

引用格式: 熊芬芬, 陈江涛, 任成坤, 等. 不确定性传播的混沌多项式方法研究进展 [J]. 中国舰船研究, 2021, 16(4): 19–36.
XIONG F F, CHEN J T, REN C K, et al. Recent advances in polynomial chaos method for uncertainty propagation[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2021, 16(4): 19–36.

不确定性传播的混沌多项式方法研究进展



熊芬芬¹, 陈江涛², 任成坤¹, 张立¹, 李泽贤¹
1 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081
2 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000

摘 要:不确定性在工程设计中广泛存在, 作为工程设计中的核心内容之一, 不确定性传播和量化一直都是工程设计领域重要的理论课题之一。混沌多项式作为一种高效的不确定性传播方法近年来得到了广泛研究和应用, 具有较大的工程应用潜力。为此, 对混沌多项式方法的研究进展进行综述。首先, 介绍该方法的应用场景和基本原理; 其次, 针对混沌多项式应用中面临的“维数灾难”、计算量大等难题, 介绍基截断、稀疏重构、稀疏网格、多可信度建模等诸多解决策略; 然后, 对基于混沌多项式的全局和局部灵敏度分析方法进行介绍; 最后, 对混沌多项式的研究进行展望。
关键词:不确定性传播; 混沌多项式; 维数灾难; 多可信度建模; 灵敏度分析
中图分类号: U662.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.19693/j.issn.1673-3185.02130

Recent advances in polynomial chaos method for uncertainty propagation

XIONG Fenfen¹, CHEN Jiangtao², REN Chengkun¹, ZHANG Li¹, LI Zexian¹
1 School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China
2 China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China

Abstract: Uncertainty exists widely in engineering design. As one of the key components of engineering design, uncertainty propagation and quantification has always been an important research topic. Polynomial chaos (PC) is a highly efficient uncertainty propagation method which has been widely studied and applied. Therefore, this paper reviews recent advances in the PC method. First, the fundamentals of PC are introduced, including the construction of an orthogonal polynomial basis and the calculation of PC coefficients. Second, strategies such as basis truncation, sparse reconstruction, sparse grid and multi-fidelity modeling are described to address the "curse of dimensionality" issue of PC. Local and global sensitivity analyses based on PC are then introduced. Finally, the research prospects of PC are given.
Key words: uncertainty propagation; polynomial chaos; curse of dimensionality; multi-fidelity modeling; sensitivity analysis

0 引 言

复杂工程产品(例如飞行器、船舶、汽车等)高水平、高效率的开发设计对国民经济及国防事业的发展有着举足轻重的作用。为了缩短设计周

期、降低开发成本、满足产品不断提升的性能需求和更新换代需要, 20 世纪 60 年代中期以来, 有限元分析(FEA)和计算流体力学(CFD)等计算机仿真技术和优化方法被广泛应用于复杂系统的设计。模型确认、不确定性分析和优化设计是复杂

收稿日期: 2020-09-29 修回日期: 2021-01-28 网络首发时间: 2021-06-09 11:07
基金项目: 国家数值风洞项目 (NNW2020ZT7-B31); 国防基础科研科学挑战专题资助项目 (TZ2018001)
作者简介: 熊芬芬, 女, 1982 年生, 博士, 副教授。研究方向: 不确定性量化和优化设计。E-mail: fenfenx@bit.edu.cn
陈江涛, 男, 1983 年生, 博士, 副研究员。
任成坤, 男, 1994 年生, 博士生。研究方向: 不确定性量化和优化设计。E-mail: 3120170071@bit.edu.cn
张立, 男, 1997 年生, 硕士生。研究方向: 不确定性量化和深度学习。E-mail: 18811367828@163.com
李泽贤, 男, 1998 年生, 硕士生。研究方向: 不确定性量化和优化设计。E-mail: lzx_bit@163.com

*通信作者: 熊芬芬

工程产品基于仿真的开发设计中涉及的两大关键内容。前者主要在于保证仿真模型的高保真度,从而为可靠的产品性能分析和设计提供保障;后者旨在通过设计提高产品性能在各种不确定性下的可靠性和稳健性。对于二者而言,需要解决的首要问题皆为不确定性传播(uncertainty propagation, UP),这也一直是工程优化领域重要的理论课题之一。然而,随着工程系统设计的复杂化、多学科化,仿真分析模型计算规模和计算量增长,响应函数高维、强非线性,给不确定性传播带来“维数灾难”、精度低、可靠性差等诸多难题。

作为一种高效的概率不确定性传播和量化理论,混沌多项式(polynomial chaos, PC)方法^[1-2]由于其坚实的数学基础和良好性能,近些年在学术界和工业界受到广泛关注。混沌多项式方法实质上相当于将随机变量表示为一组正交多项式的加权和,构建一个随机代理模型,不确定性传播就直接在这个代理模型上进行。它能够对具有任意分布类型的随机变量实现较为精确的近似,且理论上当条件满足,即可获得指数收敛速度。而且,一旦混沌多项式模型构建完成,输出响应的统计矩、失效概率以及概率密度函数都能非常方便地得到。相比于传统的蒙特卡罗仿真(Monte Carlo simulation, MCS)方法,混沌多项式方法在保证精度的前提下,可大幅降低计算量;相比于传统的一阶^[3]、二阶^[4-5]可靠性分析方法,对非线性函数具有更高的不确定性传播精度,且无需函数的导数信息,应用起来更加灵活。目前,混沌多项式方法在机械^[6]、土木^[7-8]、材料^[9]、电力电子^[10-11]、汽车^[12]、航空航天^[13-19]、船舶^[20-23]、控制^[14,24-25]等领域都得到了广泛研究和应用,在航空航天和船舶领域应用尤为广泛。

由于构建混沌多项式模型的计算量随着不确定性输入维数的增加呈指数增长,高维下面临严重的“维数灾难”问题,这也是目前阻碍混沌多项式方法在工程问题中广泛应用的最大障碍之一。因此,如何解决或缓解混沌多项式的“维数灾难”难题,降低计算量,一直是学术界的研究热点。另一方面,混沌多项式方法基于概率理论,仅能处理随机不确定性,然而实际问题中存在大量由于知识或数据不足而导致的认知不确定性,例如在CFD建模中由于认知不够,湍流模型的建立存在模型不确定性和相关参数选取的不确定性。因此,如何充分利用混沌多项式的优势,将其扩展为能处理认知不确定性,是关注的另一热点。本文将首先给出不确定性传播的基本概念及其在模型确认和不确定性优化中的作用,然后系统地介

绍混沌多项式方法的构建原理及其各类变种,接着针对当前混沌多项式应用中面临的“维数灾难”、计算量大、无法直接处理认知不确定性等问题介绍相应的解决策略,最后对混沌多项式的研究进行展望。

1 基本概念

1.1 不确定性传播

不确定性传播也称不确定性分析,是研究各种不确定性对产品系统性能(泛指系统输出)的影响规律的方法。简而言之,不确定性传播就是在给定输入的不确定性信息下,如何估算输出响应的不确定性信息。不确定性主要分为两大类:随机不确定性和认知不确定性,前者无法控制或减少,主要基于概率理论进行研究,而后者主要由认知或数据不足导致,可以减少。目前有多种研究认知不确定性的方法,例如模糊^[26]、区间^[27]、证据^[28-29]理论等。由于概率方法发展成熟,具有坚实的数学基础,很多情况下结合贝叶斯定理也可以处理认知不确定性,因此目前概率方法应用最为广泛。本文介绍的混沌多项式方法建立在随机概率空间,主要用于处理随机不确定性。图1展示了概率不确定性传播的基本概念,从数学上具体描述为:在随机输入 $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_d]$ 存在不确定性的情况下(此时 $x_1, \dots, x_d$ 的不确定性可以用其概率密度函数、累积分布函数、或均值和方差描述),计算输出响应 y 的不确定性信息,包括均值、方差、失效概率、概率密度函数(PDF)等。

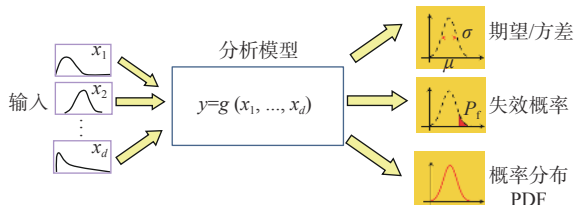


图1 概率不确定性传播示意图

Fig. 1 Probabilistic uncertainty propagation

1.2 模型确认

对于基于仿真的复杂产品性能分析和优化设计,要想保证精度,构建高可信度的仿真模型是关键。然而,由于物理过程的复杂性及人们的认知偏差,物理建模与数值模拟始终存在不确定性。以CFD计算为例,其存在几何模型、模型假设、模型参数(例如湍流模型封闭系数)、迭代方法等各类不确定性,从而严重影响数值模拟结果的可信度,使得决策需承担很大风险。以飞行器

