

# 城市化水平增长曲线的类型、分段和研究方法

陈彦光

(北京大学城市与环境学院, 北京 100871)

**摘要:** 城市化水平增长曲线可以分为S形和J形2大类别,其变化特征、动力学背景及研究方法也不尽相同。城市化曲线研究可以分为唯象分析和唯理分析2大途径,唯理研究包括城—乡人口异速生长、城—乡人口替代以及城乡人口迁移和转换3种路径,目前这些方法主要用于S形曲线研究,对J形曲线的探索不够深入。S形曲线是一种奇对称曲线,其模型导数却是一条偶对称曲线,根据这些特征可以将城市化的S曲线分为3或4个阶段。发展中城市化过程通常不能有效拟合S形曲线,却表现出J形曲线的特征。但是,J形曲线及其函数的导数曲线均不对称,其动力学根源和阶段划分方法暂时尚不明朗。中国未来的城市化曲线研究似乎应该将重点放在J形曲线方面,揭示J形曲线更有助于人们从理论上理解中国的城市化动力学。

**关键词:** 城市化水平; 城市化曲线; S形曲线; J形曲线; 异速生长; 城乡人口替代; 城乡人口相互作用

**中图分类号:** K901.8      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-0690(2012)01-0012-06

一个区域的城市化程度可以用城市化水平度量,城市化水平通常定义为城市人口占一个区域总人口的比重。城市化水平随时间变化理论上是一条单增曲线,叫做城市化水平增长曲线,简称“城市化曲线(urbanization curve)”。该曲线可以简易而直观地反映城市化演化过程的基本特征。不同的国家或地区,城市化曲线既有差别,也有共性。联合国通常采用logistic曲线拟合城市化水平的变化过程<sup>[1,2]</sup>,欧美发达国家的城市化的确可以采用这种曲线友好地描述<sup>[3]</sup>。但是,并非所有国家和地区的城市化水平都服从logistic增长规律<sup>[4-6]</sup>。发展中国家的城市化曲线通常比较陡峭,无法用logistic模型有效拟合。尽管如此,城市化水平的logistic增长现象相对普遍,其理论研究也显得更为成熟。比较而言,logistic曲线以外的城市化曲线研究较为少见,而有关探索对中国城市化而言可能更有现实意义。

统计分析的先驱Karl Pearson在其经典性的著作《科学的语言规范》一书中曾对科学方法给出一个定义,认为科学方法就是通过认识各种事实(facts)之间的关联(correlation)和顺序(sequence),来对事实进行有条理的分类<sup>[7]</sup>。本文的写作目的

就是基于多年积累的资料和经验,揭示城市化曲线研究这类事实的逻辑关联并整理出一定的逻辑秩序,然后进行阶段的划分和研究的分类。

## 1 城市化曲线的两种类型

### 1.1 两种城市化曲线

如果用城市人口的比重定义城市化水平,则有 $L(t)=u(t)/[u(t)+r(t)]$ ,这里 $L$ 为时刻 $t$ 的城市化水平, $r(t)$ 为时刻 $t$ 的乡村人口, $u(t)$ 为时刻 $t$ 的城市人口<sup>[8]</sup>。显然,城市化水平有明确的上限和下限,即变化于0到1之间。这类存在上、下限制的现象通常可以用所谓“挤压函数”描述,挤压函数通常叫做“S形函数”。形象地说就是,一条直线经过上压下挤之后,扭曲为S形。用作S形函数的方程很多,其中最具有代表性的是logistic函数。因此,在一些学者那里,S形函数与logistic函数不分彼此<sup>[9]</sup>。城市化水平的logistic模型如下:

$$L(t) = \frac{L_{\max}}{1 + (L_{\max}/L_0 - 1)e^{-kt}} \quad (1)$$

式中 $t$ 表示时序( $t$ =年份-初始年份), $L(t)$ 为时刻 $t$ 的城市化水平。另外有三个参数, $L_0$ 为城市化水平的初始值, $L_{\max}$ 为城市化水平的最大值或者承载量参

