中国科学: 数学 2022 年 第 52 卷 第 11 期: 1267 ∼ 1282
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

一类偶数阶几何偏微分方程组弱解的正则性理论

文竹[1], 汪继秀[2*], 向长林[3]

1. 长江大学信息与数学学院, 荆州 434023;
2. 湖北文理学院数学与统计学院, 襄阳 441053;
3. 三峡大学三峡数学研究中心, 宜昌 443002

E-mail: 202071149@yangtzeu.edu.cn, wangjixiu127@aliyun.com, changlin.xiang@ctgu.edu.cn

收稿日期: 2021-05-14; 接受日期: 2022-01-11; 网络出版日期: 2022-04-06; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11701045) 和湖北文理学院开放基金 (批准号: XK2021023) 资助项目

摘要 de Longueville 和 Gastel (2021) 提出了下述非常一般的高阶线性椭圆型方程组:

$$\Delta^m u = \sum_{l=0}^{m-1} \Delta^l \langle V_l, du\rangle + \sum_{l=0}^{m-2} \Delta^l \delta(w_l du),$$

并以多调和映照方程为其典型例子. 通过给系数函数以最少的光滑性假设和一阶位势的代数反对称性假设, 他们成功建立了该方程组的守恒律, 从而得到弱解的处处连续性, 推广了 Rivière (2007) 及 Lamm 和 Rivière (2008) 关于 2 阶和 4 阶方程组的相应理论. 最近, Guo 和 Xiang (2021) 证明了上述方程组解的局部 Hölder 连续性, 改进了 de Longueville 和 Gastel (2021) 的连续性结果. 本文使用另一种方法证明对任意的 $0 < \alpha < 1$, 该方程组的弱解都是局部 α-Hölder 连续的, 进一步改进了 Guo 和 Xiang (2021) 的局部 Hölder 连续性结果. 在标准的 Dirichlet 边界条件下, 本文还得到上述方程组弱解直到边界的连续性, 推广了 Guo 和 Xiang (2020) 关于 4 阶方程的边界正则性结果.

关键词 偶数阶椭圆型方程组 守恒律 Hölder 连续性 Lorentz-Sobolev 空间 Riesz 位势

MSC (2020) 主题分类 35J48, 35G50, 35B65

1 引言

通常情形下, 人们感兴趣的大部分几何偏微分方程组都是非线性的, 如调和映照方程

$$-\Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u)$$

和预定平均曲率方程

$$-\Delta u = H(u) u_x \wedge u_y$$

英文引用格式: Wen Z, Wang J X, Xiang C-L. Regularity theory for weak solutions to a class of even order geometric partial differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1267–1282, doi: 10.1360/SSM-2021-0088

以及更一般的具有共形不变性的几何偏微分方程组. 这些方程一个共同的特性是, 它们都处在椭圆方程正则性理论的边界上, 使得经典的 L^p 正则性理论无法使用, 并且解通常都会具有奇性 (可参见文献 [1] 及其参考文献). 另一方面, 在某些情形下这些方程组具有非常优美的几何性质, 如 2 维时的共形不变性等, 使得人们相信, 至少在某些情形下这些方程组的解应该具有良好的正则性. 著名的 Hildebrandt 猜想 [2] 提出, 在 2 维情形下所有的 2 阶共形不变的椭圆型 Lagrange 泛函的临界点都是连续的, 从而与靶流形具有同样的光滑性. Heinz 猜想 [3] 则提出, 对于上述 2 维的预定平均曲率方程, 只需要假定方程右端的预定平均曲率函数 H 是有界的, 就应该有解的连续性成立. 确实, 在 Morrey 关于 2 维极小调和映照正则性的经典工作 [4] 发表多年以后, Hélein [5] 终于证明了所有的 2 维调和映照都是光滑的映照, 从而极大地推广了 Morrey 的结果, 部分肯定了 Hildebrandt 猜想的正确性. 最近, Rivière [6] 在他的论文中彻底证实了上述两个猜想的正确性, 同时也以新的方法再次证明了 Hélein [5] 的结果.

Rivière [6] 的新方法如下. 首先, 他概括性地提出了一个 2 阶线性椭圆型偏微分方程组

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \quad 在\ B^2\ 内, \tag{1.1}$$

其中, $u \in W^{1,2}(B^2, \mathbb{R}^n)$ 是方程的弱解, $\Omega = (\Omega_{ij}) \in L^2(B^2, so_n \otimes \wedge^1\mathbb{R}^2)$ 是反对称矩阵值函数, 且元素是取值于 $\mathbb{R}^2$ 的平方可积函数. 这使得所有 2 维情形下共形不变的变分泛函的临界点的 Euler-Lagrange 方程都可以作为特例包含于 (1.1) 中. 特别地, (1.1) 包括了从 $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ 映射到闭 Riemann 流形的弱调和映照方程和预定平均曲率方程. 注意到, (1.1) 中的系数 Ω 是与解 u 无关的矩阵值函数. Ω 平方可积的假设保证了 $\Omega \cdot \nabla u \in L^1(B^2)$. 从正则性的角度看, 这使得方程具有临界性, 从而使得 (1.1) 可能存在不连续的弱解. 的确, 如果去掉反对称性假设, 则有反例表明解可以是不连续甚至无界的 [6]. 因此, 从分析的角度来看, 在 Ω 上找到最少的额外附加假设以便使得每个解都具有处处的连续性, 是一个非常有趣和重要的问题. 在对共形不变问题的探索中, Rivière [6] 最终发现了一个迄今为止被认为是最佳的额外假设, 即假设作为矩阵的 Ω 具有反对称性. 在这个额外假设下, Rivière 证明了存在矩阵值函数 $A \in L^\infty \cap W^{1,2}(B^2, Gl(n))$ 和 $B \in W^{1,2}(B^2, M_n)$ 满足 $\nabla A - A\Omega = \nabla^\perp B$, 使得方程 (1.1) 可以等价写为如下守恒律的形式:

$$\operatorname{div}(A\nabla u + B\nabla^\perp u) = 0, \tag{1.2}$$

进而由此证明方程 (1.1) 的弱解处处连续.

人们自然地猜测上述结论对高阶的共形不变的几何变分问题应该也正确. 对 4 阶共形不变的变分问题, Chang 等 [7] 率先发展了从 Euclid 球 B^n $(n \geqslant 4)$ 映射到球面的 (外蕴) 双调和映照正则性理论; Wang [8–10] 系统地把上述结果推广到靶流形为一般紧致闭 Riemann 流形的情形. 双调和映照的 Euler-Lagrange 方程是 4 阶的半线性椭圆方程组. 为了推广 Rivière [6] 的强大方法, 并进一步研究双调和映照等 4 阶共形不变问题, Lamm 和 Rivière [11] 提出了下述一般的 4 阶椭圆型线性偏微分方程组:

$$\Delta^2 u = \Delta(V \cdot \nabla u) + \operatorname{div}(w\nabla u) + W \cdot \nabla u, \quad 在\ B^4\ 内, \tag{1.3}$$

其中 $V \in W^{1,2}(B^4, M_n \otimes \wedge^1\mathbb{R}^4)$, $w \in L^2(B^4, M_n)$, $W \in W^{-1,2}(B^4, M_n \otimes \wedge^1\mathbb{R}^4)$ 且满足

$$W = \nabla\omega + F,$$

并且 $\omega \in L^2(B^4, so_n)$ 是取值于反对称矩阵的平方可积函数, $F \in L^{\frac{4}{3},1}(B^4, M_n \otimes \wedge^1\mathbb{R}^4)$. 则这个方程囊括了所有从 B^4 到闭 Riemann 流形的外蕴和内蕴双调和映照. 通过研究这个线性方程, 可以在很大程度上得到关于外蕴和内蕴双调和映照的正则性理论.

