subset X$作为$(X,\mathcal{K})$上单直纹复子流形的形变解决了$r = 1$特例的Schur刚性, 称其为同调刚性. 文献[16]又通过$\mathbb{C}^*$作用证明了同调刚性蕴涵Schur刚性, 定理如下.

定理2.9 设$X = G/P$如上, $X_0 \subset X$为非线性光滑Schubert链. 那么, $X_0 \subset X$具有Schur刚性.

Mok[52]以非同维Cartan-Fubini延拓得出蔡宜洵逆紧映照刚性定理(1993年)在第一类典型域情况的新证明. 文献[13]阐述了如何在有界对称域之间的逆紧映照刻画问题上应用子VMRT理论. Mok[57]给出了验证非子图类可容对$(X_0;X)$为刚性对的路径, 又证明了

当$n \geqslant 3$时$(\mathrm{Gr}^{\mathrm{III}}(n,n);\mathrm{Gr}(n,n))$为刚性对.

最近, Hong和Mok[58]发展了有理齐性空间上谨守某类齐性子空间的全纯浸入芽的Cartan-Fubini延拓原则.

3 复微分几何与数论的界面

3.1 Kähler流形间的全纯等距与相关映照及其对算术动力系统的应用

Mok和Ng[20]回答了Clozel和Ullmo[17]的问题, 并取得以下算术动力系统的结果.

定理3.1 设Ω为任意不可约有界对称域, 并把$\mathrm{Aut}(\Omega)$视为定义在$\mathbb{Q}$上的线性代数群$\mathscr{G}$. 设$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$为无挠同余子群, $X_\Gamma := \Omega/\Gamma$. 设$g \in \mathscr{G}$为有理点, $S_g \subset X_\Gamma \times X_\Gamma$为由$g$定义的外模对应. 设$Y \subset X_\Gamma \times X_\Gamma$为与$S_g$交换的代数对应. 那么, Y必然是模对应.

不可约模对应指的是由满足Γ与$g^{-1}\Gamma g$为可公度格子群的$g \in \mathrm{Aut}(\Omega)$通过$S_g = \pi(i_g(\Omega))$所定义的代数对应, 其中$i_g : \Omega \to \Omega$定义为$i_g(z) = (z, g(z))$, 而$\pi : \Omega \times \Omega \to X_\Gamma \times X_\Gamma$为万有覆盖. 称$S_g$为外模对应, 如果$g$与$\Gamma$所生成的子群在$\mathrm{Aut}(\Omega)$中为非离散的. 模对应指的是有限个$S_g$的和. 定理3.1为下述复微分几何定理[20]的推论.

定理3.2 设Ω为任意不可约有界对称域, $\dim(\Omega) \geqslant 2$, 并以$\mathrm{d}\mu_\Omega$标记Ω的Bergman度量的体积元素. 设d_1和d_2为正整数, $f = (f_1,\cdots,f_{d_2}) : (\Omega, d_1\mathrm{d}\mu_\Omega; 0) \to (\Omega^{d_2}, \pi_1^*\mathrm{d}\mu_\Omega + \cdots + \pi_{d_2}^*\mathrm{d}\mu_\Omega; 0)$为全纯保测度映照芽(其中$\pi_k : \Omega^{d_2} \to \Omega$为至第$k$个因子的投影), 使得每一个$f_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 在一般点的秩均为最大的. 那么, $d_1 = d_2$, 并且f可以解析延拓为Ω上全纯全测地嵌入.

设$Y \subset X_\Gamma \times X_\Gamma$为代数对应, 第$i$个投影$\mathrm{pr}_i : Y \to X_\Gamma$的一般纤维为有$d_i$个点的集合. 对一般点$x \in X$, $\mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_2^{-1}(x)) = \{x_1,\cdots,x_{d_2}\}$, 从而得出$f_0 : (X;x) \to (X;x_1) \times \cdots \times (X;x_{d_2})$. 代数对应可视为多值映照, 从而定义代数对应的复合. Clozel和Ullmo[17]通过恒等式$Y \circ S_g \equiv S_g \circ Y$及其迭代证明定理3.2蕴涵定理3.1, 而文献[20]通过CR几何的结果(Huang[59])与多复变Alexander类结果证明了定理3.2.

Clozel和Ullmo[17]同时提出了类似于定理3.2而把保测度全纯映照芽换成全纯等距芽$f = (f_1,\cdots,f_{d_2}) : (\Omega, \lambda\mathrm{d}s_\Omega^2; 0) \to \left(\Omega^p, \pi_1^*\mathrm{d}s_\Omega^2 + \cdots + \pi_p^*\mathrm{d}s_\Omega^2; 0\right)$, 其中$\lambda > 0$为任意正实数, 并由此推导出关于模对应的交换子的应用. 这里对任意有界域U, 以$\mathrm{d}s_U^2$标记其Bergman度量. 文献[17]观察到在Ω的秩$\geqslant 2$时f的刻画可以从文献[60, 61]中关于Hermite度量刚性诱导出来. 本人[18]通过全纯等距芽的解析延拓与Alexander定理解决了余下的$\Omega = \mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$的情形, 并在后来的文献[19]中发展了一套适用于赋有有理Bergman核的有界域上的解析延拓方法.

定理3.3 设$D \Subset \mathbb{C}^n, \Omega \Subset \mathbb{C}^N$为有界域. 设$x_0 \in D, \lambda > 0$, $f : (D, \lambda\mathrm{d}s_D^2; x_0) \to (\Omega, \mathrm{d}s_\Omega^2; f(x_0))$为全纯等距映照芽. 设$K_D(z,w)$ (相应地, $K_\Omega(\xi,\zeta)$) 可延拓为$(z,\overline{w})$ (相应地, $(\xi,\overline{\zeta})$) 的有理函数. 那么, 处于$(x_0, f(x_0))$的解析子簇芽$\mathrm{Graph}(f)$可延拓为不可约仿射代数子簇$S^\sharp \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$. 若$(\Omega, \mathrm{d}s_\Omega^2)$完备, 则$S := S^\sharp \cap (D \times \Omega)$为全纯等距嵌入$F : (D, \lambda, \mathrm{d}s_D^2) \to (\Omega, \mathrm{d}s_\Omega^2)$的图. 若$(D, \mathrm{d}s_D^2)$完备, 则$F$逆紧.