结构有限元分析数值模拟为例, 传统的确定性有限元分析方法并未考虑有限元建模与试验测量中普遍存在的不确定性, 在实际应用中仅以变量的均值对问题进行分析与描述。或者以围绕均值附近的“安全系数”这类概念粗略估计问题的随机性, 基于工程师个人的工程经验得到“安全”或“不安全”这类结论。若以此作为飞行器结构设计的关键性决策依据, 显然是不尽合理的。若不确定性无法得到有效量化, 使用与真实结果存在较大差异的数值模拟进行设计, 极有可能导致真实系统达不到预期的性能要求, 引入潜在风险。

对于数值模拟模型的确认, 由于存在大量模型不确定性和参数不确定性, 所以必须首先分析不确定性对数值模拟结果的影响, 实现有效的不确定性传播, 对仿真结果进行不确定性量化, 评估其可信度, 进而进行模型修正或重选, 确保仿真结果的高可信度。事实上, 模型修正通常涉及不确定性传播的反问题求解, 不确定性传播也是其中的核心之一。不确定性量化分析在模型确认总体技术路线中占据重要地位, 该问题的研究是近年来国内外研究人员关注的热点。事实上, 美国机械工程师协会在其计算固体力学验证和确认(V&V)项目指南中, 已将不确定性量化分析列为模型确认中必不可少的关键研究内容^[30]。图 2 以 CFD 模型确认为例, 展示了不确定性传播在其中的作用, 在模型确认过程中要反复调用不确定性传播模块进行不确定性量化, 这也是其中最耗时的部分。实际上由于不确定性高维、数值模拟较为耗时, “维数灾难”是不确定性传播面临的最大难题, 因此提高其计算效率尤为重要。

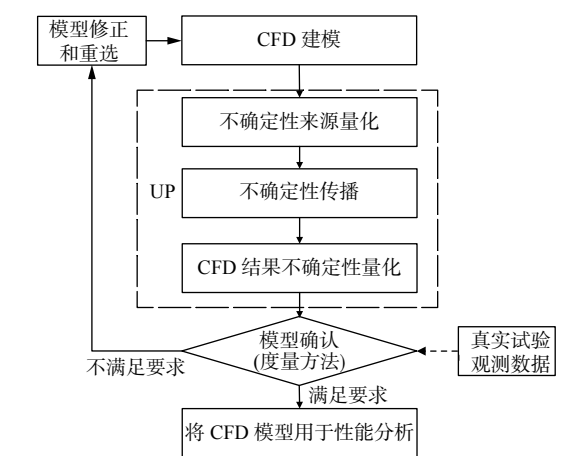


图 2 不确定性传播在模型确认中的作用
Fig. 2 UP in model validation

由于混沌多项式的高效性, 其在数值模拟模型确认中应用非常广泛, 尤其对于 CFD 数值模拟等通常较为耗时的问题, 混沌多项式方法能大幅

降低计算量, 因此其在 CFD 模型确认的不确定性量化中应用尤为广泛。Meldi 等^[31]将混沌多项式方法用于空间演化混合层流大涡模拟(LES)的不确定性量化, 并分析了不同模拟参数的敏感性。王瑞利等^[32]将非嵌入式混沌多项式方法应用于爆轰模型, 对平面爆轰问题和散心爆轰问题进行了不确定性分析; 赵辉等^[33]发展了非嵌入式混沌多项式方法, 研究了湍流模型系数的不确定性对 RAE2822 翼型跨声速绕流模拟的影响和材料物性参数的不确定性对烧蚀热响应预测的影响, 为工程中多变量不确定性量化问题提供了有效的解决方案; 刘全等^[34]将混沌多项式方法应用于拉式流体模型, 对 Sod 激波管问题进行了不确定度量化; Enderle 等^[35]将非嵌入式混沌多项式方法应用于湍流喷雾燃烧模拟, 通过对所用的雷诺平均 Navier-Stokes 模型进行不确定性分析实现了对变量降维, 进而实现了模型优化。Schaefer 等^[36-37]将混沌多项式方法用于跨声速壁面束缚流湍流模型封闭系数的不确定性量化和敏感度分析, 提出了一种基于混沌多项式方法的用于工业级规模气动分析的不确定性量化框架, 考虑了湍流模型封闭系数、来流工况、网格收敛误差等不确定性。

1.3 不确定性优化设计

确定性条件下的优化技术已经成功运用到诸多工程设计问题中, 但是设计条件的变化, 例如载荷、材料特性和操作环境的变化, 往往使得工程系统存在很大的不确定性。以往由于数学处理和计算速度等方面的原因, 通常将这些不确定性作为确定量处理, 导致产品的设计性能对这些不确定性因素非常敏感, 稳健性低, 或在不确定性下产品性能无法满足约束, 设计失效, 极有可能导致灾难性的后果。因此, 产生了不确定性下的优化设计。根据设计理念的不同, 可将其分为稳健优化设计(robust design optimization, RDO)^[38-39](见 图 3)和基于可靠性的优化设计(reliability-based design optimization, RBDO)^[40-41](见 图 4), 也有将二者结合的, 这就是所谓的稳健可靠性优化。通过在设计过程中考虑设计变量、设计参数、设计决策和系统分析模型等不确定性因素的影响, 来降低不确定性对系统性能的影响。如图 3 所示, 稳健优化所得最优解, 虽然相对确定性优化损失了一定的产品性能, 但是却对不确定性的敏感程度更低, 具有更强的稳健性。如图 4 所示, 基于可靠性的优化所得最优解离约束边界相对较远, 虽然一定程度上可能会导致设计的保守, 但是能保证设计始终落在可行性区域内, 系

统是安全的;而确定性最优解由于设计变量或参数存在不确定性,最优解很大可能违反约束。

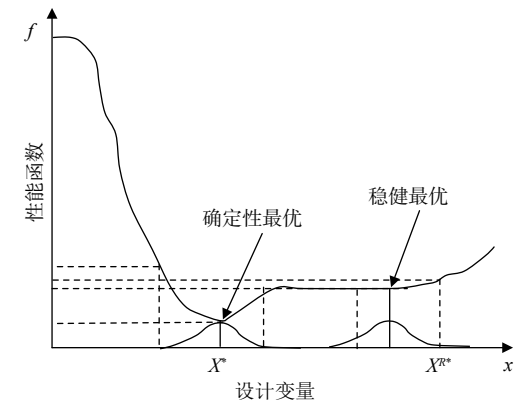


图 3 确定性最优和稳健性最优
Fig. 3 Deterministic and robust optimums

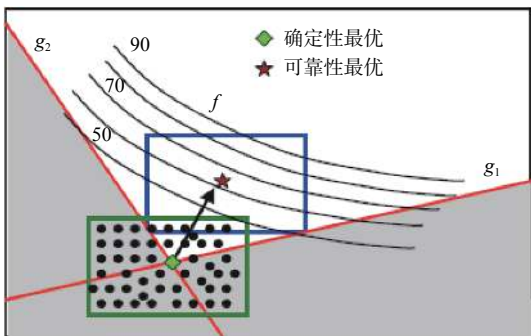


图 4 确定性最优和可靠性最优
Fig. 4 Deterministic and reliability-based optimums

图 5 展示了不确定性优化的流程图。由图可知,不确定性传播是其中必不可少的模块,用于计算目标和约束函数的均值、标准差或失效概率。不确定性传播的精度和效率几乎决定了整个优化的精度和效率^[42]。如上所述,对于复杂工程系统设计,仿真分析模型通常较为耗时、非线性程度高且高维,因此计算量大是其不确定性传播面临的主要难题。

由于混沌多项式的高效性,其在不确定性优化设计中也得到了大量应用。蔡宇桐等^[19]针对压气机叶片制造中的加工误差,应用非嵌入式混沌多项式进行不确定性量化,得到了增强叶片气动性能稳健性的优化方向;胡晚亭等^[8]将混沌多项式方法应用于 Winkler 地基沉降计算,得到参数变化对地基沉降可靠性的影响,进而明确了设计方向;李冬琴等^[22]利用混沌多项式法分析多维随机不确定性因素对船舶优化方案的影响,完成了船舶多学科稳健设计优化研究,有效减少和避免了船舶设计优化方案失效的可能性。Lie 等^[43]将混沌多项式方法与禁忌搜索算法结合起来对天线阵列反问题进行稳健优化,相较于拉丁超立方抽样方法极大提高了计算效率并且保证了稳健性能

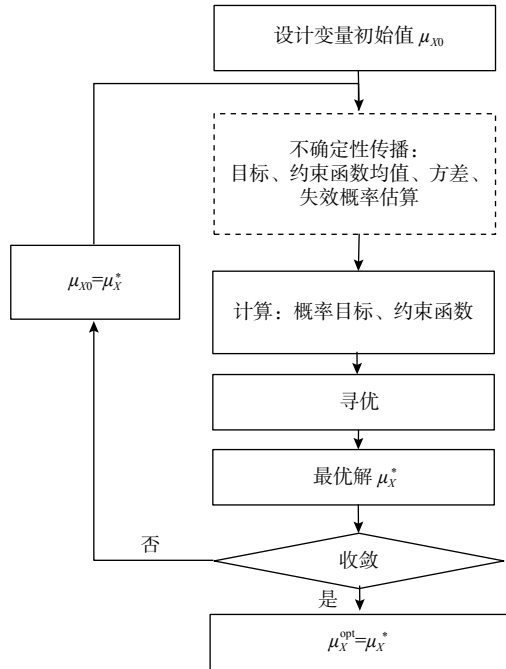


图 5 不确定性传播在不确定性优化中的地位
Fig. 5 UP in design optimization under uncertainty

的计算精度;Mandur 等^[44]在模型参数不确定性传播的稳健优化问题中使用混沌多项式方法,展现出了比蒙特卡罗法更强大的计算精度和计算效率优势;Huang 等^[45]针对探测器火星大气进入的轨迹稳健优化问题,采用混沌多项式方法获得认知不确定条件下轨迹性能的近似解析函数,建立了一个双环嵌套的稳健优化模型。