注意到, 为了得到解的处处连续性, 一阶位势 ω 的反对称性假设是关键. 如果 ω 不具有反对称性, 则这个方程就可能具有不连续的弱解. 遵循 Rivière[6] 的方法, Lamm 和 Rivière[11] 找到 (定义在局部上的) 函数 $A\in W^{2,2}\cap L^{\infty}(B^4_{1/2},M_n)$ 和 $B\in W^{1,4/3}(B^4_{1/2},M_n\otimes\wedge^2\mathbb{R}^4)$ 使得 u 是 (1.3) 在 $B^4_{1/2}$ 上的解, 当且仅当它满足守恒律

$$\operatorname{div}[\nabla(A\Delta u)-2\nabla A\Delta u+\Delta A\nabla u-Aw\nabla u+\nabla A(V\cdot\nabla u)-A\nabla(V\cdot\nabla u)-B\cdot\nabla u]=0. \tag{1.4}$$

如同 2 阶的情形, 从守恒律 (1.4) 出发, 很容易证明方程 (1.3) 弱解的处处连续性.

受到文献 [2,11] 中的研究启发, Lamm 和 Rivière 在文献 [11, 注记 1.4] 中指出: "We expect similar theorems to remain true for general even order elliptic systems of the type (1.3)." (我们预期类似的定理对形如 (1.3) 的一般偶数阶椭圆方程组也成立.) Rivière 也在一次会议上特别指出了以下预期 (参见文献 [12, 第 108 页]): "It is natural to believe that a general result exists for m-th order linear systems in m dimension whose 1st order potential is antisymmetric." (自然可以相信, 对于在 m 维具有一阶反对称位势的 m 阶线性方程组存在一个一般性的结果.)

近十几年来, 一般的高阶共形不变几何问题已经引起了广泛的关注. 例如, Gastel 和 Scheven[13] 考察了临界维的外蕴和内蕴多调和映照, 即泛函

$$\int_{B^{2m}}|D^m u|^2dx \quad 和 \quad \int_{B^{2m}}|\nabla^{m-1}Du|^2dx$$

的临界点, 其中 $u\in W^{m,2}(B^{2m},N)$, N 是等距嵌入到某个 Euclid 空间的闭 Riemann 流形. 他们证明了所有的临界维多调和映照都是光滑的, 从而将 Hélein[5] 和 Wang[8,9] 关于 2 维调和映照和 4 维双调和映照的结果推广到一般的偶数维. 关于多调和映照的正则性理论方面的研究结果, 可参见文献 [14–16]. 至于 Lamm 和 Rivière 预期的一般性正则性理论, 最近也得到了突破性进展. de Longueville 和 Gastel[17] 提出了如下偶数阶线性椭圆方程组:

$$\Delta^m u=\sum_{l=0}^{m-1}\Delta^l\langle V_l,du\rangle+\sum_{l=0}^{m-2}\Delta^l\delta(w_l du),\quad 在\ B^{2m}\subset\mathbb{R}^{2m}\ 内, \tag{1.5}$$

其中系数函数满足假设

$$\begin{aligned}&w_k\in W^{2k+2-m,2}(B^{2m},\mathbb{R}^{n\times n}),\quad k\in\{0,\dots,m-2\},\\&V_k\in W^{2k+1-m,2}(B^{2m},\mathbb{R}^{n\times n}\otimes\wedge^1\mathbb{R}^{2m}),\quad k\in\{0,\dots,m-1\}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

此外, 一阶位势 V_0 具有分解 $V_0=d\eta+F$, 满足

$$\eta\in W^{2-m,2}(B^{2m},so(n)),\quad F\in W^{2-m,\frac{2m}{m+1},1}(B^{2m},\mathbb{R}^{n\times n}\otimes\wedge^1\mathbb{R}^{2m}). \tag{1.7}$$

如同 2 阶和 4 阶的情形, 这里的关键假设是 η 作为一个矩阵值函数是反对称的. 方程组 (1.5) 囊括了所有从 Euclid 球 B^{2m} 映射到闭 Riemann 流形的内蕴和外蕴的 $2m$ 阶调和映照, 同时还囊括了多种非变分型方程, 如 "伪多调和方程":

$$\Delta^m u+|\nabla u|^{2m}u=0.$$

如同 Rivière[6]、Lamm 和 Rivière[11] 关于 2 阶和 4 阶方程的情形, de Longueville 和 Gastel[17] 成功建立了方程组 (1.5) 的守恒律. 具体而言, 在一个小性假设下 (参见 (3.3)), 他们找到了满足方程

$$\Delta^{m-1}dA+\sum_{k=0}^{m-1}(\Delta^k A)V_k-\sum_{k=0}^{m-2}(\Delta^k dA)w_k=\delta B$$

的矩阵值函数 $A \in W^{m,2} \cap L^\infty(B^{2m}_{1/2}, Gl(n))$ 和 $B \in W^{2-m,2}(B^{2m}_{1/2}, \mathbb{R}^{n\times n} \otimes \wedge^2\mathbb{R}^{2m})$, 使得 u 是 (1.5) 在 $B^{2m}_{1/2}$ 上的解当且仅当 u 满足守恒律

$$\begin{aligned}0 = \delta\Bigg[&\sum_{l=0}^{m-1}(\Delta^l A)\Delta^{m-l-1}du - \sum_{l=0}^{m-2}(d\Delta^l A)\Delta^{m-l-1}u\\&- \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k-1}(\Delta^l A)\Delta^{k-l-1}d\langle V_k, du\rangle + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{k-1}(d\Delta^l A)\Delta^{k-l-1}\langle V_k, du\rangle\\&- \sum_{k=0}^{m-2}\sum_{l=0}^{k-2}(\Delta^l A)d\Delta^{k-l-1}\delta(w_k du) + \sum_{k=0}^{m-2}\sum_{l=0}^{k-2}(d\Delta^l A)\Delta^{k-l-1}\delta(w_k du) - \langle B, du\rangle\Bigg],\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 $d\Delta^{-1}\delta$ 表示恒等映照. 然后, 如同 4 阶的情形, 结合守恒律 (1.8) 与位势理论, 他们得到了 (1.5) 弱解的处处连续性. 在最近的另一项工作中, Hörter 和 Lamm [18] 利用 Uhlenbeck 变换的小扰动给方程 (1.5) 构造了一个形式上稍显不同的守恒律.

在进一步讨论之前, 我们比较深入地观察方程组 (1.5) 和守恒定律 (1.8). 首先注意到的是, (1.5) 与 2 阶方程 (1.1) 和 4 阶方程 (1.3) 系数函数的区别: (1.5) 中几乎一半的系数函数是带负指数的 Sobolev 函数 (定义参见第 2 节). 这个特点在建立守恒律 (1.8) 时造成了严重的困难. 为了找到如上所述的 A 和 B, de Longueville 和 Gastel 必须求解一个非常庞大的高阶偏微分方程组. 事实上, 在 4 阶的情形下, 找到 A 和 B 的任务已经相当困难了. 其次, 所有系数函数的正则性都在椭圆正则性理论的边界上, 这使得通常的 L^p 正则性理论不能应用, 而带负指数的 Sobolev 函数则需要比通常的 L^p 理论更为一般的正则性理论. 基于这些考虑, de Longueville 和 Gastel 在文献 [17, 第 19 页] 的最后一段中写道: "$\cdots$ But here, we consider a very general equation with rather irregular coefficients, so maybe we cannot expect much regularity in general." (但是在这里, 我们考虑的是具有非常不光滑的系数的一个非常一般性的方程, 因而可能无法期望解具有 (比连续性) 更强的正则性.)

即便如此, Guo 和 Xiang [19] 还是成功地证明了如下定理:

定理 1.1 方程组 (1.5) 的每个弱解都是局部 Hölder 连续的.