3.2 函数域超越性理论与算术几何: 研究背景

Shimura簇$X_\Gamma = \Omega/\Gamma, \pi_\Gamma : \Omega \to X_\Gamma$往往是代数几何分类问题的模空间. 例如, 若以$\mathcal{H}$标记上半平面, 则$\mathcal{H}/\mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}$为椭圆曲线的模空间, 而$\mathcal{A}_g := \mathcal{H}_g/\mathbb{P}\mathrm{Sp}(g,\mathbb{C})$, 称为Siegel模空间, 是赋有主极化的Abel簇的模空间. 此处以$\mathcal{H}_g$标记Siegel上半平面, 即由满足$\mathrm{Im}(\tau) > 0$的$g \times g$复对称矩阵τ组成的区域, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. 在Shimura簇上有特殊点的概念, 如以$E_\tau$标记$\tau \in \mathcal{H}$所定义的椭圆曲线. 那么, $j(\tau)$称为特殊点当且仅当$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(E_\tau)$不是平凡的, 即CM(complex multiplication)点(复乘点). 同时可以定义(弱)特殊子簇的概念. X_Γ的弱特殊子簇恰恰等同于全纯测地子集, 而特殊子簇为包含一个特殊点的全纯测地子集.

André-Oort猜想是关于X_Γ上的特殊点的著名猜想. 根据此猜想, 在X_Γ上由特殊点组成的集合E的Zariski闭包为有限个特殊子簇的并集. X_Γ的特殊点可与Abel簇的有挠点类比. Zannier首先提出攻克关于特殊点种种猜想的策略, 即把问题拆分为两半, 一半是关于特殊点Galois轨道的下界估计, 属于代数数论范畴; 另一半是关于刻画非0维的特殊子簇, 属于复几何范畴. Pila和Zannier[62]运用这个策略给出了关于Abel簇的子流形上的Manin-Mumford定理的新证明. 至于André-

Oort猜想, 几何部分等同于X_Γ上的Ax-Lindemann猜想, 即对任意不可约代数子簇(通过Borel嵌入定义) $Z \subset \Omega$, $\pi_\Gamma(Z)$在X_Γ里的Zariski闭包Y必然是全测地子集. X_Γ上的Ax-Lindemann定理由Klingler等人[63]证明. Tsimerman[64]运用关于$\mathcal{A}_g$的Ax-Lindemann定理特例(由Pila和Tsimerman于2014年证明)和代数数论解决了$\mathcal{A}_g$上的André-Oort猜想. 文献[63]中的证明运用了数理逻辑的模型论里o-极小结构理论. 关于后者参见文献[65].

在$\{\mathbb{R}^n : n \in \mathbb{N}\}$上的结构$\mathscr{S}$指的是由满足以下条件(♯)的Boole代数$\mathscr{S}_n \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, $n \in \mathbb{N}$组成的集合.

(♯) $\mathscr{S}$内可以取乘积与坐标投影, $\mathscr{S}_2$包含了$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$的对角集, 而且$\mathscr{S}_3$包含了加法+与乘法×的图.

结构$\mathscr{S}$称为o-极小的当且仅当$\mathscr{S}_1$的任意元是有限个区间与点的并集. 任意$\mathscr{S}_n$的元称为可定义集, 而任意o-极小结构$\mathscr{S}$里的可定义集只有有限个连通分支. 以$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$标记包含$\mathbb{R}^n$上次解析集合及实指数函数的图Graph(exp)的极小结构. Dries和Miller[66]证明了$\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$是o-极小的.

以$h : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{N}$标记标准的高度函数. 设$Z \subset \mathbb{R}^n$为可定义集, 并以$Z^{\mathrm{alg}}$标记所有包含在$Z$里连通非0维半代数集的点的并集. 对任意子集$E \subset \mathbb{R}^n$, 以$N(E;T)$标记$E \cap \mathbb{Q}^n$里$h$值$\leqslant T$的点的个数, $N(\cdot\,;T)$称为计数函数. Pila和Wilkie[24]证明了以下重要的数点定理: 对任意$\epsilon > 0$, 存在$c_\epsilon > 0$, 使得$N((Z - Z^{\mathrm{alg}}) \cap \mathbb{Q}^n; T) \leqslant c_\epsilon T^\epsilon$, 其论证追溯到Bombieri和Pila[67]的丢番图估计.

文献[24]在文献[63]中的应用如下. 定义代数$\mathbb{Q}$群$G := \mathrm{Aut}_0(\Omega)$和算术群$\Gamma \subset G(\mathbb{Z})$ ($Z \subset \Omega$)为不可约代数子簇, Y为$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包. 设W为$\pi_\Gamma^{-1}(Y)$的极大不可约代数子簇. 以$\Theta \subset G$标记W的稳定子群, 以$H \subset G$标记$G(\mathbb{Z}) \cap \Theta \subset G$的Zariski闭包的单位连通分支. 那么, $H \subset G$为非平凡$\mathbb{Q}$群, 并且H为非紧李群. 证明采用反证法, 重要步骤如下. 存在X_Γ的可定义基本区$\mathcal{F} \subset \Omega$使得$\pi_\Gamma|_{\mathcal{F}}$也是可定义的. 定义$E := \{\gamma \in \Gamma : W \cap \gamma\mathcal{F} \neq \emptyset\}$. 一方面, 根据文献[24], $N(E - E^{\mathrm{alg}}; T)$的增长是次多项式的. 另一方面, 运用Hwang-To[25]关于Ω上解析子簇在测地球上的体积下界估计证明$N(E,T)$具有多项式增长, 由此得出$E^{\mathrm{alg}} \neq \emptyset$, 并以文献[24]中的强化形式完成证明.

Peterzil和Starchenko[68]在o-极小几何的基础上建构了一套驯顺复几何(tame complex geometry), 包括证明了可定义Chow定理, 用以验证某些在拟射影簇的全纯子簇必然为拟射影子簇.

毋庸置疑, Shimura簇上的函数域超越性理论涉及复微分几何与模型理论. 本人对该问题的关注始自文献[21]. 2013年, 本人在ETH(Eidgenössische Technische Hochschule Zürich)的“数论与几何”会议上进行了关于完全以复几何的角度攻克包含非算术格Ax-Lindemann猜想的演讲, 从事包含非算术格Ax类问题的研究, 同时开展与数论专家在Shimura簇有关问题上的交流与合作.

3.3 关于秩为1的任意格的Ax-Lindemann定理: Kähler几何与Chow概型的应用

设Ω为任意有界对称域. 设$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$为无挠算术格, 紧致的商空间$X_\Gamma$为射影流形. 若$X_\Gamma$非紧, 根据Satake等人[69,70]的紧致化定理或Mok和Zhong[73]的复微分几何紧致化定理, X_Γ为拟射影流形, 即不可约射影簇的稠密光滑Zariski开集. Mok和Zhong[71,72]的紧致化定理如下.