收稿时间: 2011-03-07; 修订时间: 2011-11-30

基金项目: 国家自然科学基金(41171129)资助。

作者简介: 陈彦光(1965-),男,汉族,河南罗山人,副教授,主要从事城市与空间复杂性研究。E-mail: chenyg@pku.edu.cn

数,  $k$  为内生增长率。

西方学者将城市化随时间变化的曲线分为两种类型<sup>[4-6]</sup>: 其一是S形(S-curve), 属于平缓增长过程(图 1a), 可用公式(1)描述; 其二, 姑且称之为J形曲线, 属于梯度陡峭的增长过程(图 1b), 不能采用公式(1)有效刻画。S形曲线奇对称, J形曲线不对称。前者主要用于模拟发达国家的城市化过程, 代表性国家是中欧的瑞士; 后者主要用于模拟欠发达国家的城市化过程, 后者的代表性国家则是中美洲的哥斯达黎加<sup>[5]</sup>。在西方学者看来, S形曲线的动力学根源是城乡人口迁移, 即迁移主导型(migration led)城市化; J形曲线的动力学根源在于城乡人口迁移和自然增长双重作用——凡是人口增长率很高的落后国家, 城市化过程表现为陡峭增长型, 而不是logistic型<sup>[5, 6]</sup>。

J形曲线的描述有3种备选模型, 其一是指数方程, 其二是双曲线模型族中的反比函数, 其三是二次logistic函数。前两个函数在一定条件下都可以从式(1)近似而来。对式(1)求导数, 得到二次齐次微分方程<sup>[10]</sup>, 舍去参数小的二次项, 求解得到指数模型:

$$L(t)=L_0e^{kt} \tag{2}$$

式中  $k$  表示相对增长率, 其余符号的含义同式(1)。另一方面, 假定  $L_{max}$  值很大, 对式(1)取倒数, 经过 Taylor 级数展开并近似, 得到反比函数:

$$\frac{1}{L(t)} = \frac{1}{L_{max}} + \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_{max}}\right)e^{-kt} = \frac{1}{L_0}(1 - kt) \tag{3}$$

根据有关数学原理可知, 对于一个现实的城市化水平序列, 首先尝试拟合 logistic 模型。如果饱和值  $L_{max}$  非常大, 可以考虑采用反比函数; 如果  $k/L_{max}$  足够小, 则选择指数函数建模。不过, 试验表明, 最有可能模拟 J形曲线的是二次 logistic 函数, 即时间变量取二次方, 而不是通常的一次方。

在世界上的大国中, 有两个国家的城市化过程比较有代表性。一是美国, 其曲线为 S形(图 2a); 二是印度, 其曲线可以视为 J形(图 2b)。由于时间序列样本路径较长, 加之城市化水平接近饱和值, 美国城市化曲线的 S形特征很明显。可是, 由于时间序列样本路径短, 加之近期(如 2001 年)人口普查显示的城市化水平不到 30%, 印度的城市化曲线难以直观判定, 要进行曲线拟合, 其特征才会表现出来。采用高斯(Gauss)一牛顿(Newton)的非线性拟合法, 将美国 1790~2000 年 10 a 一次的城市化水平普查数据拟合 logistic 模型, 迭代过程很快收敛, 得到如下模型:

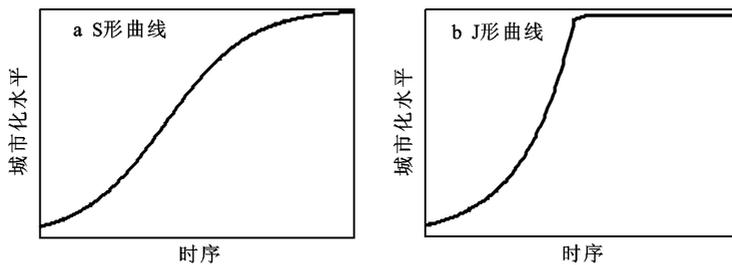
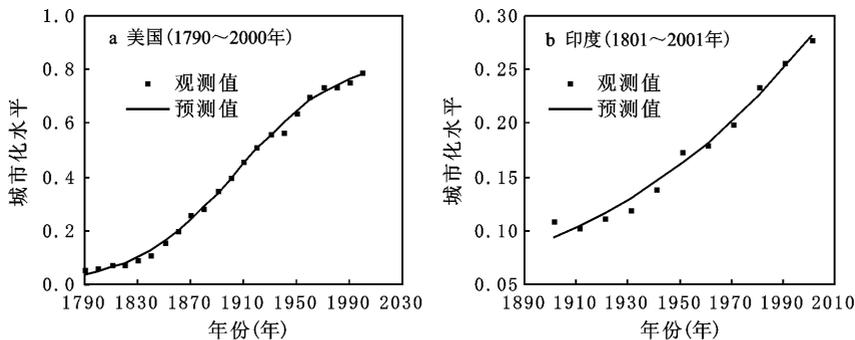