2 混沌多项式理论基础

混沌多项式方法分为嵌入式(intrusive)和非嵌入式(non-intrusive)^[46]。嵌入式混沌多项式方法主要应用于动力学系统的不确定性传播,其主要思想是将不确定性源进行混沌多项式模型表达,然后将其代入到动力学微分方程,利用 Galerkin 投影,将随机微分方程转换为一组更高维的以混沌多项式模型系数为状态量的确定性微分方程组,通过求解该微分方程组得到混沌多项式系数,从而完成不确定性传播^[47]。由于嵌入式混沌多项式方法需要进入系统方程内部,对方程进行扩维修改,不可避免地会引入数值误差。另一方面,当前的系统分析模型通常都经过了反复标定验证和确认,对其进行模型内部调整可能性非常小。此外,随着仿真软件的大量应用,复杂工程产品设计分析基本都涉及黑箱型响应函数。因此,嵌入式混沌多项式方法应用非常有限,非嵌入式混沌多项式方法将响应函数看作一个黑箱,仅关注输入和输出的映射关系,构建输出响应的混沌多项式代理模型,从而实现不确定性传播。

由于简单易于操作, 相比嵌入式混沌多项式, 其研究应用更加广泛。本文主要介绍非嵌入式混沌多项式方法。

2.1 基本原理

以响应函数 $y=g(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_i, \dots, x_d]$) 为例, 混沌多项式理论下输出响应表示为 p 阶截断的混沌多项式模型。

$$Y \approx \sum_{i=0}^P b_i \Phi_i(\xi) \quad (1)$$

式中: b_i 为待求的混沌多项式系数; Φ_i 为正交多项式; 正交多项式的总项数为 $P+1=(d+p)!/d!p!$; $\xi=[\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_d]$, 为标准随机向量, 其中 ξ_i 与原随机变量 x_i 存在一定的转换关系, 具体与 x_i 和 ξ_i 的分布形式有关。

一旦混沌多项式系数 b_i 求出, 就可直接在混沌多项式模型上运行 MCS, 得到输出响应 y 的随机概率特性, 包括均值 μ_y 、方差 σ_y 、概率分布等。在式 (1) 的基础上, 也可得到低阶统计矩关于混沌多项式系数的如下解析表达:

$$\mu_y = E[y] = \sum_{i=0}^P b_i E[\Phi_i] = b_0 \quad (2)$$

$$\sigma_y^2 = E[y^2] - E[y]^2 = E\left[\left(\sum_{i=0}^P b_i \Phi_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^P b_i^2 E[\Phi_i^2] \quad (3)$$

式中, E 表示求期望, 是一个运算符。

对于混沌多项式方法, 主要涉及两方面内容: 正交多项式 Φ_i 的构建和混沌多项式系数 b_i 的求取, 其中后者涉及响应函数的调用, 是计算量消耗的主要来源。

2.2 正交多项式构建

混沌多项式方法最早由 Wiener^[48] 提出, 以埃尔米特(Hermite)正交多项式作为基函数, 被称为 Wiener 混沌多项式。根据 Cameron-Martin 理论, 它对正态分布型输入具有指数收敛速度, 但是对于其它的分布类型, 则收敛速度明显降低。这是因为 Hermite 正交多项式的权函数刚好与正态分布的概率密度函数具有相同形式。利用上述特点, Xiu 等^[2] 根据 Askey 方案中各随机分布类型概率密度函数与正交多项式权函数一一对应的关系, 针对不同随机输入类型, 采用相应类型的一元正交多项式作为基函数, 对其进行直接张量积操作(tensor product)得到由多元正交多项式 $\Phi_i(\xi)$ ($i=0, 1, \dots, P$) 构建的混沌多项式模型, 将混沌多

项式理论扩展到了广义混沌多项式(general PC, gPC)方法, 使其对 Askey 方案中所包含的正态、均匀、指数、贝塔(Beta)、伽马(Gamma)等多种随机分布类型均具有指数收敛速度。当输入变量不满足 Askey 方案中所列的 5 种分布时, 则通常将其首先转换为标准正态分布, 然后选取 Hermite 正交多项式作为基函数。gPC 方法极大地拓展了混沌多项式理论的应用范围, 使其迅速被大量应用。

对于一般的常见分布类型, gPC 方法能够得到较好的不确定性传播结果。但是在实际工程应用中, 存在诸多不属于甚至与 Askey 方案相差较远的分布类型, 例如质量、扩散系数、刚度系数等物理参数均服从对数正态分布。此时, 通常需要利用不确定性变换将其转化为 Askey 方案中的分布类型, 即: 将原随机变量 x_i ($i=1, \dots, d$) 转换为 Askey 方案中所示的某类标准随机变量 ξ_i , 而变换自然会引入一定的误差, 降低不确定性分析的精度。针对随机分布类型的复杂性和多样性特点, 不少研究提出针对任意的随机分布类型, 自行构建正交多项式。Witteveen 等^[49] 提出了基于 Gram-Schmidt 正交分解的混沌多项式方法; Zhang 等^[50] 和 Xu 等^[51] 提出了基于斯蒂尔吉斯(Stieltjes)过程的混沌多项式方法。这些研究分别利用 Gram-Schmidt 正交分解和 Stieltjes 过程, 构建相对于各维随机输入分布的最优一元正交多项式基函数。在此基础上, 类似于 gPC 通过张量积操作, 构建 p 阶截断的多元正交多项式 $\Phi_i(\mathbf{x})$ ($i=0, 1, \dots, P$)。相比于 gPC, 这些混沌多项式方法适用范围更加广泛, 可应对任意随机输入分布类型, 无需利用变换, 提高了收敛速度。

上述所有混沌多项式方法都建立在已知随机输入完整的概率分布函数基础之上, 而在实际工程应用中随机参数的信息可能以各种形式存在, 如离散的原始数据样本, 尤其对于复杂系统, 往往由于价格高昂、耗时太长等, 难以得到其完整的概率密度函数。此时, 上述基于各维随机输入完整概率分布函数的混沌多项式方法不再适用。为此, Oladyshkin 等^[52] 提出了一种数据驱动混沌多项式(data-driven PC)方法, 该方法可应对各种类型的随机分布以及离散的原始数据(无需概率分布函数), 并具有良好的收敛性和精度。Wang 等^[53] 在此基础上进一步将投影法(Galerkin projection)引入到数据驱动混沌多项式中计算混沌多项式系数, 提出了相应的高斯节点和权值的计算方法, 进一步提高了其灵活性。数据驱动混沌多项式方法的主要思想为, 根据各维随机输入变量的离散

数据或概率分布函数,计算其统计矩,利用正交多项式的正交性,推导矩匹配(moment-matching)方程,进而通过匹配随机输入变量一定阶次的统计矩,完成最优一元正交多项式的构建。需要注意的是,当离散数据不足时,一元正交多项式的构建会引入一定的误差。

考虑到在实际工程应用中,常有随机输入变量相关的情况。例如,结构中的材料属性与疲劳属性^[54]、飞行器气动噪声与外表面分布的随机载荷^[55]等。针对上述问题,多数研究学者采用变换方法,如正交变换^[56]、Rosenblatt变换^[57]和 Nataf变换^[58]等,将相关随机输入变量转换为相互独立的标准正态随机变量。但是这些变换方法均属于非线性变换,会导致变换后的响应函数呈现强非线性特征,特别是当相关随机输入变量服从复杂的非正态概率分布或响应函数非线性较强时,在不确定性分析中会引入非常大的计算误差。此外,这些转换方法均要依赖随机变量完整的分布函数,当相关随机输入变量以离散数据形式存在时,上述变换方法显然均不再适用。为此,在数据驱动混沌多项式方法基础上,Lin等^[59]提出了一种能够直接处理输入变量相关性的混沌多项式方法,其能避免变换带来的误差,且能应对离散数据形式的相关输入,扩展了混沌多项式方法的适用范围。Paulson等^[60]针对嵌入式混沌多项式方法,利用Gram-Schmidt正交变换,提出了一种考虑输入变量相关性的方法。随后,Wang等^[61]将该方法应用到了随机潮流。这类考虑相关性的数据驱动混沌多项式方法依然采用矩匹配方法建立一元正交多项式基,只不过在求解矩匹配方程的时候引入了相关随机输入变量混合矩的概念,进而考虑变量的相关性。