定理3.4 设(X,g)为n维完备Kähler流形, ω为其Kähler形式, 且体积$(X,g) < \infty$. 设(X,g)的黎曼截曲率的绝对值有上界, 并且其拓扑为有限的. 假设在X上存在Hermite全纯线丛(L,h), $a, b > 0$, 使得$a <$ 曲率$(L,h) < b$. 当$k > 0$时, 以$\mathcal{N}(X, E^k)$标记E^k属于Nevanlinna类的所有全纯截面s, 即所有满足$\int_X \max(\log \|s\|_{h^k}, 0)\frac{\omega^n}{n!} < \infty$的全纯截面. 那么, $\dim(\mathcal{N}(X,E^k)) < \infty$, 并且, 存在正整数$k$使得$\mathcal{N}(X,E^k)$无公共零点并把$X$嵌入$\mathbb{P}(\mathcal{N}(X,E^k)^*)$使得其映像为拟射影流形.

在有界对称域Ω上存在$\mathrm{Aut}(\Omega)$不变Kähler-Einstein度量g_Ω. 通过π_Γ诱导出X_Γ上完备度量g, 且体积$(X_\Gamma, g) < \infty$. 由于(X_Γ, g)满足局部齐性, 其黎曼截曲率的绝对值有上界, 因此定理3.4适用于(X_Γ, g), 从而给出射影紧致化$X_\Gamma \subset X_\Gamma^\sharp$的复微分几何证明. 定理3.4也适用于$X_\Gamma$上的局部齐性光滑全纯纤维丛.

设$W \subset S$为不可约代数子簇, Z为$W \cap \Omega$的不可约分支, $\mathcal{K}$为Chow概型Chow(S)中包含$[W]$的不可约分支. 以$\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$标记$\mathcal{K}$的万有族, 以$\mu : \mathcal{U} \to S$标记其取值映照, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}|_\Omega := \mu^{-1}(\Omega)$. $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$自然地作用在$\mathcal{U}_0$上, $\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{U}_0/\Gamma$. 因此$\mathcal{U}_\Gamma$可视为某亚

纯叶状结构$\mathscr{F}$的载体. 依循文献[22]中的方法知, 存在S上的全纯$\mathbb{P}^N$丛$\nu : \mathscr{P} \to S$, 使得$\mathcal{U} \subset \mathscr{P}$, $\mathrm{Aut}(S)$自然地作用在$\mathscr{P}$上, $\mathscr{P}_0 := \mathscr{P}|_\Omega$, $\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathscr{P}_\Gamma := \mathscr{P}_0/\Gamma$; 存在$\nu_\Gamma : \mathscr{P}_\Gamma \to X_\Gamma$. 由定理3.4推出$\mathscr{P}_\Gamma$以及$\mathcal{U}_\Gamma \subset \mathscr{P}_\Gamma$的拟射影性. 以$\mathscr{P}_\Gamma \subset \mathscr{P}^\sharp_\Gamma$标记射影紧致化, 运用文献[72]可证明$\mathscr{F}$解析延拓为射影子簇$\overline{\mathcal{U}_\Gamma} \subset \mathscr{P}^\sharp_\Gamma$的亚纯分布, 即叶状结构$\mathscr{F}$为代数的, 而$\mathcal{U}_\Gamma$上某$\mathscr{F}$饱和子簇$\mathscr{Z}$到$X_\Gamma$的投影给出$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包$Y$. 若$\Omega$不可约, 则根据Margulis超刚性定理, 当秩$\geqslant 2$时Γ必然是算术格, 由此文献[22]只考虑$\Omega = \mathbb{B}^n$, 并证明了以下定理.

定理3.5 设$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$为任意格, $\pi_\Gamma : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n/\Gamma =: X_\Gamma$. 设$Z \subset \mathbb{B}^n$为代数子簇, Y为$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包. 那么, $Y \subset X_\Gamma$是全测地子集.

以$\mathcal{W}$标记$\pi_\Gamma^{-1}(Y)$的不可约分支. $\mathscr{E} := \mathscr{F}|_{\mathscr{Z}}$为$\mathscr{Z}$上的代数叶状结构, $Y = \nu_\Gamma(\mathscr{Z})$. 定义$s := \dim(Z)$, $d := \dim(Y)$. 由此Y由$\pi_\Gamma(W \cap \Omega)$, $[W] \in \mathcal{K}$充满, $\dim(W) = s$, $\mathcal{W}$由$W \cap \Omega$充满, 因此存在$p \in \partial\mathcal{W}$和经过$p$并与$\partial\mathbb{B}^N$横截的$d$维复流形$\mathscr{D}$, 使得$\mathcal{W} \cup \mathscr{D}$为$\mathcal{W}$的解析延拓, 而$\mathscr{D}$可以全纯分解为以$t \in \Delta^{d-s}$为全纯参数的叶块$D_t$, $D_t \subset W_t$为连通开集, $[W_t] \in \mathcal{K}$. 以g_n标记在$\mathbb{B}^n$上全纯截曲率恒等于-2的Kähler-Einstein度量. 由文献[73]知, $(\mathscr{D}, g_n|_{\mathscr{D}})$的渐近全纯截曲率为$-2$. 可假设$\Gamma$为无挠格. 以$\Gamma'$标记$\pi_1(Y)$在$\Gamma = \pi_1(X_\Gamma)$的映像. 利用$\mathcal{W}$的$\Gamma'$不变性[22]对$\mathcal{W}$进行重正则化(即使当$X_\Gamma$非紧时), 从而推出$\mathcal{W} \subset \mathbb{B}^n$为全测地子流形. 定理的证明在非紧的情况运用了文献[74]中关于$\mathbb{B}^n/\Gamma$的射影紧致化结果.

3.4 Mok-Pila-Tsimerman关于Shimura簇上的Ax-Schanuel定理

不可约子簇$W \subset \Omega \times X_\Gamma$称为$\Omega \times X_\Gamma$的代数子簇当且仅当存在拟射影簇$W' \subset S \times X_\Gamma$, 使得$W$为$W' \cap (S \times X_\Gamma)$的不可约分支. 以$\mathscr{D} \subset \Omega \times X_\Gamma$标记$\pi_\Gamma$的图. 下述定理为Mok等人[23]最主要的成果.