图1 两种类型的城市化水平变化曲线

Fig. 1 Two types of urbanization curves



资料来源: 美国原始数据来源于美国人口普查网站: <http://www.census.gov/population/>;  
印度原始数据来源于印度人口普查网站: <http://www.censusindia.net/results/>

图2 美国和印度城市化水平的 logistic 拟合曲线

Fig. 2 The S-shaped curve of US urbanization and J-shaped curve of India urbanization

$$L(t) = \frac{0.8459}{1 + 20.8757e^{-0.0264t}} \quad (4)$$

据此推测的美国城市化水平饱和值约为84.59%，内生增长率为0.0264，参数值都合情合理，并且模型预测的标准误差为 $s=0.0144$ ，数值很小。

然而，采用同样的方法，将印度1901~2001年10 a一次的城市化水平普查数据拟合logistic曲线方程，迭代过程不能收敛到正确的位置，并且计算结果很不稳定，因为初始值的不同而发生改变。其中标准误差最小的一个模型为：

$$L(t) = \frac{1.1620 \times 10^6}{1 + 1.2392 \times 10^7 \cdot e^{-0.0110t}} \quad (5)$$

标准误差为 $s=0.0083$ 。根据这个模型， $L_{\max}$ 将达到100万以上(合理的数值小于1)， $k/L_{\max}$ 则非常小。综合评估的结论是，印度的城市化曲线不是S形曲线，而是类似于J形曲线。

## 1.2 两种城市化动力学

要想理解城市化过程的不同曲线，必须理解城市人口和乡村人口迁移和转化的非线性动力学机制。动力学分析的基本方法是微分方程解析或者对应差分方程的数值模拟。基于中国的人口统计数据和美国的人口普查数据分析，发现城市化动力学过程可以采用如下非线性微分方程描述<sup>[11]</sup>：

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = r(t)[a - b^*u(t)] \\ \frac{du(t)}{dt} = u(t)[c + d^*r(t)] \end{cases} \quad (6)$$

式中 $r(t)$ 、 $u(t)$ 含义如前所述， $a$ 、 $b^*$ 、 $c$ 、 $d^*$ 为参数。参数 $b^*$ 、 $d^*$ 可为常数，用 $b$ 、 $d$ 表示；也可以是时变参数，定义为 $b^*(t)=b/[r(t)+u(t)]$ ， $d^*(t)=d/[r(t)+u(t)]$ 。动力学分析表明。如果 $b^*$ 、 $d^*$ 为时变参数，则城市化水平可以表现为S型曲线；如果 $b^*$ 、 $d^*$ 为常数，则城市化水平表现为J型曲线。可以看出，当 $b^*$ 、 $d^*$ 为常数时，式(6)便是著名的捕食—牺牲相互作用的动力学模型<sup>[12]</sup>。

## 2 城市化logistic曲线的阶段划分

### 2.1 城市化logistic曲线的阶段两种划分

相对于J形曲线而言，城市化的S形曲线研究比较深入，其理论基础相对明朗。原因在于，西方发达国家的城市化过程基本上服从S曲线，有关研究较多。引领科学潮流的西方学者对发展中国家的城市化研究不过深入，以致J形曲线的探索尚未形成系统的理论和模型。目前的城市化阶段划