这类自行构建正交多项式的方法显然提高了混沌多项式方法的适用范围,具有更加广阔的应用前景,但是构建正交多项式基的过程难免引入近似或数值等误差。尤其是针对随机变量为复杂分布(如双峰或多峰),数据驱动混沌多项式方法可能需要匹配很高阶次的统计矩,矩匹配方程的求解极易出现奇异,导致正交多项式基的构建精度难以保证。gPC方法由于实现方便,稳健性相对更高,且理论上增加混沌多项式阶次到一定程度即可应对任意形式的输入分布,因此,目前依然是应用最为广泛的混沌多项式方法。

2.3 阶次确定

混沌多项式模型的构建首先必须给定混沌多项式模型的阶数。事实上,混沌多项式模型阶数

p 对不确定性传播的计算量和精度具有重要影响。常用的做法是进行阶数的收敛性测试,先从较低混沌多项式模型阶次出发进行不确定性传播,增加阶次继续进行不确定性传播,同时考虑先前样本的重复利用,直到相邻两次的结果(如输出响应 y 的均值和方差)变化不大,则认为当前混沌多项式阶数满足要求。但是对于某些特殊问题,非线性程度高,分布函数甚至呈现非规则双峰的情况,则需要高达 $p=15$ 的阶数才能获得满意的精度^[62]。对于工程不确定性分析,往往涉及非线性黑箱型响应函数,对于混沌多项式模型阶次的确定并非易事。Hu和Youn^[63]利用留一法(leave-one-out, Loo)评估混沌多项式的精度,构建混沌多项式阶次的循环,不断增加混沌多项式阶次,直至满足精度要求为止,从而决定最终的混沌多项式阶数。目前这方面的研究并不多,主要原因是对于一般的实际工程系统,通常系统输出响应主要受各维输入变量以及其低阶交叉项的影响,高阶交叉项的影响较小^[64],因此,混沌多项式模型阶数 $p=2$ 或3就能满足工程实际需求,出现高阶混沌多项式模型的情况较少。

2.4 系数求取

混沌多项式系数求取是混沌多项式进行不确定性传播的关键,目前主要有投影法和回归法两类方法。

2.4.1 投影法

利用 Galerkin 投影方法,将式(1)两边同时依次投影到各正交多项式 $\Phi_j(\xi)$ 上,得

$$\langle y, \Phi_j(\xi) \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^P b_i \Phi_i(\xi) \Phi_j(\xi) \right\rangle, j = 0, 1, \dots, P \quad (4)$$

根据内积的定义,并利用正交多项式的正交性,整理式(4),得

$$b_i = E[y \Phi_i(\xi)] / E[\Phi_i(\xi) \Phi_i(\xi)], i = 0, 1, \dots, P \quad (5)$$

则各混沌多项式系数可通过上式依次得到。式(5)中的分母 $E[\Phi_i(\xi) \Phi_i(\xi)]$ 是对正交多项式求期望,由于这些正交多项式是关于各标准随机变量 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_d]$ 的函数,其形式均已知,可以快速而方便地计算分母的值。因此,计算量主要来自分子 $E[y \Phi_i(\xi)]$ 的计算,需要调用一定次数的输出响应函数 $y(\mathbf{x})$,可通过数值方法或者抽样法求解。较为常用的求解方法有全因子数值积分(full factorial numerical integration, FFNI)和稀疏网格数值积分(sparse grid numerical integration, SGNI)^[65-66]。二者皆从一维节点出发,分别利用直接张量积和

特殊张量积操作获得多维积分节点。当维数较高时, FFNI 所需积分节点的个数由于随着维数增加呈指数增长, 存在“维数灾难”, 此时通常利用 SGNI 取代 FFNI。

2.4.2 回归法

基于线性回归方法求解混沌多项式系数也称随机响应面方法 (stochastic response surface method, SRSM), 它是美国新泽西州立大学的 Isukapalli 博士提出来的^[67-68]。将样本 $\xi^S = [\xi_1^S, \dots, \xi_j^S, \dots, \xi_N^S]^T$ 和相应的函数响应值 $Y = [g(x_1^S), \dots, g(x_N^S)]^T$ 分别代入到混沌多项式模型 (式 (1)) 的右端和左端, 得

$$\begin{bmatrix} \Phi_0(\xi_1^S) & \Phi_1(\xi_1^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_1^S) \\ \Phi_0(\xi_2^S) & \Phi_1(\xi_2^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_2^S) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_0(\xi_N^S) & \Phi_1(\xi_N^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_N^S) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1^S) \\ g(x_2^S) \\ \vdots \\ g(x_N^S) \end{bmatrix} \quad (6)$$

简化上式, 写为

$$\psi b = Y \quad (7)$$

其中,

$$\psi = \begin{bmatrix} \Phi_0(\xi_1^S) & \Phi_1(\xi_1^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_1^S) \\ \Phi_0(\xi_2^S) & \Phi_1(\xi_2^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_2^S) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_0(\xi_N^S) & \Phi_1(\xi_N^S) & \cdots & \Phi_p(\xi_N^S) \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} g(x_1^S) \\ g(x_2^S) \\ \vdots \\ g(x_N^S) \end{bmatrix}$$

根据最小二次回归方法, 可求得混沌多项式系数:

$$b = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T Y \quad (8)$$

Xiong 等^[62]在上述 SRSM 基础上, 进一步提出了加权随机响应面方法 (Weighted SRSM), 通过引入样本权值的概率, 考虑其在概率空间的分布特性, 在相同样本的情况下, 提高了不确定性传播的精度。与确定性下的响应面相似, 回归中样本的性能很大程度上决定了响应面的好坏, 因此决定了 SRSM 不确定性传播的精度。关于抽样方法, Hosder 等^[69]从精度和收敛性方面, 对随机抽样、拉丁超立方设计 (Latin hypercube design, LHD) 和 Hemmasy 抽样方法进行了综合的分析比较, 并推荐用两倍于未知混沌多项式系数个数的样本 (即 $N=2(P+1)$) 可以得到比较满意的结果。Isukapalli^[67]提出在 Wiener 混沌多项式方法中运用 Hermite 积分节点, 也就是 Hermite 正交多项式的根, 作为回归样本来求解系数。在该方法的基础上, 可从 Askey 方案中所列正交多项式出发, 分

别求解 $p+1$ 阶正交多项式的根, 对这些根 (一维空间) 进行直接张量积操作, 得到多维空间的全因子设计样本, 然后在这些样本点上进行最小二次回归, 得到混沌多项式系数。这种抽样策略使得样本点大多数集中在概率空间中的高频率区域, 类似于重要性抽样的原理, 因此提高了混沌多项式系数的估算精度。由于这种抽样方法对一维样本采用直接张量积, 得到的多维样本的组合数为 $(p+1)^d$, 呈指数增长。出于计算量的考虑, 目前仍局限于启发式地选取其中部分样本进行回归, 通常选取概率空间出现频率较大的样本点。也有研究提出利用单项求容积法则 (monomial cubature rules, MCR) 来产生回归样本, 构建混沌多项式模型, 这就是所谓的 PC-MCR 方法。该方法运用 MCR 产生样本点, 由于样本点数目少, 可以全部用来估算混沌多项式系数, 不仅保证了不确定性传播的精度, 而且与前面提到的高斯积分点方法相比大大减少了所需的样本数。

回归法中由于涉及矩阵求逆等运算, 针对高维问题可能会较为繁琐耗时, 因此回归法通常适用于低维问题。随机抽样、拉丁超立方设计、高斯积分点、MCR 抽样方法在混沌多项式系数计算方面具有相似的精度, MCR 方法虽然计算效率方面最为可观, 但由于在目前的科学计算软件中并未见到成熟算法, 而且可选取的样本形式有多种, 具体选何种较为主观, 因此其应用相对较少。

3 缓解“维数灾难”的方法

混沌多项式方法具有较高的精度和效率, 但是其计算量通常随着随机输入的维数呈指数增长, 高维下存在“维数灾难”问题, 这也是目前混沌多项式在实际应用中面临的最大难题。关于该问题, 目前产生了诸多方法去缓解“维数灾难”。

3.1 多项式基截断

为了解决维数灾难, 最常用的方法是减少全阶混沌多项式模型中的正交多项式项数。其中, 双曲线截断 (hyperbolic truncation) 策略^[70]是最常用的一种, 其主要思想为: 一般的实际工程系统的输出响应主要受各维输入变量以及其低阶交叉项的影响, 受高阶交叉项的影响较小^[64], 从而可以直接去除某些多项式项, 达到降低计算量的目的。

传统的全阶混沌多项式模型从一元正交多项式基出发, 利用直接张量积构建多元正交多项式, 当混沌多项式模型阶数为 p 时, 需要满足

$$|a| \equiv \|a\|_1 \equiv a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_d \leq p \quad (9)$$

式中: a_i 为多元正交多项式 Φ_i 中第 i 维变量对应的一元正交多项式的阶数; p 为混沌多项式模型的阶数, 也就是式 (1) 中的正交多项式 $\Phi_i (i = 0, 1, \cdots, P)$ 的最高阶次。