定理3.6 (Shimura簇上的Ax-Schanuel定理) 设$W \subset \Omega \times X_\Gamma$为代数子簇. 假设存在$W \cap \mathscr{D}$的不可约分支$U$使得$U$维数比预期大, 即$\mathrm{codim}(U) < \mathrm{codim}(W) + \mathrm{codim}(\mathscr{D})$, 也即$\dim(U) > \dim(W) - \dim(X)$. 那么, 存在全测地子集$Y \subsetneq X_\Gamma$, 使得$Y$包含了$U \subset \Omega \times X_\Gamma$到$X_\Gamma$上的投影.

设$Z \subset \Omega$为不可约代数子簇, 并且$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包$Y \subsetneq X_\Gamma$. 取$W = Z \times Y$, 则$\dim(W \cap \mathscr{D}) = \dim(Z) > \dim(W) - \dim(X_\Gamma)$, 由此推导出Shimura簇上的Ax-Schanuel定理蕴涵Ax-Lindemann定理. Shimura簇上的Ax-Schanuel定理是算术几何领域里期待已久的定理. 当Ω等价于上半平面$\mathcal{H}$的乘积且$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{H}^p)$为模型群$\mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$的乘积时, 定理3.6可以通过经典的$j$函数表达出来. 运用o-极小理论的数点定理[24]与复微分几何关于体积增长的估计[25], Pila和Tsimerman[75]证明了上述关于j函数的Ax-Schanuel定理.

由j函数过渡到任意Shimura簇$X_\Gamma = \Omega/\Gamma$似乎存在着难以逾越的鸿沟. 受到本人[22]解决秩为1并包含非算术格的Ax-Lindemann定理所使用的复分析、代数几何与复微分几何方法的启示, Mok等人[23]从两套方法中综合出对任意Shimura簇适用的方法, 成功证明了Shimura簇上的Ax-Schanuel定理. 文献[23]运用了定理里前设的源于非寻常交集的维数不等式构造了Hilbert概型与其万有族, 由此定义了某些在$X_\Gamma \times X_\Gamma$对角$\Delta(X_\Gamma)$的解析子簇T, 并运用文献[68]证明其代数性. 取上述适当的Hilbert概型分支F, 以$\Gamma_0 \subset \Gamma$标记保持F每一成员不变的子群, 并以$\Theta \subset G_0 := \mathrm{Aut}_0(\Omega)$标记其Zariski闭包. 由定义知, $\Theta \subset G_0$为$\mathbb{Q}$子群. 论文应用了反证法, 对Shimura簇上Ax-Schanuel猜想的假想反例作归纳法, 进行归纳的关键在于证明$\Theta \subset G_0$为正则子群. 论文通过F作为模空间的诠释证明了Θ的正则性. 另外, 由T取得对应于$V \subset X_\Gamma$的不可约分支, 应用Deligne和André (参见André[76])关于任意混合Hodge结构的单值群定理证明对极端(Ω维数极小)假想反例$X\Gamma = \Omega/\Gamma$而言, $\pi_1(V) \subset G$为Zariski稠密子群. 文献[23]沿用了文献[63, 75]的思路, 对一个通过归纳法达到的极端假想反例运用文献[24, 25]的对立得出矛盾如下. 一方面, 由于$\pi_1(V) \subset G$的Zariski稠密性对极端($\dim(\Omega)$极小)假想反例得出$\Theta = \{\mathrm{id}_\Omega\}$为平凡的; 另一方面, 比较关于$\Omega$子簇的体积增长下界估计[25]与数点定理[24], 得出反例$W \subset \Omega \times X_\Gamma$必然在$\Gamma$(假设无挠)的某无限子群的作用下不变, 否则可取某$W' \subsetneq W$代替W, $U' \subsetneq U$与反例的极端性($\dim(U)$极小)产生矛盾; 或者可取$W' \supsetneq W$, 而U不变与反例的极端性($\dim(W) - \dim(U)$极大)产生矛盾, 从而证明了Shimura簇的Ax-Schanuel定理. 论证中, 文

献[24, 68]能适用于算术格的关键原因是Ω上存在相对于Γ可定义的基本区$\mathcal{F}$, 使得$\pi_\Gamma|_\mathcal{F}$可定义.

以$\Omega \Subset \mathbb{C}^n \subset S$标记$\Omega$的Harish-Chandra与Borel嵌入, 并以$z_1, \cdots, z_n$标记$\mathbb{C}^n$上的欧几里得坐标. 以$X_\Gamma \subset X_\Gamma^\sharp$标记$X_\Gamma$的射影紧致扩充, 即$X_\Gamma^\sharp$为射影簇, 而$X_\Gamma$为$X_\Gamma^\sharp$的稠密Zariski开集. 以$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$标记$X_\Gamma$上相对于$\Gamma$的模函数域的一组基, 即$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$为线性独立的$\Gamma$不变亚纯函数, 对应于具有同样标记的在$X_\Gamma$上的亚纯函数; 而$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$均可解析延拓为$X_\Gamma^\sharp$上的亚纯函数, 并且$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$所生成的函数域等同于由所有$X_\Gamma^\sharp$上的亚纯函数所组成的函数域$\mathcal{M}(X_\Gamma^\sharp)$.

定理3.7 设$k \geqslant 2$为整数, 并以$\mathcal{M}_k(\Gamma)$标记由$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$及其相对于$z_1, \cdots, z_n$直至次数为$k$的偏微分所生成的函数域, 以$\mathcal{M}_k^\dagger(\Gamma)$标记由$\mathcal{M}_k(\Gamma)$与$z_1, \cdots, z_n$所生成的函数域. 设$V \subset \Omega$为不可约复解析子簇, 假设$V$不包含在任何满足$\pi_\Gamma(\Sigma) \subset X_\Gamma$为拟射影子簇的全纯全测地真子流形$\Sigma \subsetneq \Omega$内. 假设$V$不包含在$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$的极点集合内, 故此$\varphi_1|_V, \cdots, \varphi_N|_V$均可以定义为$V$上的亚纯函数, 并得出$\mathcal{M}_k^\dagger(\Gamma)$的函数限制在$V$上所得出的函数域$\mathcal{M}_k^\dagger(\Gamma)|_V$. 那么, $\mathcal{M}_k^\dagger(\Gamma)|_V$相对于复数域$\mathbb{C}$的超越次数大于或等于$\dim(G) + \dim(V)$, 这里$G := \mathrm{Aut}_0(S)$.

定理3.6可以通过节丛(jet bundle)得到推广, 而定理3.7为Shimura簇节丛上的Ax-Schanuel定理的推论.

Daw和Ren[77]给出了Shimura簇上的Ax-Schanuel定理对Zilber-Pink猜想的应用, 而André等人[78]则给出了其对关于Abel概型的Betti映照的应用.