他们在论证方法中没有用到深刻的守恒律 (1.8), 而是对方程作了一个特别的 Gauge 变换并巧妙地利用了 Lorentz 空间的对偶性来得到关键的估计.

Hölder 连续性的建立对应用具有十分重要的意义. 如 Gastel 和 Scheven 在文献 [13, 定理 1.2] 中所指出的, 对于多调和映照, Hölder 连续意味着光滑. 所以上述结果可以直接应用到多调和映照理论中去. 其次, 为了获得相关边界值问题的全局连续性, 局部 Hölder 估计也是很有用的 (参见文献 [16,20,21]). 再次, 2 阶方程 (1.1) 的内部 Hölder 连续性已经由 Sharp 和 Topping [22] 利用守恒定律 (1.2) 解决. 最近, Guo 和 Xiang [21] 利用守恒律 (1.4) 建立了 4 阶方程组 (1.3) 解的局部 Hölder 连续性. 这些工作启发我们, 通过守恒律 (1.8) 应该也可以证明方程组 (1.5) 的局部连续性.

基于上述的观察和考虑, 我们应用守恒律和 Morrey 衰减估计的办法改进了定理 1.1:

定理 1.2 (内正则性) 方程组 (1.5) 的弱解 $u \in W^{m,2}(B^{2m}, \mathbb{R}^n)$ 是局部 α-Hölder 连续的, 且对任意的 $\alpha \in (0,1)$ 都成立. 此外, 存在仅依赖于 m、n、α 和系数函数的常数 $C, r_0 > 0$, 使得对于所有的 $x \in B^{2m}_{1/8}(0)$ 和 $0 < r < r_0$, 都有如下估计:

$$\operatorname{osc}_{B_r(x)} u \leqslant Cr^\alpha \|u\|_{W^{m,2}(B^{2m}, \mathbb{R}^n)}, \tag{1.9}$$

其中 osc 表示振幅.

作为定理 1.2 和文献 [13, 定理 1.2] 的推论, 我们可以得到临界维数下多调和映照的光滑性.

推论 1.1 (参见文献 [13, 定理 1.1])　设 N 是等距嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中的闭 Riemann 流形, 则每个从 B^{2m} 到 N 的弱 (内蕴或外蕴) $2m$ 阶多调和映照都是光滑的.

作为定理 1.2 的第 2 个应用, 我们得到 (1.5) 在 Dirichlet 边界条件下解的边界正则性的结果.

定理 1.3 (边界正则性)　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^{2m}$ 是有界光滑区域, $u\in W^{m,2}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 是方程 (1.5) 在 Ω 上的解. 假设存在 $g\in C^{m-1}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$, 使得 u 在边界 $\partial\Omega$ 上满足 Dirichlet 边界条件

$$u=g\quad \text{且}\quad \nabla^i u=\nabla^i g,\quad \forall\, 1\leqslant i\leqslant m-1,$$

则 $u\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, 即解连续到边界.

定理 1.3 推广了文献中关于多调和映照边界连续性的结果, 例如, 推广了 Müller 和 Schikorra [20] 关于 2 阶方程 (1.1) 的边界连续性结果、Guo 和 Xiang [21] 关于 4 阶方程 (1.3) 的边界连续性结果以及 Lamm 和 Wang [16] 的相关结果. 值得指出的是, 定理 1.3 的证法仅依赖于零阶边界假设 "存在 $g\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$, 在 $\partial\Omega$ 上有 $u=g$". 因此, 在相同的零阶边界假设下, 我们也可以推导 (1.5) 在其他类型边值假设下的边界连续性.

最后简单介绍证明定理 1.2 和 1.3 的方法. 为了得到连续性, de Longueville 和 Gastel [17] 结合守恒律与标准 Riesz 位势理论证明了 $u\in W^{m+1,\frac{2m}{m+1},1}_{\mathrm{loc}}(B^{2m})$. 从而由嵌入

$$W^{m+1,\frac{2m}{m+1},1}_{\mathrm{loc}}(B^{2m})\subset C(B^{2m})$$

得到解的连续性. 但是, 这种嵌入不能推导出进一步的 Hölder 连续性. 为了得到 Hölder 连续性, 我们从 Wang [9,10] 以及 Guo 和 Xiang [21] 最近的工作中得到启发, 设法去证明解的能量满足某种衰减估计, 从而根据 Morrey 的 Dirichlet 增长定理知, 解具有 Hölder 连续性. 由于方程组 (1.5) 的一般性和负指数 Sobolev 函数的存在, 建立相应的衰减估计 (参见 (3.1)) 要比建立 4 阶方程 (1.3) [21] 的衰减估计复杂得多. 我们将引入一些新的符号, 并根据不同的情形将证明分解为多个部分, 以使证明尽可能清晰, 详细证明参见第 3 节.

证明定理 1.3 的方法借鉴于 Lamm 和 Wang [16] 使用的方法, 简单来说, 就是利用内部 Hölder 连续性 (即定理 1.2) 和边界极大原理. 边界极大原理最初是由 Qing [23] 在研究调和映照边界连续性时引入的. 在 4 阶的情形下, Guo 和 Xiang [21] 使用了相同的方法. 在高阶多调和映照的情形下, Lamm 和 Wang [16] 也使用了这个方法. 为方便读者, 第 4 节简述此证明.

我们使用的数学符号是标准的. 特别地, 用 $A\lesssim \epsilon B$ 来表示 $A\leqslant C\epsilon B$, 其中 C 是一个与 ϵ 无关的常数, 每行都可以不同.

2　必要的辅助结果

2.1　Lorentz-Sobolev 函数空间及相关

为了后面证明的需要, 本节简要介绍 Lorentz 函数空间和 Lorentz-Sobolev 函数空间的定义及相关性质 (有兴趣的作者可以阅读如 Adams 和 Fournier 的著作 [24] 以获得更多关于这些空间的信息). 本节用 Ω 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域.

2.1.1 Lorentz 空间

对于可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$, 用 $\delta_f(t)=|\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}|$ 表示它的分布函数, 用 $f^*(t)=\inf\{s>0:\delta_f(s)\leqslant t\}$ $(t\geqslant 0)$ 表示 $|f|$ 的非减重排. 定义

$$f^{**}(t)\equiv\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds,\quad t>0.$$

Lorentz 空间 $L^{p,q}(\Omega)$ $(1<p<\infty,\ 1\leqslant q\leqslant\infty)$ 是由满足下述限制的可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 组成的空间:

$$\infty>\|f\|_{L^{p,q}(\Omega)}\equiv\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty(t^{1/p}f^{**}(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \sup_{t>0}t^{1/p}f^{**}(t), & q=\infty.\end{cases}$$

当 $q=\infty$ 时, $L^{p,\infty}(\Omega)$ 即为通常的弱 L^p- 空间. 在 $p=1$ 的情形, 继续用 $L^{1,\infty}$ 表示弱 L^1- 空间.

我们将需要推广到 Lorentz 空间的 Hölder 不等式.