在直接张量积下, 式 (1) 中正交多项式的总项数为 $P+1 = (d+p)!/d!p!$, 可见总项数随着 d 的增加呈指数增长。为了降低计算量, 考虑以下双曲线截断策略, 去除部分高阶交叉多项式项, 以达到减少混沌多项式系数个数、降低计算量的目的。

$$I_q^{d,p} = \left\{ \boldsymbol{a} \in N^d : \|\boldsymbol{a}\|_q = \left(\sum_{i=1}^d a_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq p \right\} \quad (10)$$

式中: q 为自定义稀疏因子; I 为满足不等式的 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d)$ 的集合。

以 $p = \{3, 4, 5, 6\}$ 和 $q = \{1, 0.75, 0.5\}$ 为例, 在二维空间中上述截断方法产生的阶数组合如图 6 所示, 图中蓝色的圆圈表示满足式 (10) 中不等式要求的 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d)$ 的集合。显然, 通过引入双曲线截断策略, 确实去除了一部分高阶交叉项, 对降低计算量具有重要作用。而且, 相同的阶数 p 下, q 越小, 去除的高阶交叉项越多, 计算量降低越明显。当 $q=1$ (图 6 中第一行) 时, 式 (10) 退化为常规的全阶混沌多项式方法。

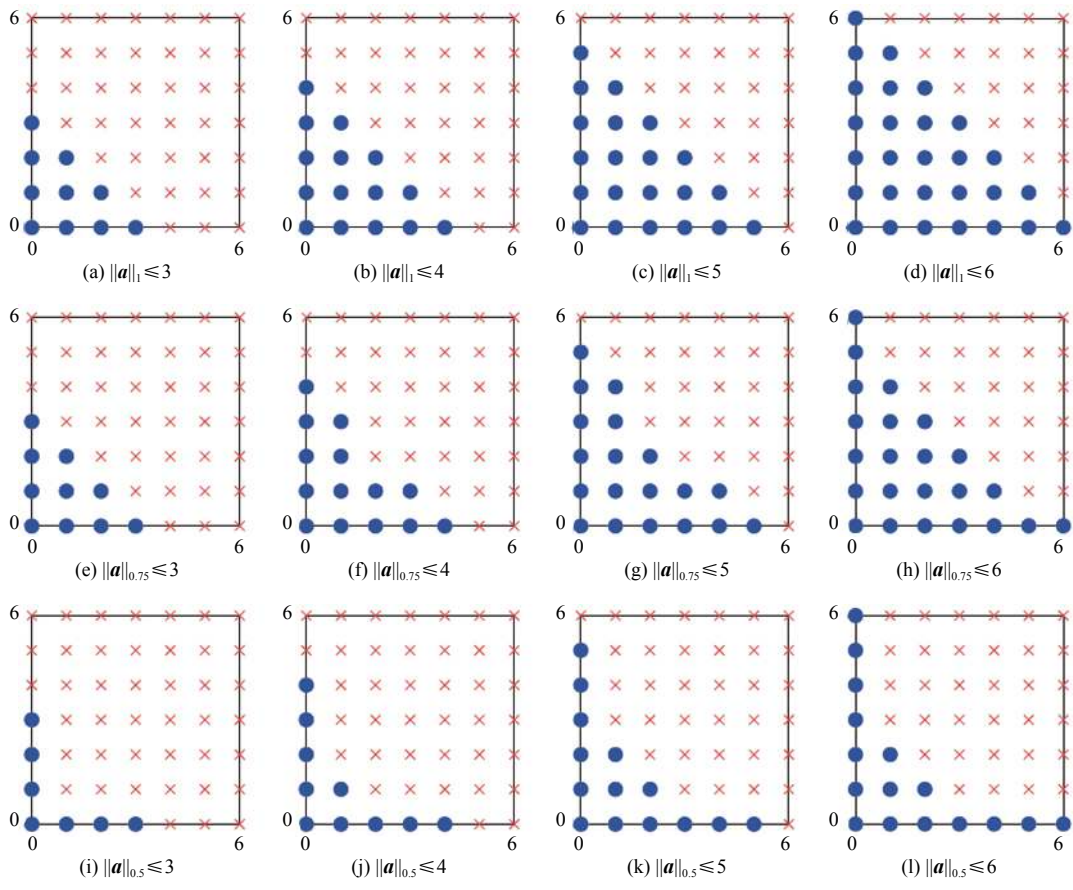


图 6 不同稀疏因子下一元正交多项式的阶数组合

Fig. 6 Order combinations of orthogonal polynomial with different sparse factors

除了这类直接去除高阶交叉项多项式项的截断策略, Hampton 和 Doostan^[71] 提出了各向异性多项式阶数 (anisotropic polynomial order) 的概念, 在构建混沌多项式模型的过程中, 认为 Φ_i 中对应于各维变量的一元多项式的最高阶次并非相同, 通过引入误差指数, 自适应地搜寻最优的各维正交多项式阶数 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d)$, 使之满足

$$\sum_{i=1}^d \frac{a_i}{p_i} \leq 1 \quad (11)$$

可见, 当 $p_i = p (i = 1, \cdots, d)$ 时, 该方法退化为

全阶混沌多项式模型。实际中, 输出响应关于各维随机变量的非线性是不同的, 因此上述考虑各向异性的多项式阶数确定方法能够在计算量一定的情况下, 将更多资源配置于非线性较强的维度上, 从而提高精度。

多项式基截断策略能够在一定程度上降低计算量, 但是在进行截断的时候稀疏因子的选取较为主观。如果选取的值过小, 虽然可以很大程度降低计算量, 但是由于截除了过多的高阶交叉项, 精度的损失较为严重。因此, 该方法适合于高阶交叉项影响较小的问题。

3.2 稀疏重构

稀疏重构的主要思想是在全阶混沌多项式模型的基础上, 通过去除对输出响应影响不大的正交多项式项 Φ_i ($i = 0, 1, \dots, P$), 减少混沌多项式系数的个数, 从而降低计算量, 是当前应对混沌多项式“维数灾难”难题最有效的途径之一。稀疏重构下构建的稀疏混沌多项式模型可表示为

$$Y \approx \sum_{i=0}^{P_1} b_i \Phi_i(\xi) \quad (12)$$

其中, 混沌多项式系数的个数为 $P_1 + 1$, 显然 $P_1 + 1 \ll P + 1$ 。

对于稀疏混沌多项式方法, 关键在于如何去发掘非重要的正交多项式项。Blatman 和 Sudret^[72]提出了一种自适应算法来自动检测重要的正交多项式项, 认为那些能够最大程度降低预测误差的正交多项式项为重要的项并予以保留, 从而减少混沌多项式系数的个数。随后, 他们又提出利用最小角回归 (least angle regression, LAR) 方法去发掘非重要的正交多项式项, 进而将其从全阶混沌多项式模型中去除, 以降低计算混沌多项式系数的计算量^[73]。王丰刚^[74]对基于 LAR 的稀疏混沌多项式方法展开了研究, 通过诸多算例测试发现, 随着维数和混沌多项式阶数的增长, 全阶混沌多项式所需的样本数量明显增加, 导致混沌多项式求解系数的回归矩阵出现“病态”, 难以求解, 然而稀疏混沌多项式则几乎不受此影响, 同时还能保持较高的计算精度。Hu 和 Youn^[63]针对工程可靠性分析和设计, 提出在全阶混沌多项式模型的正交多项式集合中, 通过引入误差指数, 自适应地筛选误差指数最大的双变元正交多项式项来构建稀疏混沌多项式模型。陈光宋等^[75]采用最小绝对收缩和选择算子 (LASSO) 回归自动选择混沌多项式的重要项及其展开系数, 进一步由混沌多项式系数解析获得全局灵敏度系数。Cheng 等^[76]提出了一种可观测响应保持同伦下的自同态调制 (D-MORPH) 算法, 用于构建稀疏混沌多项式模型。Diaz 等^[77]、Tsilifis 等^[78]和陈江涛等^[79]分别研究了利用压缩感知 (compressed sensing) 方法构建稀疏混沌多项式模型, 压缩感知方法是图像和信号处理领域兴起的新方法, 能够高效地重构稀疏信号, 需要的采样点数目小于自由度的个数。若混沌多项式展开是稀疏的, 可通过求解以下优化问题得到:

$$\hat{b} = \arg \min \|b\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \psi b = Y \quad (13)$$

式中, 0 范数表示 b 中非零元素的个数, 式中所涉

及的变量符号参见式 (7)。考虑到式 (13) 为 NP-hard 问题, 求解很难, 且实际应用中考虑到测量噪声的情况, 不要求 $\psi b = Y$ 精确满足, 则式 (13) 一般变为

$$\hat{b} = \arg \min \|b\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\psi b - Y\|_2 \leq \varepsilon \quad (14)$$

在求解过程中, 需要指定截断误差 ε 。除了以上通过发掘全阶混沌多项式模型中非重要的正交多项式来构建稀疏混沌多项式的方法, 也有研究将混沌多项式表示为高维模型表达 (high dimensional model representation, HDMR) 的架构, 认为各变量单独作用和双变量共同作用的 HDMR 函数就已经可以较为精确地描述系统的输出, 忽略交叉高阶项, 从而构建所谓的稀疏混沌多项式模型, 以达到降低混沌多项式模型中正交多项式项数的目的^[80]。