分，主要是基于S形曲线开展工作的，基于J形曲线的城市化阶段分析少见报道。尽管如此，了解S形曲线的阶段划分对今后基于J形曲线的分段具有理论上的启发意义。关于城市化S形曲线的划分，目前存在3个阶段和4个阶段的意见分歧<sup>[10, 13]</sup>。

Northam将城市化水平的logistic曲线划分为3个阶段<sup>[14, 15]</sup>：初始阶段、加速阶段和饱和阶段。本研究认为，将中间阶段命名为“加速阶段(acceleration stage)”不太科学，应该命名为“快速阶段(celerity stage)”。原因在于，logistic曲线的中间一段虽然比较陡峭，但那是“累计”分布，而不是“密(速)度”分布，中间一段是先加速和减速，而不是一直地加速<sup>[13]</sup>。对式(1)求导数，得到一个微分方程，表示的开口向下的抛物线：

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{k}{L_{\max}} L(t)[L_{\max} - L(t)] \quad (7)$$

这个式子描述了城市化的速度，表示的是一条偶对称曲线，其特征是中间高、两端低，最高点代表最大速度，最大速度对应的城市化水平饱和值的一半的位置。这个位置在数学上是一个拐点，对应于式(1)的二次导数为0。因此，拐点实际上是一个转折点：此前城市化加速，此后城市化减速。不过，拐点前后的速度都很快——速度的下降是一个从量变到质变的过程。

一般说来，速度至高点理当是一个分界点。根据logistic函数的数理分析结果可知，如果一个区域将会100%的城市化，则城市化水平达到50%速度最快，此后开始减速；如果一个区域的城市化水平极限值为80%，则城市化水平达到40%速度最快，此后开始减速；其余依此类推。在假定一个区域可以百分之百城市化的前提下，西方学者将50%视为一个转折点，此后属于城市多数(urban majority)状态<sup>[16]</sup>。正是基于上述数学分析和理论思考，可以将城市数水平的S形曲线分为4个阶段：初始阶段、加速阶段、减速阶段和饱和阶段<sup>[13]</sup>。加速阶段和减速阶段可以合并为快速阶段，相当于Northam的加速阶段。

### 2.2 城市化logistic曲线的阶段划分思路

将城市化水平的logistic曲线划分为4个阶段，不是基于简单的曲线观察，而是基于严格的数学推理。根据logistic方程，城市化速度是1条单峰曲线。采用高等数学的条件极值分析，可以导出如下一般性的结论：当城市化水平 $L$ 达到饱和值

$L_{\max}$ 的一半,即 $L=L_{\max}/2$ 时,城市化速度达到最大值。借此,可以通过观测城市化速度最快时期的城市化水平来预测未来的城市化水平极限值<sup>[10]</sup>。

借助数学知识,可以从两条思路确定城市化水平 logistic 曲线的阶段划分:

1) 长方形面积最大化类比。不考虑比例系数,式(7)可是视为2个变量 $L(t)$ 和 $L_{\max}-L(t)$ 的乘积。在式(7)中,可将 $L(t)$ 类比为矩形的一个边长, $L_{\max}-L(t)$ 设想为另一个边长。要想使得乘积(相当于面积)最大,前提是两个“边长”相等,即有 $L(t)=L_{\max}-L(t)$ ,从而 $L(t)=L_{\max}/2$ 。显然,当饱和值为 $L_{\max}=1$ 时, $L(t)=1/2$ ,即50%的城市化水平时速度最快;当 $L_{\max}=0.8$ 时, $L(t)=0.4$ ,即40%的城市化速度最快。未来的城市化水平饱和值决定了城市化速度;反过来,如果城市化水平变化服从 logistic 增长过程,也可以通过城市化速度最快时期的城市化水平推断未来的城市化水平饱和值。

2) 抛物线的对称性分析。公式(7)中,二次项系数 $-k/L_{\max}$ 小于零,城市化速度 $dL(t)/dt$ 实际上是一条开口朝下的抛物线。根据抛物线的对称直线公式 $L(t)=-a/(2b)$ ,其中 $a$ 为一次项系数, $b$ 为二次项系数,可知这个抛物线对称于直线 $L(t)=k/(2k/L_{\max})=L_{\max}/2$ ,即其顶点对应的是 $L(t)=L_{\max}/2$ 的地方。