命题 2.1 [25] 设 $1<p_1,p_2<\infty$, $1\leqslant q_1,q_2\leqslant\infty$, 且满足

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1,\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\leqslant 1.$$

则对任意的 $f\in L^{p_1,q_1}(\Omega)$, $g\in L^{p_2,q_2}(\Omega)$ 都有 $fg\in L^{p,q}(\Omega)$, 并且

$$\|fg\|_{L^{p,q}(\Omega)}\leqslant\|f\|_{L^{p_1,q_1}(\Omega)}\|g\|_{L^{p_2,q_2}(\Omega)}.$$

命题 2.2 [26] 对于 $1<p<\infty$, $1\leqslant q_1\leqslant q_2\leqslant\infty$, 有 $L^p(\Omega)=L^{p,p}(\Omega)$, $L^{p,q_1}(\Omega)\subset L^{p,q_2}(\Omega)$ 且

$$\|f\|_{L^{p,q_2}(\Omega)}\leqslant C(p,q_1,q_2)\|f\|_{L^{p,q_1}(\Omega)}.$$

此外, 如果 $|\Omega|<\infty$, $1<p<r<\infty$, $1\leqslant q,s\leqslant\infty$, 则 $L^{p,q}(\Omega)\supset L^{r,s}(\Omega)$, 并且

$$\|f\|_{L^{p,p}(\Omega)}\leqslant C_{r,p}|\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{r,\infty}(\Omega)}.$$

命题 2.2 中的最后一个不等式意味着对于所有的 $B_r^{2k}\subset\mathbb{R}^{2k}$ 和所有的 $1\leqslant p\leqslant 2k$, 都存在一个常数 $C=C(k,p)>0$, 使得

$$r^{p-2k}\int_{B_r^{2k}}|\nabla u|^p\leqslant C\|\nabla u\|^p_{L^{2k}(B_r^{2k})}.\tag{2.1}$$

在后续的证明中, 这将与 Morrey 的 Dirichlet 增长定理相结合来得到解的 Hölder 连续性.

2.1.2 Lorentz-Sobolev 空间

对于 $k\in\mathbb{N}$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, Lorentz-Sobolev 空间 $W^{k,p,q}(\Omega)$ 定义为所有具有 k 阶弱导数的可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 组成的空间, 而且 $D^\alpha f\in L^{p,q}(\Omega)$ 对于所有的 $|\alpha|\leqslant k$ 成立. 后面的证明中需要用到如下结论 (参见文献 [27,28]):

命题 2.3 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑域, $V\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, 使得 $\Omega\subset\subset V$. 设 $k\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. 则存在有界线性算子 $E:W^{k,p,q}(\Omega)\to W^{k,p,q}(\mathbb{R}^n)$, 使得对于每个 $f\in W^{k,p,q}(\Omega)$, 有

(i) 在 Ω 中, $Ef=f$ a.e.;

(ii) Ef 在 V 中有紧支集, 并且存在一个仅依赖于 n、k、p 和 Ω 的常数 $C>0$, 使得对于所有的 $f\in W^{k,p,q}(\Omega)$, 都有

$$\|Ef\|_{W^{k,p,q}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{W^{k,p,q}(\Omega)}.$$

我们还需要用到带负指标的 Lorentz-Sobolev 空间. 对于 $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, Lorentz-Sobolev 空间 $W^{-k,p,q}(\Omega)$ 定义为 Ω 上所有满足形如 $f = \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha f_\alpha$ 的分布组成的空间, 其中 $f_\alpha \in L^{p,q}(\Omega)$. 对应的范数定义为

$$\|f\|_{W^{k,p,q}(\Omega)} := \inf \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|f_\alpha\|_{L^{p,q}(\Omega)}.$$

后面的证明中需要用到如下结论 (参见文献 [17, 28]):

命题 2.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域.

(1) (广义 Hölder 不等式) 假设 $f \in W^{-k_0,p_0,q_0}(\Omega)$, $g \in W^{k_1,p_1,q_1}(\Omega)$, 其中 $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 < \infty$. 如果 $k_0 \leqslant k_1$, $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \leqslant 1$ 且 $k_1 p_1 < n$, 则 $fg \in W^{-k_0,s,t}(\Omega)$, 其中, $s = \frac{np_0p_1}{n(p_0+p_1)-k_1p_0p_1}$, $\frac{1}{t} = \min\left\{1, \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}\right\}$, 并且

$$\|fg\|_{W^{-k_0,s,t}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{-k_0,p_0,q_0}(\Omega)} \|g\|_{W^{k_1,p_1,q_1}(\Omega)}. \tag{2.2}$$

如果再额外假设 $g \in L^\infty$, 则上述不等式在 $k_1p_1 = n$ 时仍然成立.

(2) (Sobolev 嵌入) 如果 $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, $1 < p < \frac{n}{l}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 则 $W^{k,p,q}(\Omega)$ 连续嵌入 $W^{k-l,\frac{np}{n-lp},q}(\Omega)$, 从而存在常数 $C > 0$ 使得对所有的 $f \in W^{k,p,q}(\Omega)$ 都有下述不等式成立:

$$\|f\|_{W^{k-l,\frac{np}{n-lp},q}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{k,p,q}(\Omega)}.$$

在后续证明中, 将选取 g 为守恒律 (1.8) 中的矩阵值函数 $A \in W^{m,2} \cap L^\infty$.

2.2 分数阶 Riesz 算子

记 $I_\alpha = c_{\alpha,n}|x|^{\alpha-n}$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$) 为标准的分数阶 Riesz 算子. Riesz 位势理论在 Lorentz 空间中也对应成立.

命题 2.5 对于 $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1 \leqslant q \leqslant q' \leqslant \infty$, 分数阶 Riesz 算子

$$I_\alpha \colon L^{p,q}(\mathbb{R}^n) \to L^{\frac{np}{n-\alpha p},q'}(\mathbb{R}^n),$$
$$I_\alpha \colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{\frac{n}{n-\alpha},\infty}(\mathbb{R}^n)$$

是有界的.

在后续证明中, 主要用到下述有界情形:

$$I_\alpha : L^{\frac{2m}{\alpha+j},2}(\mathbb{R}^{2m}) \to L^{\frac{2m}{j},2}(\mathbb{R}^{2m}),$$

其中, $0 < \alpha < 2m$, $m \geqslant j \geqslant 1$ 且满足 $\alpha + j < 2m$.

在后面的证明中, 对所有整数 $k \in [1, 2m-1]$ 使用奇异积分算子 $\nabla^{2m-k} I_k$. 在这种情形下, 引入符号 I_0 表示这种类型的奇异积分算子 (如 $\nabla^{2m} \log|x|$ 和 $x \in \mathbb{R}^{2m}$ 等), 则命题 2.5 的结果同样对 $\alpha = 0$ 也成立 (参见文献 [29, 定理 V.3.15 和 VI.3.1]).

3 定理 1.2 的证明

本节用 $B_r(x)$ 来表示 $\mathbb{R}^{2m}$ 中以 x 为圆心、以 r 为半径的开球. 当 $x = 0$ 时, 用 B_r 代替 $B_r(0)$. 证明定理 1.2 的方法是建立下面的衰减估计.

引理 3.1 (衰减估计) 设 $u \in W^{m,2}(B_1, \mathbb{R}^n)$ 是方程组 (1.5) 的解, $\alpha \in (0,1)$ 是任一常数. 则存在仅依赖于 m、n、α 和系数函数 $\{V_k, w_k\}_k$ 的常数 $r_0, \tau \in (0,1)$, 使得对任意的 $x \in B_{1/2}$ 和 $0 < r < r_0$, 都有如下估计成立:

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_{\tau r}(x))} \leqslant \tau^\alpha \sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_r(x))}. \tag{3.1}$$

从而存在只依赖于 m、n、α 以及系数函数的常数 $C > 0$, 使得

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_r(x))} \leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(B_1)} r^\alpha$$

对于所有 $x \in B_{1/2}$ 和任意 $0 < r < r_0$ 都成立.

一旦证明了上述引理, 定理 1.2 就很容易证明了.