3.5 Shimura簇上的Ax-Schanuel定理及其推广在数论中的应用

文献[26]将文献[23]中的Ax-Schanuel定理推广到周期域$\mathscr{D}$以及在拟射影簇X上定义的周期映照$q : X \to \mathscr{D}/\Gamma$的情形, 其关键论证包含可定义基本区$\mathcal{F}$的构造和在$\mathscr{D}$上水平子簇的体积估计, 这里$\mathscr{D} = G_0/V \subset G/P$为某Hodge结构的参数空间, G/P为有理齐性空间. $\mathscr{D}$上存在由Hodge滤过定义的微分系统, 根据Griffiths横截性定理, 周期映照的映像为“水平子簇”, 即是与水平分布相切的子簇. 文献[26]运用多复变函数论关于d封闭正(p, p)流的Lelong公式[79]的推广得出$\mathscr{D}$完备水平子簇的体积增长下界估计.

文献[26]的重要目的是为实施文献[27]中攻克数论里Shafarevich猜想的策略提供一个基础. 文献[27]通过文献[26]的Ax-Schanuel定理在p进域的类推探讨高维诸如$\mathbb{P}^n$的光滑超曲面上的Shafarevich猜想. 事实上, Lawrence和Sawin[28]已经将文献[26]应用在关于$n \geqslant 4$维Abel簇光滑超曲面的Shafarevich猜想上. Faltings[80]证明了Mordell定理, 即任意在$\mathbb{P}^N$里定义在某数域K上且亏格$\geqslant 2$的光滑代数曲线C只有有限个K有理点, 而证明是由文献[80](关于Abel域的模p约化)的Shafarevich有限性定理推导出来的, 由此Shimura簇上的Ax-Schanuel猜想与数论关于有理点的核心问题的关联可见一斑.

另外, Gao和Klingler[29]与Chiu[30]证明了由文献[23]推广到混合Shimura簇上的Ax-Schanuel定理, Chiu[31]如同文献[23]还得出了定理里加入模函数的偏微分的形式. 最近, 混合Shimura簇上的Ax-Schanuel定理还可以应用在一致Mordell-Lang猜想的证明上.

3.6 任意无挠离散子群Γ商流形X_Γ上双代数射影子簇的刻画: Δ到Ω上的全纯等距

对于Shimura簇X_Γ, $\pi_\Gamma : \Omega \to X_\Gamma$, 双代数子簇的刻画问题是与Ax类问题相关的单值化问题, 即当$Z \subset X_\Gamma$和$\pi_\Gamma(Z) =: Y$均为代数子簇时$Z \subset \Omega$是否必然是全测地流形. Ullmo和Yafaev[81]给出了证明, 关键点在于Deligne和André(参见André[76])关于任意拟射影子簇$V \subset X_\Gamma$的单值群定理, 证明源自Hodge理论并取决于Γ是算术格. Chan和Mok[32]证明了以下的双代数子簇的刻画定理.

定理3.8 设Ω为有界对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$为任意无挠离散子群, $X_\Gamma := \Omega/\Gamma$, $\pi_\Gamma : \Omega \to X_\Gamma$. 设$Y \subset X_\Gamma$为紧子簇, 使得$\pi_\Gamma^{-1}(Y)$的不可约子簇$Z \subset \Omega$为代数子簇. 那么, $Y \subset X_\Gamma$为全测地子簇.

定理的特点是Γ无需是算术格, 甚至无需是格子群, 即X_Γ的体积可以是无限的. 文献[32]研究了Poincaré圆盘到Ω的等距映照, 定理3.8是由以下的复微分几何定理推导出来的.

定理3.9 设Ω为有界对称域, $f : (\Delta; \lambda ds_\Delta^2) \to (\Omega; ds_\Omega^2)$为全纯等距映照, $\lambda > 0$, 并以$\Sigma := f(\Delta) \subset \Omega$标记其映像. 设$b \in \partial\Delta$为一般点. 那么, 当$z \to b$时, 第二基本型的范数$\|\sigma_{\Sigma|\Omega}(f(z))\| \to 0$.

定理3.10 设Ω_i为有界对称域, $G_i := \mathrm{Aut}_0(\Omega_i)$, $i = 1, 2$.

设$\Phi : G_1 \to G_2$为李群单同态, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$为$\Phi$共变全纯映照. 那么, f是全测地映照.

当$\Omega_1 = \Delta$时, $\|\sigma_{\Sigma|\Omega}(f(z))\|$为常数, 由定理3.9可推导出$f$为全测地的. 一般情况下, 通过把$f$限制在所有全测地Poincaré圆盘上诱导出来. 定理3.9是用反证法得到的. 通过假想反例的重正则化可以构造几乎是齐性的由Δ到Ω的全纯非全测地等距嵌入, 使得映像$\Sigma' \subset \Omega$的所有矢量空间$T_x(\Sigma')$在$\mathrm{Aut}(\Omega)$的作用下均为等价的. 假如Ω是管状域而$T_x(\Sigma')$均由一般矢量生成, 那么, 运用Poincaré-Lelong方程[82]可以验证Σ'为全测地的, 因而导致矛盾. 定理证明的技术困难在于如何在任意Ω的情形下在Σ'与Ω之间塞进适当的管状域Ω'. 文献[32]解决了这个非同维可积问题, 从而完成证明.

双代数子簇刻画定理的证明思路如下. 以$\Omega \subset S$标记Borel嵌入, $\widehat{Z} \supset Z$为Z在S的Zariski闭包. $Z \subset \Omega$的代数性蕴涵$Z \subset \widehat{Z}$为开集. Γ在实代数群$\mathrm{Aut}(\Omega)$的代数闭包的连通分支H_0作用在Z上, 其复化$H \subset G := \mathrm{Aut}(S)$为复代数子群, 并且$H$作用在$\widehat{Z}$上. 运用多复变函数论证明$Z \subset \Omega$于$H$在$\widehat{Z}$的作用下是伪齐性的, 即$Z$是$H$某轨道与$\Omega$的交集的连通分支, 由此$Z$与$Y = Z/\Gamma$为光滑的, 并且典范线从$K_Y > 0$. 根据Nadel定理[83]及其证明, 可知$H$是半单李群. 极大紧子群$L \subset H_0$在$\Omega$上的作用有固定点$x_0$, 其轨道$Hx_0$为黎曼对称空间$M$, 而$\Gamma_0 := \Gamma \cap H_0$在$Z$与$M$上的作用是同伦的, 从而通过同伦论(涉及Kähler形式)推导出Z与M同维, 而且H_0在Z上的作用是齐性的. 由此, 根据定理3.10得出$Z \subset \Omega$是全测地的.