Northam、Cadwallader等建议将25%和75%作为三个阶段的分界<sup>[6,14]</sup>,但未能提供有说服力的理论依据。其实,借助城、乡人口替代过程模型可以找到上述3个阶段的分界点。考虑到城市化速度抛物线的顶点,中间一段可以分出2个阶段,从而得到4阶段划分了。城乡人口替代方程是一个指数函数,指数模型的相对增长率参数的倒数为一种特征尺度。根据特征尺度可以确定第一、第二阶段的分界,然后根据对称性可以找到第三阶段和第四阶段的分界。利用普查数据分析和计算,可以发现,美国城市化过程的第一阶段与第二阶段的分界大约为13%左右,第三、第四阶段的分界为87%;而印度的第一和第二阶段分界则是22%左右,第三、第四阶段的分界为88%。

### 3 城市化曲线研究的方法和路线

#### 3.1 城市化曲线研究方法

从城市化曲线理论发展过程看来,存在2种研究方法:唯象分析和唯理分析。唯象分析主要是以观察为基础的经验分析,偏重于归纳和类比;唯

理分析则是以理论为前导的逻辑推理分析,侧重于演绎和假设—求证过程。唯理研究可以以唯象研究结果为基础,唯象研究可以通过唯理分析将成果抽象化和一般化。唯象研究关注的是系统的行为特征,唯理研究关注的是系统的合理结构。由于地理系统具有自我优化机制,两类研究结果往往殊途同归。以城市化水平的S形曲线为例,Davis和Northam等通过唯象研究,基于观测数据经验地总结出城市化水平的S形曲线<sup>[14,17,18]</sup>。与此对照,另外一些学者则是通过纯粹的理论分析导出城市化水平的 logistic 模型,从而给出更为具体的S型曲线<sup>[10-19]</sup>。

#### 3.2 城市化 logistic 曲线研究路线

对于城市化曲线而言,唯理研究往往是基于各个不同的唯象研究进行的。理论的出发点不同,研究的轨迹又有所不同。以S型曲线为例,唯理研究大致分为3条轨迹。其一是城乡人口异速生长研究,其二是城乡人口替代过程,其三是城乡人口迁移动力学分析。城乡人口迁移模型又可以分为线性动力学模型和非线性动力学模型。

城乡人口异速生长分析源于一般系统论。1956年,Naroll和系统论创始人Bertalanffy将生物学的异速生长方程用于城乡人口研究<sup>[20]</sup>。对城乡人口异速生长方程进行反演,可以得到城市化水平的 logistic 方程。城乡人口异速生长方程可以表作

$$u(t) = Kr(t)^b \quad (8)$$

式中 $K$ 为比例系数, $b$ 为异速标度指数,其余符号如前所述。这个方程可以分解为城市、乡村人口指数增长方程,求解两个指数增长方程,并将结果代入定义城市化水平的公式,立即得到城市化水平随时间变化的 logistic 模型。

城、乡人口替代假说(replacement hypothesis)源于一个类比分析。最初是Fisher和Pry提出了新、旧技术替代方程<sup>[21]</sup>,Hermann和Montroll将其推广应用于非农职工与农业职工的替代过程<sup>[22,23]</sup>,Jain和Karmeshu进一步将其推广到城、乡人口替代过程<sup>[19]</sup>。在一个区域中,城市人口不断取代乡村人口,可得如下模型:

$$\ln \left[ \frac{L(n)}{1-L(n)} \right] = \ln \left[ \frac{L_0}{1-L_0} \right] + k(n-n_0) \quad (9)$$

式中 $L(n)$ 表示第 $n$ 个年份城市人口比重, $L_0$ 为初始年份 $n_0$ 时的初始比重,常数 $k$ 为城乡人口替代率。更简单地,可用时序 $t=n-n_0$ 代替年份。公式(9)是