定理 1.2 的证明 由引理 3.1 和不等式 (2.1) 知, 对任意的 $x \in B_{1/2}$ 和 $0 < r < r_0$, 都有

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^{2m} \leqslant C\|\nabla u\|^{2m}_{L^{2m,2}(B_r(x))} \leqslant C\|u\|^{2m}_{W^{m,2}(B_1)} r^{2m\alpha}.$$

因而, 根据 Morrey 的 Dirichlet 增长定理 [30] 可知 $u \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$. 证毕. □

引理 3.1 的证明 由于方程具有伸缩和平移不变性 (参见文献 [17, 定理 5.1 的证明]), 可以假设 $x = 0$ 和 $r = 2$, 并且假设参数

$$\theta \equiv \sum_{i=0}^{m-2} \|w_i\|_{W^{2i+2-m,2}(B_2)} + \sum_{i=1}^{m-1} \|V_i\|_{W^{2i+1-m,2}(B_2)} + \|\eta\|_{W^{2-m,2}(B_2)} + \|F\|_{W^{2-m,\frac{2m}{m+1},1}(B_2)} \tag{3.2}$$

满足

$$\theta \leqslant \epsilon, \tag{3.3}$$

其中, ϵ 是一个待定的足够小的常数, 使得守恒律 (1.8) 在 B_1 中成立 (注意, 守恒律只在局部成立), 并且满足

$$\|A\|_{W^{m,2}(B_1)} + \|A - \mathrm{Id}\,\|_{L^\infty(B_1)} + \|B\|_{W^{2-m,2}(B_1)} \lesssim \epsilon. \tag{3.4}$$

我们的目标是对任意给定的 $\alpha \in (0,1)$, 找到不依赖于解的常数 $\tau \in (0,1)$, 使得以下估计成立:

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} \leqslant \tau^\alpha \sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_1)}. \tag{3.5}$$

步骤 1 推导 $A\nabla u$ 方程.

反复使用 Leibniz 法则, 得到

$$\delta\Delta^{m-1}(Adu) = \delta\bigg(\sum_{i=1}^{m-1} \Delta^i A \Delta^{m-i-1} du + \sum_{j,k,l} d^l \Delta^j A \cdot d^l \Delta^k du\bigg),$$

其中 $j, k, l \in \mathbb{N}$ 满足 $j + k + l = m - 1$, $l, k \geqslant 1$. 上式的右端实际上省略了每项前面的常数系数. 这是因为这些常数系数的绝对大小在关于 (3.5) 的证明中并不重要, 而且我们知道这些常数不依赖于 ϵ. 所以从现在开始用 $\sum_i f_i$ 仅仅表示 f_i 的线性组合, 不去关心前面的系数大小.

由守恒律 (1.8), 可得

$$\delta\bigg(\sum_{i=1}^{m-1}\Delta^i A\Delta^{m-i-1}du\bigg)=\delta\bigg(\sum_{l=0}^{m-2}d\Delta^l A\Delta^{m-1-l}u+K\bigg),$$

其中 K 是 (1.8) 的后 5 项. 因此, Adu 在 B_1 上满足方程

$$\delta\Delta^{m-1}(Adu)=\delta\bigg(\sum_{j,k,l}d^l\Delta^j A\cdot d^l\Delta^k du+\sum_{l=0}^{m-2}d\Delta^l A\Delta^{m-1-l}u+K\bigg).$$

此外, 注意到存在 $1\leqslant b,c\leqslant m$, $a+b+c=2m-1$, 使得

$$\sum_{j,k,l}d^l\Delta^j A\cdot d^l\Delta^k du=\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a\sum_{b,c}(\nabla^b A\nabla^c u),$$

则有

$$\sum_{l=0}^{m-2}d\Delta^l A\Delta^{m-1-l}u=\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a(\nabla^m A\nabla^{m-1-a}u+\nabla^{m-1-a}A\nabla^m u).$$

因而

$$\sum_{j,k,l}d^l\Delta^j A\cdot d^l\Delta^k du+\sum_{l=0}^{m-2}d\Delta^l A\Delta^{m-1-l}u=\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a\bigg(\sum_{b,c}\nabla^b A\nabla^c u\bigg),$$

其中, $1\leqslant b,c\leqslant m$, $a+b+c=2m-1$. 故 Adu 满足方程

$$\delta\Delta^{m-1}(Adu)=\delta\bigg(\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a\bigg(\sum_{b,c}\nabla^b A\nabla^c u\bigg)+K\bigg),$$

其中, $1\leqslant b,c\leqslant m$, $a+b+c=2m-1$, K 是 (1.8) 的最后 5 项.

步骤 2 应用 Hodge 分解.

在 B_1 上应用 Hodge 分解可得

$$Adu=d\tilde{f}+*d\tilde{g}+\tilde{h},$$

使得在 B_1 上,

$$\Delta^m\tilde{f}=\delta\bigg(\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a\bigg(\sum_{b,c}\nabla^b A\nabla^c u\bigg)+K\bigg),$$
$$\Delta^m\tilde{g}=\delta\Delta^{m-1}(Adu),$$

其中 $\tilde{h}$ 是 B_1 中的调和 1- 形式.

由命题 2.3 知, 可以将所有的相关函数从 B_1 有界地延拓到整个空间 $\mathbb{R}^{2m}$, 并使这些函数都紧支撑在 B_2 中. 对于负指数的 Sobolev 分布, 如 $B=\sum_{|\alpha|\leqslant m-2}B_\alpha\in W^{2-m,2}(B_1)$, 我们只要在 B_1 外面令 $B_\alpha\equiv 0$ 即可. 为了简化记号, 仍然使用相同的记号表示延拓后的函数.

已知对数函数 log 是 Δ^{2m} 在 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的基本解 (相差一个常数倍数的意义下). 定义

$$f=\log*\delta\bigg(\sum_{a=0}^{m-1}\mathrm{div}^a\bigg(\sum_{b,c}\nabla^b A\nabla^c u\bigg)+K\bigg)\tag{3.6}$$

和

$$g = \log * \delta \Delta^{m-1}(Adu), \tag{3.7}$$

使得在 B_1 中有 $\Delta^m(f-\tilde{f}) = \Delta^m(g-\tilde{g}) = 0$. 再令 $h = f - \tilde{f} + g - \tilde{g} + \tilde{h}$. 则在 B_1 上有

$$Adu = df + *dg + h, \tag{3.8}$$

其中, f 和 g 由 (3.6) 和 (3.7) 定义, h 在 B_1 中满足

$$\Delta^m h = 0.$$

步骤 3 分别估计 f、g 和 h 的衰减.

为了得到 (3.5), 分别估计 f、g 和 h 的衰减. 为方便起见, 用 I_0 表示 Riesz 型奇异积分算子, 如 $\nabla^{2m}\log$ 或 $\nabla^{2m-k}I_k$, 其中 $1 \leqslant k < 2m$ 表示任意整数. 则对于任意 $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, I_0 是 $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2m})$ 上的有界算子 (参见文献 [29, 定理 V.3.15 和 VI.3.1]).