4 总结与前瞻

“复微分几何与其应用”起源于本人在Kähler几何范畴内对经典流形(包括有界对称域Ω与其有限体积商空间$X_\Gamma = \Omega/\Gamma$以及其对偶空间紧型Hermite对称空间S)的研究. 后者的刻画问题触发了把单直纹射影流形上的极小有理切线簇(VMRT)视为几何载体的复微分几何理论, 即研究VMRT结构$\pi : \mathscr{C}(X) \to X$及与其相伴随的万有族$\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$. VMRT理论也启示了研究$\Omega$上通过Borel嵌入$\Omega \subset S$ 定义的代数簇Z在$X\Gamma$的投影$\pi_\Gamma(Z)$的一条新路径, 即研究S的Chow概型$\mathcal{K}$的万有族$\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$在$\Omega$上的限制$\mathcal{U}_0 := \mathcal{U}|_\Omega$及其相对于$\Gamma$的自然作用下所取得的商空间$\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{U}_0/\Gamma$. 由此$\mathcal{U}_\Gamma$可视为某亚纯叶状结构$\mathscr{F}$的载体, 而其某$\mathscr{F}$饱和子簇到$X_\Gamma$的投影给出$\pi_\Gamma(Z)$的Zariski闭包. 同时, Mok和Zhong[72]所给出X_Γ紧致化的复微分几何证明提供了研究X_Γ以及其纤维丛上的函数域超越性理论的解析工具, 用以证明种种解析子簇的代数性. 由此亚纯叶状结构贯穿本人在VMRT理论与函数域超越性理论的研究旨趣, 也启示了与数论专家在已有方法和结果的基础上一并攻克Shimura簇上的Ax-Schanuel猜想的路径.

目前, 在VMRT几何理论的框架下, 平移不变性的体现仍然是重要的目标. 如何在没有Cartan连络只有特殊微分系统的情况下为VMRT结构理论建立一套可应用的曲率理论是重要的课题. 最近发展出来的一套关于$(X, \mathcal{K})$的单直纹子簇的子VMRT结构理论, 除了自身的理论价值以外, 还可以有效地应用在多复变函数论里诸如有界对称域之间的逆紧全纯映照的刻画等问题上, 其后续研究具有发展潜力.

关于函数域超越性理论方面, 本人首先着眼于寻找对任意格成立的论证, 具体地是在没有数点定理与Hodge理论的辅助下证明不同层次的Ax类结果. 从另一角度看, 鉴于Shimura簇在数论中显要的位置, 复微分几何方法可以在相关的问题上与代数几何、模型理论、Hodge理论等领域相辅相成, 为攻克算术几何的关键问题提供一个新的视角.

总的来说, 复微分几何既是基础数学中历史悠久的核心领域, 同时也与许多领域有着活跃的互动界面. 我深信, 自己在复微分几何领域围绕着经典复流形的研究方向以及后来发展出来的一套与几何结构有着密切关系的几何理论, 将不断地发展起来并对培养数学人才作出应有的贡献.

参考文献

1 Hwang M, Mok N. Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structures. J Reine Angew Math, 1997, 490: 55–64

2 Hwang J M, Mok N. Rigidity of irreducible Hermitian symmetric spaces of the compact type under Kähler deformation. Invent Math, 1998, 131: 393–418
3 Hwang J M, Mok N. Holomorphic maps from rational homogeneous spaces of Picard number 1 onto projective manifolds. Invent Math, 1999, 136: 209–231
4 Hwang M, Mok N. Varieties of minimal rational tangents on uniruled manifolds. In: Schneider M, Siu Y-T, eds. Several Complex Variables. MSRI Publications 37. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 351–389
5 Hwang J M, Mok N. Cartan-Fubini type extension of holomorphic maps for Fano manifolds of Picard number 1. J Math Pures Appl, 2001, 80: 563–575
6 Hwang J, Mok N. Deformation rigidity of the rational homogeneous space associated to a long simple root. Ann Sci Éc Norm Supér, 2002, 35: 173–184
7 Hwang J M, Mok N. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. Asian J Math, 2004, 8: 51–64
8 Hwang M, Mok N. Deformation rigidity of the 20-dimensional F4-homogeneous space associated to a short root. In: Popov V L, ed. Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2004. 37–58
9 Hwang J M, Mok N. Prolongations of infinitesimal linear automorphisms of projective varieties and rigidity of rational homogeneous spaces of Picard number 1 under Kähler deformation. Invent Math, 2005, 160: 591–645
10 Mok N. Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents. In: Proceedings of the Conference "Géometrie Différentielle, Physique Mathématique, Mathématique et Société". Astérisque, 2008, 322(Volume II): 151–205
11 Mok N. Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents. AMS/IP Stud Adv Math, 2008, 42: 41–61
12 Hong J, Mok N. Analytic continuation of holomorphic maps respecting varieties of minimal rational tangents and applications to rational homogeneous manifolds. J Differential Geom, 2010, 86: 539–567
13 Mok N. Geometric structures and substructures on uniruled projective manifolds. In: Cascini P, McKernan J, Pereira J V, eds. Foliation Theory in Algebraic Geometry (Simons Symposia). Heidelberg-New York-London: Springer-Verlag, 2016. 103–148
14 Mok N, Zhang Y. Rigidity of pairs of rational homogeneous spaces of Picard number 1 and analytic continuation of geometric substructures on uniruled projective manifolds. J Differential Geom, 2019, 112: 263–345
15 Hong J, Mok N. Characterization of smooth Schubert varieties in rational homogeneous manifolds of Picard number 1. J Algebraic Geom, 2013, 22: 333–362
16 Hong J, Mok N. Schur rigidity of Schubert varieties in rational homogeneous manifolds of Picard number one. Sel Math New Ser, 2020, doi: 101007/s00029-020-00571-9
17 Clozel L, Ullmo E. Correspondances modulaires et mesures invariantes. J Reine Angew Math, 2003, 2003: 47–83
18 Mok N. Local holomorphic isometric embeddings arising from correspondences in the rank-1 case. In: Chern S S, Fu L, Hain R, eds. Contemporary Trends in Algebraic Geometry and Algebraic Topology. Nankai Tracts in Mathematics. New Jersey: World Scientific, 2002, 5: 155–166, Erratum: https://hkumath.hku.hk/nmok/Erratum.pdf
19 Mok N. Extension of germs of holomorphic isometries up to normalizing constants with respect to the Bergman metric. J Eur Math Soc, 2012, 14: 1617–1656
20 Mok N, Ng S C. Germs of measure-preserving holomorphic maps from bounded symmetric domains to their Cartesian products. J Reine Angew Math, 2012, 669: 47–73
21 Mok N. On the Zariski closure of a germ of totally geodesic complex submanifold on a subvariety of a complex hyperbolic space form of finite volume. In: Ebenfelt P, etc. eds. Complex Analysis, Trends in Mathematics. Basel-Boston: Birkhäuser, 2010. 279–300
22 Mok N. Zariski closures of images of algebraic subsets under the uniformization map on finite-volume quotients of the complex unit ball. Compos Math, 2019, 155: 2129–2149
23 Mok N, Pila J, Tsimerman J. Ax-Schanuel for Shimura varieties. Ann Math, 2019, 189: 945–978
24 Pila J, Wilkie A J. The rational points of a definable set. Duke Math J, 2006, 133: 591–616
25 Hwang J M, To W K. Volumes of complex analytic subvarieties of Hermitian symmetric spaces. Amer J Math, 2002, 124: 1221–1246
26 Bakker B, Tsimerman J. The Ax-Schanuel conjecture for variations of Hodge structures. Invent Math, 2019, 217: 77–94
27 Lawrence B, Venkatesh A. Diophantine problems and p-adic period mappings. Invent Math, 2020, 221: 893–999
28 Lawrence B, Sawin W. The Shafarevich conjecture for hypersurfaces in abelian varieties. 2020, https://arxiv.org/pdf/2004.09046.pdf
29 Gao Z, Klingler B. Ax-Schanuel conjecture for variations of mixed Hodge structures. 2021, https://arxiv.org/pdf/2101.10938.pdf
30 Chiu K C T. Ax-Schanuel for variations of mixed Hodge structures. 2021, https://arxiv.org/pdf/2101.10968.pdf
31 Chiu K C T. Ax-Schanuel with derivatives for mixed period mappings. 2021, https://arxiv.org/pdf/2110.03489.pdf
32 Chan S T, Mok N. Asymptotic total geodesy of local holomorphic curves exiting a bounded symmetric domain and applications to a uniformization