一个最简单的 logit 变换<sup>[24,25]</sup>。由此可以导出城乡人口比(urban-rural ratio)的指数增长。城乡人口比定义为  $X(t)=u(t)/r(t)$ 。可以证明,城乡人口比的指数增长与城市化水平的 logistic 增长理论等价<sup>[19]</sup>。

城乡人口迁移研究包括 2 大类别:一是线性动力学研究,代表性理论有 Keyfitz、Rogers 等的城乡人口迁移模型<sup>[26,27]</sup>;二是非线性动力学研究,代表性理论有联合国的城乡人口非线性迁移模型和捕食—牺牲模型<sup>[1,23,28]</sup>。前面的式(6)可以看成是联合国模型的特例。进一步开展有关探讨工作需要系统进行系统的数学建模和计算机模拟分析<sup>[29]</sup>。

## 4 结束语

一个国家的城市化水平与经济发展水平存在逻辑关系,二者表现为一种交互作用过程。研究城市化曲线,对认识经济发展水平具有深刻的意义。这篇文章是关于城市化曲线理论研究的系统总结。在归纳国内外前人研究成果的同时,文章也包括了作者的一些创新。首先,采用更为通俗的方法解释了城市化速度的顶点,证明这是城市化曲线的一个分界点;其次,明确了城市化曲线研究的不同路径之间的内在联系。其三,初步探讨了不同城市化曲线的动力学根据。

本文的学术价值在于如下几个方面:其一,明确了城市化曲线研究的来龙去脉和逻辑关系,有助于地理工作者从整体上了解城市化曲线的理论知识;其二,说明了城市化曲线的不同特征和机理,有助于读者为中国城市化曲线给出一个更为准确的定位;其三,揭示了城市化曲线研究的不足,从而暗示了未来的研究方向。特别是 J 曲线的数学描述和动力学问题存在欠缺,而有关研究对中国的城市化问题更具有实际意义。因此,中国学者今后或许应该更多地思考城市化的 J 形曲线问题。

## 参考文献:

[1] United Nations. Patterns of urban and rural population growth [R]. New York: U.N. Department of International Economic and Social Affairs, Population Division, 1980

[2] United Nations. World urbanization prospects: the 2003 revision [R]. New York: U.N. Department of Economic and Social Affairs, Population Division, 2004

[3] 焦秀琦. 世界城市化发展的 S 型曲线[J]. 城市规划, 1987, 11(2): 34~38

[4] Haggett P. Geography: a modern synthesis (revised third edition) [M]. New York: Harper & Row.

[5] Haggett P. Geography: a global synthesis [M]. New York: Pearson Hall, 2001.

[6] Cadwallader MT. Urban geography: an analytical approach [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

[7] Pearson K. The grammar of science (phoenix edition) [M]. New York: Dover Publications, 2004.

[8] 周一星. 城市地理学[M]. 北京: 商务印书馆, 1995

[9] Mitchell T M. Machine learning [M]. Boston, MA: WCB/McGraw-Hill, 1997

[10] 陈彦光, 罗 静. 城市化水平与城市化速度的关系探讨——中国城市化速度和城市化水平饱和值的初步推断[J]. 地理研究, 2006, 25(6): 1063~1072.

[11] 陈彦光. 分形城市系统: 标度、对称和空间复杂性[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[12] Dendrinos D S, Mullally H. Urban evolution: studies in the mathematical ecology of cities[M]. New York: Oxford University Press, 1985.

[13] 陈彦光, 周一星. 城市化 Logistic 过程的阶段划分及其空间解释——对 Northam 曲线的修正与发展[J]. 经济地理, 2005, 25(6): 817~822.

[14] Northam R M. Urban Geography[M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.

[15] 周一星. 城市化水平与国民生产总值关系的规律性探讨[J]. 人口与经济, 1982, (1): 28~33.

[16] 周一星, 陈彦光. 城市与城市地理[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.

[17] Davis K. World urbanization: 1950-1970 [M]. Berkeley: Institute of International Studies, University of California, 1972.

[18] Pacione M. Urban geography: a global perspective (2<sup>nd</sup> edition) [M]. New York: Routledge, 2005.

[19] Karmeshu. Demographic models of urbanization [J]. Environment and Planning B: Planning and Design, 1988, 15(1): 47-54.