首先估计范数 $\|\nabla^j f\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 以下所有范数都是指函数在整个空间 $\mathbb{R}^{2m}$ 上的范数, 除非我们专门指出其所考虑的定义域. 由 f 的定义, 可得

$$|\nabla^j f| \approx I_{2m-1-j}\Bigg(K + \sum_{a=0}^{m-1} \mathrm{div}^a \sum_{b,c} (\nabla^b A \nabla^c u)\Bigg).$$

因为 $A, u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ 和 $b, c \leqslant m$, 所以由 Hölder 不等式 (参见命题 2.1) 可得

$$\nabla^b A \nabla^c u \in L^{\frac{2m}{b},2} \cdot L^{\frac{2m}{c},2} \subset L^{\frac{2m}{b+c},1} \subset L^{\frac{2m}{b+c},2}$$

且

$$\|\nabla^b A \nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{b+c},2}} \leqslant \|\nabla^b A\|_{L^{\frac{2m}{b},2}} \|\nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{c},2}} \lesssim \epsilon \|\nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{c},2}}.$$

在上述最后一个不等式的推导中, 我们使用了估计 (3.4). 对于 $b + c < j$ 的情形, 我们总是可以从算子 div^a 转移一部分到 $\nabla^b A \nabla^c u$ 上, 直到满足 $b + c \geqslant j$. 因此命题 2.5 意味着

$$\|I_{2m-j-1}(\mathrm{div}^a(\nabla^b A \nabla^c u))\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} \lesssim \|I_{b+c-j}(\nabla^b A \nabla^c u)\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} \lesssim \epsilon \|\nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{c},2}},$$

其中第一个不等号使用了关系 $a = 2m - 1 - b - c$. 对所有的 a、b、c 和 j 求和, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \Bigg\| I_{2m-1-j}\Bigg(\sum_{a=0}^{m-1} \mathrm{div}^a \sum_{b,c} (\nabla^b A \nabla^c u)\Bigg)\Bigg\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} &\lesssim \epsilon \sum_{c=1}^{m} \|\nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{c},2}(\mathbb{R}^{2m})} \\ &\lesssim \epsilon \sum_{c=1}^{m} \|\nabla^c u\|_{L^{\frac{2m}{c},2}(B_1)},\end{aligned} \tag{3.9}$$

在最后一个不等式中用到了 u 从 B_1 延拓到 $\mathbb{R}^{2m}$ 时的有界性.

接下来, 对涉及 K 的项建立类似的估计. 用 K_1 表示 K 的第 1 项, 即

$$K_1 = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{k-1} \Delta^l A \Delta^{k-l-1} d(V_k du).$$

反复应用求导运算的 Leibniz 法则得到

$$\Delta^l A \Delta^{k-l-1} d(V_k du) = \sum_{i=1}^{2(k-l)} \Delta^l A \nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u.$$

估计范数 $\|I_{2m-1-j}(\Delta^l A \nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u)\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})}$ 比上一项要复杂得多. 为此把这项分成两种情形.

情形 1 $2l > m$. 则有 $2(k-l) < 2(m-1-\frac{m}{2}) = m-2 < m$ 和 $2(k-l)-1 < 2k+1-m$. 注意到 $\Delta^l A \in W^{2l-m,2}$ 是负指数函数. 因为 $i \leqslant 2(k-l)$, 所以 $\nabla^{2(k-l)-i} V_k \in W^{2l-m+i+1,2}$ 和 $\nabla^i u \in W^{m-i,2}$ 是正指数函数. 此外, 可直接验证

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant 2(k-l)} (2l-m+i+1, m-i) \geqslant 2l-m,$$

这意味着借助广义 Hölder 不等式 (参见命题 2.4), 可以得到 $\Delta^l A \nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u \in W^{2l-m,2} \in W^{m-2l,2}$. 此外, 使用 Leibniz 法则可得

$$\begin{aligned}
\Delta^l A \nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u &= \sum_{|\alpha| \leqslant 2l-m} \partial^\alpha A_\alpha (\nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u) \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant 2l-m} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \partial^\beta (A_\alpha \partial^{\alpha-\beta} (\nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u)) \\
&= \sum_{|\alpha| \leqslant 2l-m} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \sum_{0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha-\beta} \partial^\beta (A_\alpha \nabla^{2(k-l)-i+|\gamma|} V_k \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u),
\end{aligned}$$

其中 $A_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^{2m})$. 所以 I_{2m-1-j} 作用于上述等式右边给出如下类型的项:

$$I_{2m-1-j-|\beta|}(A_\alpha \nabla^{2(k-l)-i-|\gamma|} V_k \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u).$$

位势内的函数可积性如下:

$$A_\alpha \in L^2, \quad \nabla^{2(k-l)-i-|\gamma|} V_k \in W^{2l-m+i+1-\gamma,2} \subset L^{\frac{2m}{2m-(2l+i+1)+|\gamma|},2}, \quad \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u \in L^{\frac{2m}{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i},2}.$$

由 Hölder 不等式, 有

$$A_\alpha \nabla^{2(k-l)-i-|\gamma|} V_k \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u \in L^{p,2},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2m-(2l+i+1)+|\gamma|}{2m} + \frac{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i}{2m} = \frac{3m+|\alpha|-|\beta|-2l-1}{2m}.$$

注意到, 所有的函数都在球 B_2 中具有紧支撑. 所以只需要 $p \geqslant \frac{2m}{2m-1-j-|\beta|+j}$, 那么

$$I_{2m-1-j-|\beta|}(A_\alpha \nabla^{2(k-l)-i-|\gamma|} V_k \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u) \in L^{2m/j,2}.$$

注意到

$$(3m+|\alpha|-|\beta|-2l-1) - (2m-1-|\beta|) = m-2l+|\alpha| \leqslant 0.$$

因此,

$$\|I_{2m-1-j-|\beta|}(A_\alpha \nabla^{2(k-l)-i-|\gamma|} V_k \nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i} u)\|_{L^{2m,2}} \lesssim \epsilon \sum_{i=1}^m \|\nabla^i u\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}.$$

最后通过求和可得

$$\|I_{2m-1-j}(\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\nabla^i u)\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})}\lesssim \epsilon\sum_{i=1}^{m}\|\nabla^i u\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}. \tag{3.10}$$

情形 2 $2l\leqslant m$. 在这种情形下, 我们有两个子情形:

子情形 2.1 $2l\leqslant m$ 但 $2(k-l)-i>2k+1-m$. 此时 $\nabla^{2(k-l)-i}V_k\in W^{2l+i+1-m,2}$ 的指数是负的. 于是, $i<m-2l-1<m$. 在这种情形下,

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 2(k-l)}(m-2l,m-i)\geqslant |2l+i+1-m|=m-(2l+i+1).$$

所以 $\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\nabla^i u$ 是有意义的 (参见命题 2.4), 且

$$\begin{aligned}\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\nabla^i u&=\sum_{|\alpha|\leqslant m-(2l+i+1)}\Delta^l A\partial^\alpha V_{k,\alpha}\nabla^i u\\&=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\partial^\beta(V_{k,\alpha}\partial^{\alpha-\beta}(\Delta^l A\nabla^i u))\\&=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^\beta(V_{k,\alpha}\nabla^{2l+|\gamma|}A\nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i}u).\end{aligned}$$

所以有

$$V_{k,\alpha}\nabla^{2l+|\gamma|}A\nabla^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i}u\in L^{p,2},$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{2l+|\gamma|}{2m}+\frac{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|+i}{2m}=\frac{m+2l+|\alpha|-|\beta|+i}{2m}.$$

因此 $p\geqslant\frac{2m}{2m-1-j-|\beta|+j}$ 相当于 $m+2l+|\alpha|-|\beta|+i\leqslant 2m-1-|\beta|$, 或者说, $|\alpha|\leqslant m-2l-i-1$, 而这正是我们的假设. 所以在子情形 2.1 中, 估计 (3.10) 仍然成立.

子情形 2.2 $2l\leqslant m$ 但 $2(k-l)-i\leqslant 2k+1-m$. 也就是说, $\Delta^l A$ 和 $\nabla^{2(k-l)-i}V_k\in W^{2l+i+1-m,2}$ 是典型的正指数 Sobolev 函数. 在这种情形下, 还有两种情形: (1) $i\leqslant m$ 和 (2) $i>m$.

(1) 当 $i\leqslant m$ 时,

$$\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\nabla^i u\in L^{p,2},$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{2l}{2m}+\frac{2m-(2l+i+1)}{2m}+\frac{i}{2m}=\frac{2m-1}{2m}=\frac{2m-1-j+j}{2m}.$$

则仍有 $I_{2m-1-j}(L^{\frac{2m}{2m-1},q})\subset L^{2m,2}$.