problem for algebraic subsets. J Differential Geom, 2022, 120: 1–49
33 Frankel T. Manifolds with positive curvature. Pacific J Math, 1961, 11: 165–174
34 Siu Y T, Yau S T. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. Invent Math, 1980, 59: 189–204
35 Mori S. Projective manifolds with ample tangent bundles. Ann Math, 1979, 110: 593–606
36 Hamilton R S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. J Differential Geom, 1982, 17: 255–306
37 Bando S. On the classification of three-dimensional compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature. J Differential Geom, 1984, 19: 283–297
38 Mok N, Zhong J Q. Variétés kählériennes d'Einstein compactes de courbure bisectionnelle semi-positive. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1984, 299: 571–573
39 Mok N, Zhong J Q. Curvature characterization of compact Hermitian symmetric spaces. J Differential Geom, 1986, 23: 15–67
40 Mok N. The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature. J Differential Geom, 1988, 27: 179–214
41 Hwang J M. Rigidity of homogeneous contact manifolds under Fano deformation. J Reine Angew Math, 1997, 486: 153–163
42 Yamaguchi K. Differential systems associated with simple graded Lie algebras. In: Shiohama K, ed. Progress in Differential Geometry. Advanced Studies in Pure Mathematics. Tokyo: Math Soc Japan, 1993, 22: 413–494
43 Pasquier B, Perrin N. Local rigidity of quasi-regular varieties. Math Z, 2010, 265: 589–600
44 Fu B, Li Q. Rigidity of wonderful group compactifications under Fano deformations. 2020, https://arxiv.org/pdf/2007.00275.pdf
45 Fu B, Hwang J M. Classification of non-degenerate projective varieties with non-zero prolongation and application to target rigidity. Invent Math, 2012, 189: 457–513
46 Ochiai T. Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1970, 152: 159–193
47 Lazarsfeld R. Some applications of the theory of positive vector bundles. In: Greco S, Strano R, eds. Complete Intersections. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg: Springer, 1984, 1092: 29–61
48 Guillemin V. The integrability problem for G-structures. Trans Amer Math Soc, 1965, 116: 544–560
49 Mok N. On Fano manifolds with Nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 2639–2658
50 Hong J, Hwang J M. Characterization of the rational homogeneous space associated to a long simple root by its variety of minimal rational tangents. In: Konno K, Nguyen-Khac V, eds. Algebraic Geometry in East Asia-Hanoi 2005. Advanced Studies in Pure Mathematics. Tokyo: Math Soc Japan, 2008, 50: 217–236
51 Hwang J M, Li Q. Characterizing symplectic Grassmannians by varieties of minimal rational tangents. J Differential Geom, 2021, 119: 309–381
52 Mok N. Characterization of standard embeddings between complex Grassmannians by means of varieties of minimal rational tangents. Sci China Ser A, 2008, 51: 660–684
53 Bryant R. Rigidity and quasi-rigidity of extremal cycles in compact Hermitian symmetric spaces. 2000, https://arxiv.org/abs/math/0006186
54 Walters M. Geometry and uniqueness of some extreme subvarieties in complex Grassmannians. Doctor Dissertation. Ann Arbor: University of Michigan, 1997
55 Hong J. Rigidity of smooth Schubert varieties in Hermitian symmetric spaces. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 2361–2381
56 Robles C, The D. Rigid Schubert varieties in compact Hermitian symmetric spaces. Sel Math New Ser, 2012, 18: 717–777
57 Mok N. Rigidity of certain admissible pairs of rational homogeneous spaces of Picard number 1 which are not of the subdiagram type. Sci China Math, 2019, 62: 2335–2354
58 Hong J, Ng S C. Local holomorphic mappings respecting homogeneous subspaces on rational homogeneous spaces. Math Ann, 2021, 380: 885–909
59 Huang X. On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces in the complex spaces of different dimensions. Ann Inst Fourier, 1994, 44: 433–463
60 Mok N. Uniqueness theorems of Hermitian metrics of seminegative curvature on quotients of bounded symmetric domains. Ann Math, 1987, 125: 105–152
61 Mok N. Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds. Teaneck: World Scientific, 1989
62 Pila J, Zannier U. Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture. Atti Accad Naz Lincei Cl Sci Fis Mat Natur, 2008, 19: 149–162
63 Klingler B, Ullmo E, Yafaev A. The hyperbolic Ax-Lindemann-Weierstrass conjecture. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2016, 123: 333–360
64 Tsimerman J. The André-Oort conjecture for $\mathcal{A}_g$. Ann Math, 2018, 187: 379–390
65 Tsimerman J. Functional transcendence and arithmetic applications. In: Proceedings of the ICM–Rio de Janeiro 2018. Hackensack: World Scientific, 2018. 435–454
66 van den Dries L, Miller C. On the real exponential field with restricted analytic functions. Israel J Math, 1994, 85: 19–56
67 Bombieri E, Pila J. The number of integral points on arcs and ovals. Duke Math J, 1989, 59: 337–357