LAR、压缩感知等稀疏重构方法在构建稀疏模型的过程中, 需要通过迭代发掘重要的正交多项式项, 尤其对于非线性较强且维数较高 ($d > 10$) 的问题, 收敛过程可能非常慢, 且收敛过程受所选取的样本点和问题的非线性程度影响非常大。

3.3 稀疏网格数值积分

3.1 和 3.2 节旨在通过减小全阶混沌多项式模型中正交多项式的项数来降低计算量。稀疏网格数值积分则通过在投影法计算混沌多项式系数中采取 Smoyak 算法, 生成积分节点, 相对于全因子节点大为减小积分节点的个数, 从而缓解“维数灾难”难题。关于这方面的研究目前非常多。Winokur^[81]针对混沌多项式研究了一种自适应稀疏网格数值积分方法, 大大降低了计算量, 并将其成功应用于 2004 年 9 月伊万颶风穿过墨西哥湾时的海洋环流模型中。Wu 等^[82]将稀疏网格数值积分用于混沌多项式, 求解了不确定性下的翼型气动优化。Xiong 等^[83]将基于稀疏网格数值积分的混沌多项式方法应用于火箭弹稳健优化。稀疏网格数值积分确实能在一定程度上降低中、低维 ($d < 10$) 不确定性传播问题的混沌多项式系数的计算量, 根据维数可以预估函数调用次数, 而且具有较强的稳健性, 是当前缓解维数灾难较为可靠的方法, 但对于高维问题其应对能力非常有限, 计算量依然非常大。

4 多可信度混沌多项式

在基于仿真的工程设计中, 分析模型 (例如 CFD 和 FEA) 往往具有高度非线性、计算耗时的特点。采用混沌多项式方法直接基于高精度仿真模

型进行不确定性传播,也同样面临计算量大的问题。对于工程系统设计,由于学科分工愈来愈细,分析方法和仿真建模手段逐渐多元化。随着设计进程的推进,往往伴随有多种不同精度和计算量的分析模型产生。例如,某小型飞机涉及多个固定翼和螺旋桨的气动耦合分析,可利用多种多可信度气动仿真工具实现,包括简单低阶模型(二维涡模型和叶素理论螺旋桨模型)、中精度模型(涡格法和 Euler CFD,其中螺旋桨模型均采用激励盘)、高精度模型(基于雷诺平均 Navier-Stokes 方程的 CFD)。此外,还有地面试验数据和飞行试验数据。通常认为模型的精度越高,耗费代价越大,其可生成的样本数量也越少。为降低计算量,充分利用多个分析模型,产生了多可信度建模(multi-fidelity modeling)的思想,也称多模型融合(model fusion),在大量廉价的低精度样本基础上,利用少量高精度样本点为导引或修正,通过融合不同精度和计算量的样本数据,建立多可信度代理模型(multi-fidelity metamodel),能够在保证代理模型精度的同时,尽可能地降低计算量。在该方面具有代表性的研究有 Kennedy 与 O'Hagan 提出的基于高斯随机过程及上述差值(或比值)模型的多层级 co-kriging 方法^[84]等。

由于多可信度建模理论在降低计算量方面效果显著,有学者基于混沌多项式方法开展了多可信度不确定性传播的研究,通过以少量高精度样本为引导,融合大量低精度样本数据并建立不同精度模型之间的修正混沌多项式模型,来提高低精度混沌多项式模型的可信度,从而达到降低计算量的目的。Ng 和 Eldred^[85]提出了基于混沌多项式和稀疏网格数值积分的多可信度不确定性传播方法;Palar 等^[86]提出了基于最小二次回归的多可信度混沌多项式方法。上述多可信度混沌多项式方法采用加法修正的多可信度建模策略,即在低精度混沌多项式模型上进行加法项混沌多项式修正,虽有效解决了特定的问题,但依然存在不足。例如:Ng 和 Eldred 提出的方法需要采集稀疏网格数值积分点处的样本,其数量和位置都不是任意的;Matteo^[87]提出的方法因利用线性回归法计算混沌多项式系数,虽然在采样策略上相对灵活,但需要高/低精度样本点嵌套。为此,Berchier 提出用低精度混沌多项式模型来预测非嵌套样本点处的响应值,但这必然会引入一定的预测误差,降低了多可信度混沌多项式模型的精度。Yan 和 Zhou^[88]针对贝叶斯推理反问题,提出了一种基于自适应抽样的加法修正多可信度混沌多项式方法。Cheng 等^[89]提出了一种基于高斯过程回

归的多层级多可信度稀疏混沌多项式方法。Wang 等^[90]基于高斯随机过程,将多层级 co-kriging 方法从确定性多可信度建模领域扩展到不确定性量化,构建了一种多可信度混沌多项式方法,研究表明,相较于常用的基于加法修正的多可信度混沌多项式方法精度大幅提高,且该方法能够应对模型的精度水平为非层次型的情况。除了以上两类基于加/乘法修正和高斯随机过程的多可信度混沌多项式方法,还有研究提出利用输出空间映射(output space mapping)技术实现多可信度混沌多项式模型构建^[16],其主要思想为建立低精度混沌多项式模型到高精度混沌多项式模型的映射关系,映射关系最常见的为线性映射。

由于多可信度建模在降低计算量方面具有巨大潜能,而且切合目前产品设计过程中存在多种类型分析模型或数据的现状,多可信度混沌多项式研究较为活跃。目前,基于加法修正的多可信度混沌多项式方法由于形式和实施简单,应用最多。基于高斯随机过程的多可信度混沌多项式方法精度和灵活性高,但由于利用高斯随机过程,建模中参数估计存在计算繁琐和稳健性不足的缺点,这也是目前基于高斯随机过程的建模方法存在的共性问题。整体而言,多可信度混沌多项式方法在降低计算量方面具有巨大潜力,但是与确定性领域的多可信度建模方法相似,需要多可信度分析模型预测趋势一致,存在泛化能力不足的问题,而且如何配置各个多可信度分析模型的样本个数以保证不确定性传播的精度,目前也缺乏科学系统的方法。

5 灵敏度分析

5.1 局部方法

稳健优化在工程设计得到广泛应用,混沌多项式由于精度高被大量用于稳健优化。基于梯度的寻优算法由于效率高在稳健优化中应用很多,而在基于梯度寻优的稳健优化中,需要计算目标和约束函数相对于设计变量的局部敏感度信息,也称设计灵敏度(design sensitivity)。此外,该设计灵敏度还能设计决策者提供参考,从而在实际中对产品质量波动进行管控。常规的做法是直接利用差分法计算这些设计灵敏度,但这必然会消耗一定的计算量,尤其当设计变量高维时,计算量较大。

混沌多项式用于局部灵敏度分析的研究不多。Ren 等^[91]针对基于数值积分计算混沌多项式

系数的稳健优化, 推导了设计灵敏度, 无需调用任何额外的响应函数。该方法被用于基于混沌多项式的翼型气动稳健优化, 相比于直接依赖差分法的稳健优化, 可降低高达 30% 的计算量。考虑到系数的求取基于 Galerkin 投影和高斯数值积分, 见式 (5), 其中分子的期望值 $E[y \Phi_i(\xi)]$ 计算都将表示为高斯节点上的函数响应值的加权和, 最终设计灵敏度的计算归结到期望值关于节点的偏导 $\partial E[y \Phi_i(\xi)] / \partial x_{ji}$, 其中 x_{ji} 为高斯积分节点。分别针对 FFNI 和 SGNI, 针对不同的节点分布情况, 结合拉格朗日插值近似技术, 利用节点上的函数值, 在不调用任何响应函数的情况下, 推导了半解析形式的设计灵敏度。

5.2 全局方法

全局灵敏度分析(global sensitivity analysis, GSA) 能够量化各不确定性因素对系统响应不确定性的影响程度, 进而可适当忽略那些影响小的不确定性因素, 在不影响精度的前提下降低不确定性传播的计算量, 目前已成为提高不确定性传播效率的有效途径之一。全局灵敏度分析方法大体可以分为基于回归的方法和基于方差的方法^[92], 其中基于 Sobol' 灵敏度指数的方差分析法因其简单有效的特点得到了广泛应用。

混沌多项式方法将随机输出响应表示为一组正交多项式的加权组合, 基于混沌多项式模型可解析得到响应方差, 从而非常方便地计算 Sobol' 灵敏度指数。最终的灵敏度指数是关于混沌多项式系数的解析表达, 相当于混沌多项式系数计算的副产品。该方法相比于 MCS 计算量大为降低, 因此基于混沌多项式的 Sobol' 方差分析法成为一种较为常用的全局灵敏度分析方法。

基于混沌多项式方法的 Sobol' 灵敏度指数表示为

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{\sum_{a \in \Omega_{i_1, \dots, i_s}} b_a^2 E[\Phi_a^2]}{D_{PC}} \quad (15)$$