(2) 当 $i>m$ 时, $\nabla^i u\in W^{m-i,2}$ 是负指数函数. 在这种情形下,

$$\min(m-2l,2l+i+1-m)\geqslant i-m.$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\nabla^i u&=\sum_{\alpha\leqslant i-m}\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k\partial^\alpha u_\alpha\\&=\sum_{\alpha\leqslant i-m}\sum_{\beta}\partial^\beta(u_\alpha\partial^{\alpha-\beta}(\Delta^l A\nabla^{2(k-l)-i}V_k))\\&=\sum_{\alpha\leqslant i-m}\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^\beta(u_\alpha\nabla^{2l+|\gamma|}A\nabla^{2(k-l)-i+|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}V_k).\end{aligned}$$

则有

$$u_\alpha \nabla^{2l+|\gamma|} A \nabla^{2(k-l)-i+|\alpha|-|\beta|-|\gamma|} V_k \in L^{p,2},$$

其中

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2l+|\gamma|}{2m} + \frac{2m-1-2l-i+(|\alpha|-|\beta|-|\gamma|)}{2m} = \frac{3m-1+i+|\alpha|-|\beta|}{2m}.$$

因此 $p \geqslant \frac{2m}{2m-2-|\beta|+1}$ 相当于 $3m-1-i+|\alpha|-|\beta| \leqslant 2m-1-|\beta|$, 或者说, $|\alpha| \leqslant i-m$, 这也正是我们的假设. 因此, 在子情形 2.2 中, 估计 (3.10) 照样成立.

综上所述, 得到关于 K_1 的估计

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| I_{2m-j} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{k-1} \Delta^l A \nabla^{2(k-l)-i} V_k \nabla^i u \right) \right\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} \lesssim \epsilon \sum_{i=1}^{m} \|\nabla^i u\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}. \tag{3.11}$$

类似地, 可以对 K 的其余项得到相同的估计, 为了简洁起见, 将细节留给感兴趣的读者. 于是, 对函数 f, 可推导出

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j f\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} \lesssim \epsilon \sum_{i=1}^{m} \|\nabla^i u\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}. \tag{3.12}$$

接下来估计 g 和 h 的衰减. 由 g 的定义 (3.7), 得到如同 (3.9) 一样的估计:

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j g\|_{L^{2m/j,2}(\mathbb{R}^{2m})} \lesssim \epsilon \sum_{i=1}^{m} \|\nabla^i u\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}. \tag{3.13}$$

对于多调和函数 h, 应用文献 [13, 引理 6.2] 可以得到, 对于任意 $0<r<1$, 成立

$$\sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j h\|_{L^{2m/j,2}(B_r)} \lesssim r \sum_{i=1}^{m} \|\nabla^i h\|_{L^{2m/i,2}(B_1)}. \tag{3.14}$$

步骤 4 u 的衰减估计.

现在可以推导 u 的衰减估计. 令 $\tau \in (0,1/2)$ 待定. 估计如下:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} &\leqslant \|\nabla^{j-1}(A^{-1}h)\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} + \|\nabla^{j-1}(A^{-1}df)\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} + \|\nabla^{j-1}(A * dg)\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} \\
&\lesssim \sum_{j=1}^{m} (\|\nabla^j h\|_{L^{2m/j,2}(B_\tau)} + \|\nabla^j f\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})} + \|\nabla^j g\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})}) \\
&\lesssim \tau \sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j h\|_{L^{2m/j,2}(B_1)} + \epsilon \sum_{j=1}^{m} (\|\nabla^j f\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})} + \|\nabla^j g\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})}) \\
&\lesssim \tau \sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_1)} \\
&\quad + (\tau+\epsilon) \sum_{j=1}^{m} (\|\nabla^j f\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})} + \|\nabla^j g\|_{L^{2m/j,2}(B_{\mathbb{R}^{2m}})}) \\
&\leqslant C(\tau+\epsilon) \sum_{j=1}^{m} \|\nabla^j u\|_{L^{2m/j,2}(B_1)}.
\end{aligned}$$

在第 2 个不等式中利用了 A 的有界性和 $\nabla^j A$ 足够小, 见 (3.4). 第 3 个不等式应用了 (3.14), 第 5 个不等式应用了 (3.12) 和 (3.13). 现在令 $\alpha \in (0,1)$ 是引理给出的任意常数. 先选择足够小的 τ 使得 $2C\tau < \tau^\alpha$, 再选择 $\epsilon \leqslant \tau$, 就得到了想要的估计. 证毕. □

4 定理 1.3 的证明

我们将使用与文献 [21, 第 4 节] 同样的方法研究边界正则性. 为了更清晰地表达, 下面改用 $\Omega = B_1$ 表示 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的单位球. 对于 $x \in \Omega$ 和 $R > 0$, 记 $\Omega_R(x) = B_R(x) \cap \Omega$. 我们将使用以下类型的 Courant-Lebesgue 引理 (证明可参见文献 [16, 引理 2.3]).

引理 4.1 存在 $C > 0$ 使得对于任意 $R > 0$ 和 $x \in \Omega$, 都存在 $R_1 \in (R, 2R)$ 使得

$$\operatorname{osc}_{\partial B_{R_1}(x) \cap \Omega} u \leqslant \|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}.$$

定理 1.2 蕴涵着, 存在一个足够小的 $R_0 > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$ 使得, 若

$$x \in \Omega, \quad 0 < r < \min\left\{R_0, \frac{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}{4}\right\},$$

则有 $u \in C^\alpha(\bar{B}_r(x_0), \mathbb{R}^n)$ 且

$$\operatorname{osc}_{B_{\tau r}(x)} u \leqslant C\tau^\alpha \|u\|_{W^{m,2}(B_{4r}(x))}, \quad 0 < \tau \leqslant 1. \tag{4.1}$$

应用上式, 可以证明如下的边界附近的极大值原理.

命题 4.1 存在 $C > 0$, 使得对于任意 $x \in \overline{\Omega}$ 和 $0 < R < R_0/4$, 以及任意 $q \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\max_{\Omega_R(x)} |u - q| \leqslant C\Big(\max_{\partial\Omega_R(x)} |u - q| + \|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}\Big). \tag{4.2}$$

证明 下面使用 Lamm 和 Wang 在文献 [16, 定理 3.1] 中的证明方法. 为了方便读者, 在此简述主要步骤.

固定 $q \in \mathbb{R}^n$, 并记 $M = \max_{\Omega_R(x)} |u - q|$. 可以假定 $M \geqslant \|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}$. 选择 $x_0 \in \Omega_R(x)$ 使得

$$|u(x_0) - q| \geqslant \frac{3}{4}M. \tag{4.3}$$

令 $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega_R(x_0))$, 记 $r_0 \leqslant R < R_0$. 因此, (4.1) 意味着, 对于任意 $0 < r < r_0/4$, 有

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} u \leqslant C\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha \|u\|_{W^{m,2}(B_{r_0}(x_0))} \leqslant CM\left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha.$$

选择 $r_1 = r_0/(4C)^{1/\alpha}$, 可得 $\operatorname{osc}_{B_{r_1}(x_0)} u \leqslant \frac{1}{4}M$. 再加上 (4.3) 得到

$$\inf_{B_{r_1}(x_0)} u \geqslant \frac{M}{2}. \tag{4.4}$$

通过引理 4.1 可知, 存在 $r_2 \in (r_0, 2r_0)$ 使得

$$\operatorname{osc}_{\partial B_{r_2}(x_0) \cap \Omega_R(x)} u \leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}. \tag{4.5}$$

注意到 $\partial B_{r_2}(x_0) \cap \partial\Omega_R(x) \neq \emptyset$. 用以 x_0 为中心的极坐标 (完全类似文献 [16, 定理 3.1] 中的计算), 可得

$$\inf\{|u(r_1, \theta) - u(r_2, \theta)| : (r_i, \theta) \in \partial B_{r_i}(x_0) \cap \Omega_R(x), i = 1, 2\} \leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}.$$