68 Peterzil Y, Starchenko S. Tame complex analysis and o-minimality. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010. 58–81

69 Satake I. On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups. Ann Math, 1960, 72: 555–580

70 Baily Jr W L, Borel A. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann Math, 1966, 84: 442–528

71 Mok N. Compactification of complete Kähler surfaces of finite volume satisfying certain curvature conditions. Ann Math, 1989, 129: 383–425

72 Mok N, Zhong J Q. Compactifying complete Kähler-Einstein manifolds of finite topological type and bounded curvature. Ann Math, 1989, 129: 427–470

73 Klembeck P. Kähler metrics of negative curvature, the Bergmann metric near the boundary, and the Kobayashi metric on smooth bounded strictly pseudoconvex sets. Indiana Univ Math J, 1978, 27: 275–282

74 Mok N. Projective-algebraicity of minimal compactifications of complex-hyperbolic space forms of finite volume. In: Itenberg I, Jöricke B, Passare M, eds. Perspectives in Analysis Geometry Topology. Progress in Mathematics. New York: Birkhäuser/Springer, 2012, 296: 331–354

75 Pila J, Tsimerman J. Ax-Schanuel for the j-function. Duke Math J, 2016, 165: 2587–2605

76 André Y. Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part. Compos Math, 1992, 82: 1–24

77 Daw C, Ren J. Applications of the hyperbolic Ax-Schanuel conjecture. Compos Math, 2018, 154: 1843–1888

78 André Y, Corvaja P, Zannier U. The Betti map associated to a section of an abelian scheme (with an appendix by Z. Gao). 2018, https://arxiv.org/abs/1802.03204

79 Lelong P. Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives. Paris-London-New York: Gordon & Breach, 1968

80 Faltings G. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent Math, 1983, 73: 349–366

81 Ullmo E, Yafaev A. A characterization of special subvarieties. Mathematika, 2011, 57: 263–273

82 Mok N, Mok N. Characterization of certain holomorphic geodesic cycles on quotients of bounded symmetric domains in terms of tangent subspaces. Compos Math, 2002, 132: 289–309

83 Nadel A M. Semisimplicity of the group of biholomorphisms of the universal covering of a compact complex manifold with ample canonical bundle. Ann Math, 1990, 132: 193–201

Summary for “复微分几何与其应用”

Complex differential geometry and its applications

Ngaiming Mok

Department of Mathematics, the University of Hong Kong, Hong Kong
E-mail: nmok@hku.hk

“Complex differential geometry and its applications” originated from the author’s prior work in Kähler geometry revolving around bounded symmetric domains Ω, their finite-volume quotients $X_\Gamma := \Omega/\Gamma$ and dual Hermitian symmetric spaces S of the compact type. The author’s solution of the generalized Frankel conjecture has revealed the importance of the collection of tangents to minimal rational curves in the curvature characterization of S. Together with Hwang, the author has developed the foundation of a differential-geometric theory of uniruled projective manifolds $(X, \mathcal{K})$ based on the variety of minimal rational tangents (VMRT), encapsulated in the VMRT structure $\pi : \mathscr{C}(X) \to X$ and the universal family $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$, enabling them to resolve classical problems in algebraic geometry such as the deformation rigidity of rational homogeneous spaces G/P of Picard number 1, the Lazarsfeld problem and the characterization of uniruled projective manifolds equipped with reductive G-structures. Hwang-Mok established the Cartan-Fubini extension principle for uniruled projective manifolds $(X, \mathcal{K})$ of Picard number 1 under very mild conditions for the analytic continuation of VMRT-preserving local biholomorphisms, which was further developed by Hong-Mok resp. Mok-Zhang to a non-equidimensional version of Cartan-Fubini extension principle resp. analytic continuation of germs of complex submanifolds inheriting sufficiently non-degenerate sub-VMRT structures, resulting in particular in Schubert and Schur rigidity theorems. The geometric theory of VMRT has also motivated the author to examine algebraic subsets (defined via the Borel embedding) $Z \subset \Omega$, and their images $\pi_\Gamma(Z)$ under the quotient map $\pi_\Gamma : \Omega \to X_\Gamma$, i.e., to examine an irreducible component $\mathcal{K}$ of the Chow scheme Chow(S), its universal family $\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{K}$ and evaluation map $\mu : \mathcal{U} \to X$, together with the quotient $\mathcal{U}_\Gamma := \mathcal{U}_0/\Gamma$ of the restriction $\mathcal{U}_0 := \mathcal{U}|_\Omega$. The fibered space $\mathcal{U}_\Gamma$ may be regarded as the support of a meromorphic distribution $\mathscr{F}$, such that the image under the natural projection of a certain $\mathscr{F}$-saturated subvariety $\mathscr{Z} \subset \mathcal{U}_\Gamma$ gives the Zariski closure of $q(Z)$. At the same time, the prior work of Mok-Zhong for the compactification under certain curvature assumptions of complete Kähler manifolds of finite volume yields differential-geometric proofs realizing X_Γ and various holomorphic fiber bundles over X_Γ as quasi-projective varieties, together with a proof of the algebraicity of natural meromorphic foliations defined on them, enabling him to prove the Ax-Lindemann Theorem for not necessary arithmetic lattices Γ of rank 1. In the setting of Shimura varieties X_Γ, in which the arithmeticity of the lattices Γ has enabled a flourishing of results on functional transcendence with the availability of o-minimal structures from model theory and the interpretation of X_Γ as modular varieties of (mixed) Hodge structures, a combination of the differential-geometric and algebro-geometric perspective of the author together with the variety of techniques and results from o-minimality and Hodge theory, enabled Mok-Pila-Tsimerman to establish the long awaited Ax-Schanuel theorem on Shimura varieties, which, together with its many generalizations, has proven to be applicable to deep arithmetic problems such as the Pink-Zilber conjecture and the Shafarevich conjecture in number theory.

uniruled projective manifold, variety of minimal rational tangents (VMRT), Cartan-Fubini principle, bounded symmetric domain, Shimura variety, atypical intersection

doi: 10.1360/TB-2022-0589