式中, D_{PC} 为总方差, 可通过式 (3) 计算得到。由式 (15) 可知, 一旦混沌多项式模型构建好, 就可在混沌多项式模型基础上进行全局灵敏度分析, 得到关于混沌多项式系数的灵敏度指数的表达, 无需任何额外的函数调用。

Sudret^[92] 将广义混沌多项式应用到全局灵敏度分析中, 得到了关于混沌多项式系数的解析式的 Sobol' 灵敏度指数。Palar 等^[93] 基于加法修正多可信度混沌多项式方法, 进行了基于 Sobol' 灵敏

度指数的全局灵敏度分析。Cheng 等^[94] 基于支持向量机回归提出了用于全局灵敏度分析的自适应混沌多项式方法。王晗等^[95] 提出了基于稀疏多项式混沌展开的孤岛微电网全局灵敏度分析方法, 并将其用于准确、快速地辨识影响系统运行状态的关键输入随机变量。卜令泽^[96] 对基于混沌多项式的全局灵敏度分析方法展开深入研究, 为大型复杂结构的灵敏度与可靠度分析提供了新思路。为识别影响自动装填机构刚度的核心关键参数, 孙佳等^[97] 采用基于混沌多项式展开的全局灵敏度分析方法, 从 32 个自动装填机构参数中提取出了 6 个影响刚度的核心关键参数。王娟^[98] 开展了基于混沌多项式的 Sobol' 全局灵敏度分析, 考虑了输入变量线性相关性的情况。也有研究首先在全阶混沌多项式模型上进行双曲线截断, 构建稀疏混沌多项式模型, 在此基础上进行全局灵敏度分析, 进而发掘 Sobol' 灵敏度指数较小的非重要变量, 在不确定性传播中不予以考虑, 从而实现降维, 然后在降维后的变量空间构建阶次更高的稀疏混沌多项式, 达到了提高精度并降低计算量的目的^[85]。

6 混合不确定性传播

当考虑随机 (aleatory) 和认知 (epistemic) 混合不确定性时, 常规的不确定性传播过程变为一个典型的双层循环, 外层考虑认知不确定性, 内层实质为认知不确定性固定于某值情况下的随机不确定性传播。由于混沌多项式方法的高效性, 近年来出现了不少将混沌多项式方法用于处理随机和认知混合不确定性传播的研究工作。其基本思想为: 外层利用概率盒 (P-box)、证据、模糊、区间以及似然估计等方法考虑认知不确定性, 内层进行基于混沌多项式的随机不确定性传播, 从而避免大量调用耗时的真实响应函数, 降低计算量。

6.1 概率盒方法

概率盒方法也称为二阶概率方法 (second-order probability)^[99-101], 它通过将输出响应的上、下两条累积分布函数 (CDF) 作为边界来定义不确定性。先根据认知不确定性变量的信息进行抽样, 例如, 已知认知不确定性的上、下限区间, 可在该区间范围内采取拉丁超立方抽样得到 M 组样本, 构造内外双层循环进行迭代计算。每次迭代中, 外层循环中的认知不确定性变量依次取 M 组样本的某个值, 然后在内层循环考虑随机不确定性变量, 进行基于混沌多项式的随机不确定性传播, 最终得到输出响应概率特性的一族 CDF 曲线

(凸包),进而选取最内层和最外层的那条作为概率上、下边界,构成一个 P-box。图 7 为利用概率盒方法进行混合不确定性传播的示意图,随着认知不确定性的逐步减小,信息逐渐完备,所得的凸包的概率边界之间的偏差将越来越小。基于得到的 CDF 包络,可进一步得到输出响应 y 其它的不确定性信息(包括均值 μ_y 、方差 σ_y 等),它们也都是区间形式,例如 $[\mu_y^L, \mu_y^U]$ 。

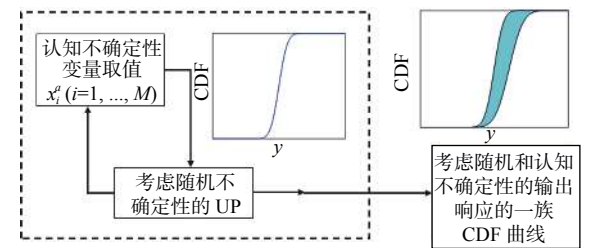


图 7 基于概率盒和混沌多项式的混合不确定性传播
Fig. 7 Mixed UP with PC and P-box

6.2 证据理论

证据理论(evidence theory)是由 Dempster 率先提出的,后经 Shafer 系统完善,故又称为 Dempster-Shafer 理论^[102],它是对经典概率理论的一种扩展,使用概率边界反映所有可能结果集合幂集的信任度。证据理论通过识别框架、基本可信度分配(basic probability assignment, BPA)、可信度函数 $Bel()$ 和似真度函数 $Pl()$ 这 3 个基本概念构成了不确定性建模框架。读者可参考文献 [29, 94, 103] 获取关于证据理论的具体介绍。利用证据理论做混合不确定性传播时,基于混沌多项式求取输出

响应的累积信度函数(cumulative belief function, CBF)和累积似真度函数(cumulative plausibility function, CPF)来表征识别框架内系统响应的不确定特性,如图 8 所示。在得到输出响应 y 的 CBF 和 CPF 之后,可进一步建立适合不确定性优化设计的类似于均值和方差的目标准则^[104]。

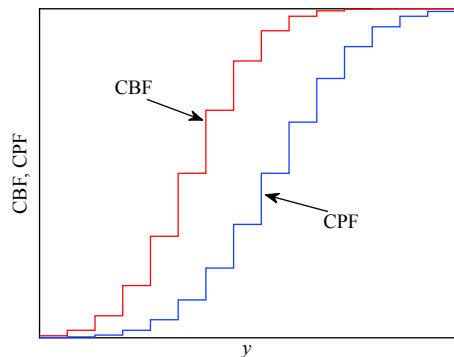


图 8 证据理论下输出响应 y 的 CBF 和 CPF 曲线
Fig. 8 CBF and CPF of output response with Dempster-Shafer theory

6.3 模糊数

模糊数(fuzzy number)是常规实数的一般化,其含义是它不引用一个值,而是引用一组可能的值,其中每个可能的值都有自己的权重(范围 0~1),称为隶属函数。在进行混合不确定性传播时,可以将模糊数看作一种灵活的 P-box 的形式,即对每个 α_i -cut 的区间进行基于混沌多项式的不确定性传播^[105-106],最终得到系统输出响应 y 的隶属度函数。图 9 为大致过程的示意图,其中纵轴表示隶属度函数 $p(x)$ 值, $\alpha \in [0, 1]$ 是 α -cut 水平。

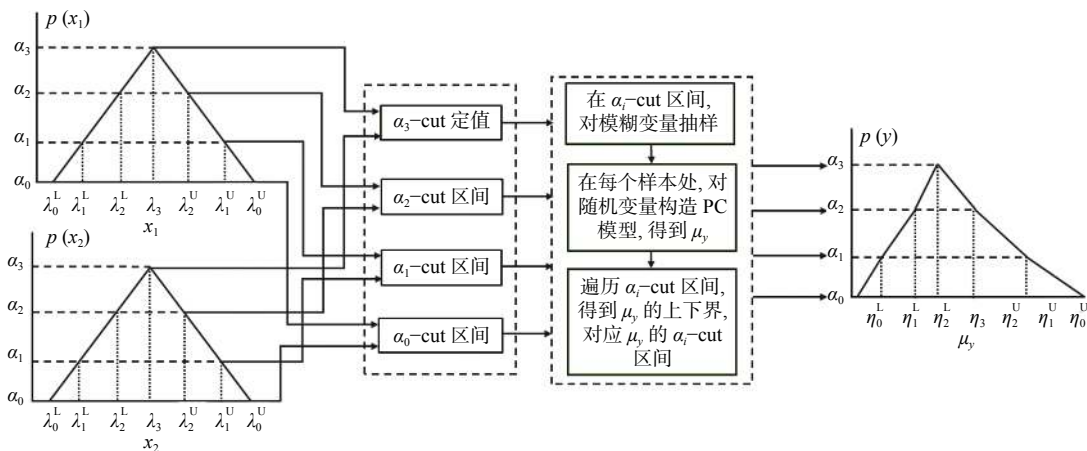


图 9 基于混沌多项式和模糊理论的混合不确定性传播
Fig. 9 Mixed uncertainty propagation with PC and fuzzy theory

6.4 区间理论

区间模型一般定义如下:

$$A^I = [A^L, A^U] = \{x | A^L \leq x \leq A^U, x \in \mathbf{R}\} \quad (16)$$

式中,上标 I, L, U 分别表示区间、区间下界和区间上界。基于区间数的混合不确定性传播可转换

为在区间变量的范围内求解优化问题^[107-108]。对于任意的区间变量所在区间上的某个值, 固定认知不确定性变量于该值, 构建随机变量的混沌多项式模型, 从而可方便地得到输出响应的均值、方差或失效概率。进一步通过寻优, 得到输出响应均值、方差或失效概率的最大值和最小值。