[20] Naroll RS, Bertalanffy L von. The principle of allometry in biology and social sciences [J]. General Systems Yearbook, 1956, 1 (Part II): 76-89.

[21] Fisher J C, Pry R H. A simple substitution model for technological change [J]. Technological Forecasting and Social Change, 1971-1972, 3: 75-88.

[22] Hermann R, Montroll E W. A manner of characterizing the development of countries[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1972, 69(10): 3019-3024.

[23] Montroll E W. Social dynamics and the quantifying of social forces[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1978, 75(10): 4633-4637.

[24] 陈彦光, 刘继生. 效用最大化、Logit 变换和城市地理学的数量分析模型[J]. 地理科学, 2002, 22(5): 581~586.

[25] 陈彦光. 城市化与经济发展水平关系的三种模型及其动力学分析[J]. 地理科学, 2011, 31(1): 1~6.

- [26] Keyfitz N. Introduction to the mathematics of population [M]. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.
- [27] Rogers A. Matrix analysis of interregional population growth and distribution [M]. Berkeley, CA: University of California Press, 1968.
- [28] 陈彦光, 周一星. 中国城市化过程的非线性动力学模型探讨[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2007, 43(4): 542~548.
- [29] 陈彦光. 地理学理论研究和科学分析的一般方法探讨[J]. 地理科学, 2009, 29(3): 316~322.

## On the Urbanization Curves: Types, Stages, and Research Methods

CHEN Yan-guang

(Department of Geography, College of Urban and Environmental Sciences, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** The curves on the change of level of urbanization over time are called urbanization curves, which are in fact models of the progress of urbanization based on empirical evidences from developed countries and developing countries. There are two types of urbanization curves. One is S-shaped curve, and the other, J-shaped curve. The S-curve can be modeled with the logistic function, while the J-curve cannot be described by the logistic function. The former is applicable to the developed countries, whereas the latter is applicable to the developing countries. So far, there have been more studies on the S-shaped curve. However, fewer studies have been devoted to the J-shaped curve of urbanization. Consequently, we know little about the general principle on the J-shaped curve and its underlying rationale, which remain to be further explored in the future. In this paper, various studies on urbanization curves are systemized to form a framework of models on the level of urbanization. The logistic curve was once divided into three stages by Northam (1979): initial stage, acceleration stage, and terminal stage. However, the Northam's proposal is just a phenomenological theory with several defects: first, the definition of 'acceleration stage' is not correct; second, there are no theoretical basis and critical scale for the divisions. It can be proved that the logistic process falls into four phases. Taking half of urbanization level capacity as a tipping point, the logistic curve is divided into two stages: acceleration stage (urban majority) and deceleration stage (urban minority). The tipping point can be determined by two methods of elementary mathematics. Then the two stages are respectively divided into two sub-stages by means of the exponential law of urban-rural ratio with a parameter as characteristic length. Now, urbanization process can be divided into four stages: initial stage, acceleration stage, deceleration stage, and terminal stage. Also it can be divided into three stages: initial stage, celerity stage (including acceleration stage and deceleration stage), and terminal stage. Two methods are always applied to the research of urbanization curves and the related urbanization dynamics. One is phenomenological analysis, and the other, theoretical analysis, which consists of three approaches: urban-rural allometric growth, urban-rural population replacement, and urban-rural population interaction dynamics. Urban-rural allometric growth analysis is a kind of scaling analysis. Urban-rural population replacement suggests a new dynamical analysis. Urban-rural interaction comprises linear dynamics and nonlinear dynamics. The linear dynamics is based on the well-known Keyfitz-Rogers model, whereas the nonlinear dynamical analysis can be employed to interpret the similarities and differences between the S-shaped and J-shaped curves. China's urbanization process can be described with the J-shaped curve rather than the S-shaped curve. The studies on the urbanization curves will be significant for understanding the dynamical mechanism and essence of Chinese urbanization.

**Key words:** level of urbanization; urbanization curve; S-shaped curve; J-shaped curve; allometric growth; urban-rural replacement; urban-rural population interaction