也就是说, 存在 $\theta_0 \in \partial B_1(x_0)$ 使得

$$|u(r_1, \theta_0) - u(r_2, \theta_0)| \leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))}. \tag{4.6}$$

因此, 任意选择 $x^* \in \partial B_{r_2}(x_0) \cap \partial\Omega_R(x)$, 从 (4.4)–(4.6) 可得

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} &\leqslant \inf_{B_{r_1}(x_0)} u \leqslant u(r_1,\theta_0)\\ &\leqslant |u(r_1,\theta_0)-u(r_2,\theta_0)| + |u(r_2,\theta)-u(r_2,x^*)| + |u(x^*)-q|\\ &\leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))} + \operatorname{osc}_{\partial B_{r_2}(x_0)\cap\Omega_R(x)} u + \sup_{\partial\Omega_R(x)} |u-q|\\ &\leqslant C\|u\|_{W^{m,2}(\Omega_{4R}(x))} + \sup_{\partial\Omega_R(x)} |u-q|.\end{aligned}$$

证毕. □

定理 1.3 的证明 在命题 4.1 中取 $x_0 \in \partial\Omega$, $q = g(x_0)$ $(= u(x_0))$. 注意到

$$\max_{\partial\Omega_R(x_0)} |u-g(x_0)| \leqslant \max_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\partial\Omega} |g-g(x_0)| + \operatorname{osc}_{\partial\Omega_R(x_0)\cap\Omega} u.$$

结合假设 $g \in C(\partial\Omega)$ 和引理 4.1, 得到 $\max_{\partial\Omega_R(x_0)} |u-g(x_0)| \to 0$ $(R \to 0)$. 通过在 (4.2) 中令 $R \to 0$, 即可完成证明. □

致谢 郭常予教授在本文准备过程中给予了大量指导和有用的建议, 作者在此向他表示由衷的感谢.

参考文献

1 Evans L C. Partial regularity for stationary harmonic maps into spheres. Arch Ration Mech Anal, 1991, 116: 101–113
2 Hildebrandt S. Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. In: Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, vol. 1. Beijing: Science Press, 1982, 481–615
3 Heinz E. On the regularity of weak solutions of nonlinear elliptic systems (in German). Nachr Akad Wiss Göttingen II Math Phys Kl, 1986, 1: 1–15
4 Morrey C B. The problem of plateau on a Riemannian manifold. Ann of Math (2), 1948, 49: 807–851
5 Hélein F. Harmonic Maps, Conservation Laws and Moving Frames. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 150. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
6 Rivière T. Conservation laws for conformally invariant variational problems. Invent Math, 2007, 168: 1–22
7 Chang S-Y A, Wang L, Yang P C. A regularity theory of biharmonic maps. Comm Pure Appl Math, 1999, 52: 1113–1137
8 Wang C Y. Remarks on biharmonic maps into spheres. Calc Var Partial Differential Equations, 2004, 21: 221–242
9 Wang C Y. Biharmonic maps from R^4 into a Riemannian manifold. Math Z, 2004, 247: 65–87
10 Wang C Y. Stationary biharmonic maps from $\mathbb{R}^m$ into a Riemannian manifold. Comm Pure Appl Math, 2004, 57: 419–444
11 Lamm T, Rivière T. Conservation laws for fourth order systems in four dimensions. Comm Partial Differential Equations, 2008, 33: 245–262
12 Rivière T. The role of integrability by compensation in conformal geometric analysis. In: Analytic Aspects of Problems in Riemannian Geometry: Elliptic PDEs, Solitons and Computer Imaging. Séminaires & Congrès, 22. Paris: Soc Math France, 2011, 93–127
13 Gastel A, Scheven C. Regularity of polyharmonic maps in the critical dimension. Comm Anal Geom, 2009, 17: 185–226
14 Angelsberg G, Pumberger D. A regularity result for polyharmonic maps with higher integrability. Ann Global Anal Geom, 2009, 35: 63–81
15 Goldstein P, Strzelecki P, Zatorska-Goldstein A. On polyharmonic maps into spheres in the critical dimension. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2009, 26: 1387–1405
16 Lamm T, Wang C. Boundary regularity for polyharmonic maps in the critical dimension. Adv Calc Var, 2009, 2: 1–16
17 de Longueville F L, Gastel A. Conservation laws for even order systems of polyharmonic map type. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 138
18 Hörter J, Lamm T. Conservation laws for even order elliptic systems in the critical dimension—a new approach. Calc Var Partial Differential Equations, 2021, 60: 125

19 Guo C-Y, Xiang C-L. Regularity of weak solutions to higher order elliptic systems in critical dimensions. Trans Amer Math Soc, 2021, 374: 3579–3602
20 Müller F, Schikorra A. Boundary regularity via Uhlenbeck-Rivière decomposition. Analysis (Berlin), 2009, 29: 199–220
21 Guo C-Y, Xiang C-L. Regularity of solutions for a fourth-order elliptic system via conservation law. J Lond Math Soc (2), 2020, 101: 907–922
22 Sharp B, Topping P. Decay estimates for Riviére's equation, with applications to regularity and compactness. Trans Amer Math Soc, 2013, 365: 2317–2339
23 Qing J. Boundary regularity of weakly harmonic maps from surfaces. J Funct Anal, 1993, 114: 458–466
24 Adams R A, Fournier J J F. Sobolev Spaces, 2nd ed. Pure and Applied Mathematics, vol. 140. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2003
25 O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces. Duke Math J, 1963, 30: 129–142
26 Ziemer W P. Weakly Differentiable Functions. Graduate Texts in Mathematics, vol. 120. New York: Springer-Verlag, 1989
27 DeVore R, Scherer K. Interpolation of linear operators on Sobolev spaces. Ann of Math (2), 1979, 109: 583–599
28 de Longueville F L. Regularität der Lösungen von Systemen $(2m)$-ter Ordnung vom polyharmonischen Typ in kritischer Dimension. PhD Thesis. Essen: Universität Duisburg-Essen, 2018
29 Stein E, Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Mathematical Series, vol. 32. Princeton: Princeton University Press, 1971
30 Giaquinta M. Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic systems. Annals of Mathematics Studies, vol. 105. Princeton: Princeton University Press, 1983

Regularity theory for weak solutions to a class of even order geometric partial differential equations

Zhu Wen, Jixiu Wang & Chang-Lin Xiang

Abstract de Longueville and Gastel (2021) proposed the very general higher-order elliptic equations

$$\Delta^m u = \sum_{l=0}^{m-1} \Delta^l \langle V_l, du \rangle + \sum_{l=0}^{m-2} \Delta^l \delta(w_l du),$$

of which polyharmonic mapping equations are a typical example. Under the smallest regularity assumption on the coefficient functions and the algebraic antisymmetric assumption on the first-order potential, they succeeded in establishing a conservation law for this system, from which the weak solutions are continuous everywhere. Recently, Guo and Xiang (2021) proved the local α-Hölder continuity of weak solutions to the above system for some $\alpha \in (0, 1)$, improving the result of de Longueville and Gastel (2021). In this work, we use another method to prove that, for any $\alpha \in (0, 1)$, the weak solution to the above system is locally α-Hölder continuous. This further improves the result of Guo and Xiang (2021). Moreover, under the standard Dirichlet boundary value condition, we obtain the boundary continuity, which extends the boundary regularity theory of Guo and Xiang (2020) in the fourth-order case.

Keywords even order elliptic equations, conservation law, Hölder continuity, Lorentz-Sobolev spaces, Riesz potential

MSC(2020) 35J48, 35G50, 35B65

doi: 10.1360/SSM-2021-0088