6.5 似然方法

不同于以上 4 种方法, 似然方法(likelihood)^[109]最终依然采用概率理论来进行不确定性传播。似然估计允许同时处理点数据和区间数据, 它将以稀疏点数据和区间数据存在的认知不确定性输入变量表示为概率形式的不确定性, 通过最大化似然函数, 得到认知不确定性变量的概率密度函数(PDF), 该 PDF 相当于是当前已知数据下, 该变量的平均 PDF。概率表征使得该方法可非常方便地应用于各类基于概率的不确定性分析及优化设计理论和方法, 而基于概率的方法具有严格的理论基础, 发展较为成熟, 因此应用起来非常方便。

7 总结与展望

混沌多项式方法作为一种较为成熟高效的不确定性传播方法, 近几年得到了长足发展, 已经在各个领域得到了广泛应用。在稳健优化设计领域, 由于需要在优化的每个迭代点构建混沌多项式模型, 对于高维且非线性较强的优化问题, 往往涉及大量迭代, 计算量显著上升, 而数值模拟模型确认不涉及该迭代, 相比于传统的不确定性传播方法, 混沌多项式的优势凸显, 因此混沌多项式方法在数值模拟模型确认方面最具应用潜力。相比其它混沌多项式的变种, 广义混沌多项式方法由于具有相对较强的稳健性, 针对不同的输入分类和函数形式通常能得到较为满意的结果, 是目前应用最广泛的混沌多项式方法。但其大部分应用基本停留于较简单的工程问题, 问题涉及的规模及维数都不太高($d < 10$), 高维问题鲜有报道。在应对“维数灾难”方面, 稀疏网格方法稳健性好、泛化能力相对较强, 但仅适用于中、低维问题($d < 10$); 稀疏重构策略计算量降低最为显著, 是最具应用潜力的途径之一, 但在适用范围和泛化能力上还需改进。多可信度混沌多项式是降低计算量的有效途径之一, 但是对于高、低精度模型样本数目的确定还缺乏较为科学有效的方法, 目前基本停留在不断试凑的模式, 且泛化能力较差。此外, 实际问题大都涉及黑箱型响应函数, 围绕混沌多项式开发较为通用化的程序软件, 根据实际计算资源预算自动确定有效的混沌

多项式阶次和样本点个数, 以方便实际工程应用, 建立混沌多项式在各类典型问题应用的演示实例, 这也是需要进一步探索的问题。实际工程中可能涉及高达上百维的不确定性传播问题, 目前的混沌多项式方法依然会面临较为突出的“维数灾难”问题, 这方面还需挖掘新的理论和方法, 例如尝试采用小样本深度学习技术构建输入输出的深度神经网络模型, 取代原系统响应分析, 以降低计算量。

参考文献:

[1] XIU D B, KARNIADAKIS G E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, 24(2): 619–644.

[2] XIU D B, KARNIADAKIS G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 187(1): 137–167.

[3] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second moment code format[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1974, 100(1): 111–121.

[4] KÖYLÜOĞLU H U, NIELSEN S R K. New approximations for SORM integrals[J]. *Structural Safety*, 1994, 13(4): 235–246.

[5] ZHAO Y G, ONO T. New approximations for SORM: Part 1[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999, 125(1): 79–93.

[6] 刘智益. 不确定性 CFD 模拟方法及其应用研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2014.

[6] LIU Z Y. Investigation on non-deterministic methodologies and applications in CFD simulations[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2014 (in Chinese).

[7] 张宏涛, 赵宇飞, 李晨峰, 等. 基于多项式混沌展开的边坡稳定可靠性分析 [J]. *岩土工程学报*, 2010, 32(8): 1253–1259.

[7] ZHANG H T, ZHAO Y F, LI C F, et al. Reliability analysis of slope stability based on polynomial chaos expansion[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(8): 1253–1259 (in Chinese).

[8] 胡晚亭, 吕令毅. 基于谱随机有限元的地基沉降可靠度分析 [J]. *工程建设*, 2018, 50(4): 11–15.

[8] HU W T, LYU L Y. Reliability analysis of foundation settlement based on spectral stochastic finite element method[J]. *Engineering Construction*, 2018, 50(4): 11–15 (in Chinese).

[9] 许灿, 朱平, 刘钊, 等. 平纹机织碳纤维复合材料的多尺度随机力学性能预测研究 [J]. *力学学报*, 2020, 52(3): 763–773.

- XU C, ZHU P, LIU Z, et al. Research on multiscale stochastic mechanical properties prediction of plain woven carbon fiber composites[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(3): 763–773 (in Chinese).
- [10] PREMPRANEERACH P, HOVER F S, TRIANTAFYLLOU M S, et al. Uncertainty quantification in simulations of power systems: multi-element polynomial chaos methods[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2010, 95(6): 632–646.
- [11] 沈艳霞, 卞高峰, 林京京. 基于多项式混沌观测器的电机系统自愈控制[J]. *控制工程*, 2018, 25(10): 1785–1790.
- SHEN Y X, BIAN G F, LIN J J. Self-healing control for motor system based on polynomial chaos observer[J]. *Control Engineering of China*, 2018, 25(10): 1785–1790 (in Chinese).
- [12] 高印寒, 王天皓, 杨开宇, 等. 基于混沌多项式法的汽车线束串扰统计特性研究[EB/OL]. [2015-11-26]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201511-659>.
- GAO Y H, WANG T H, YANG K Y, et al. The study of automotive wiring harness crosstalk statistical properties based on chaos polynomial method[EB/OL]. [2015-11-26]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201511-659> (in Chinese).
- [13] TADIPARTHI V, BHATTACHARYA R. Robust LQR for uncertain discrete-time systems using polynomial chaos[C]//2020 American Control Conference (ACC). Denver, CO, USA: IEEE, 2020: 4472–4477. DOI: 10.23919/ACC45564.2020.9147831.
- [14] BHATTACHARYA R. A polynomial chaos framework for designing linear parameter varying control systems[C]//2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL, USA: IEEE, 2015.
- [15] PENG Y B, GHANEM R, LI J. Polynomial chaos expansions for optimal control of nonlinear random oscillators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(18): 3660–3678.
- [16] SHAH H, HOSDER S, KOZIEL S, et al. Multi-fidelity robust aerodynamic design optimization under mixed uncertainty[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 45: 17–29.
- [17] JONE B A, PARRISH N L, WERNER M S, et al. Post-maneuver collision probability estimation using polynomial chaos[J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2014, 150: 261–280.
- [18] 宋赋强, 阎超, 马宝峰, 等. 锥导乘波体构型的气动特性不确定度分析[J]. *航空学报*, 2018, 39(2): 97–106.
- SONG F Q, YAN C, MA B F, et al. Uncertainty analysis of aerodynamic characteristics for cone-derived waverider configuration[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(2): 97–106 (in Chinese).
- [19] 蔡宇桐, 高丽敏, 马驰, 等. 基于NIPC的压气机叶片加工误差不确定性分析[J]. *工程热物理学报*, 2017, 38(3): 490–497.
- CAI Y T, GAO L M, MA C, et al. Uncertainty quantification on compressor blade considering manufacturing error based on NIPC method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2017, 38(3): 490–497 (in Chinese).
- [20] 魏骁, 冯佰威, 刘祖源, 等. 基于多维多项式混沌展开法的船舶不确定性优化设计[J]. *船舶工程*, 2018, 40(1): 42–47.
- WEI X, FENG B W, LIU Z Y, et al. Ship uncertainty optimization design based on multidimensional polynomial chaos expansion method[J]. *Ship Engineering*, 2018, 40(1): 42–47 (in Chinese).
- [21] 梁霄, 陈江涛, 王瑞利, 等. 非接触水下爆炸下舰船冲击环境的不确定度量化[J]. *中国舰船研究*, 2020, 15(6): 128–136.
- LIANG X, CHEN J T, WANG R L, et al. The uncertainty quantification of ship shock environment subjected to non-contact underwater explosion[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2020, 15(6): 128–136.
- [22] 李冬琴, 蒋志勇, 赵欣. 多维随机不确定性下的船舶多学科稳健设计优化研究[J]. *船舶工程*, 2015, 37(11): 61–66.
- LI D Q, JIANG Z Y, ZHAO X. Ship Multidisciplinary robust design optimization under multidimensional stochastic uncertainties[J]. *Ship Engineering*, 2015, 37(11): 61–66 (in Chinese).
- [23] 李冬琴, 赵欣, 管义锋. 基于多维PC扩展的多学科稳健优化算法研究[J]. *舰船科学技术*, 2016, 38(1): 132–136, 149.
- LI D Q, ZHAO X, GUAN Y F. Robust multidisciplinary design optimization based on multidimensional polynomial chaos expansion[J]. *Ship Science and Technology*, 2016, 38(1): 132–136, 149 (in Chinese).
- [24] TEMPLETON B A, COX D E, KENNY S P, et al. On controlling an uncertain system with polynomial chaos and H_2 control design[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2010, 132(6): 061304.
- [25] DU Y C, BUDMAN H, DUEVER T. Robust self-tuning control design under probabilistic uncertainty using polynomial chaos expansion-based Markov models[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, 51(18): 750–755.
- [26] 李伟平, 王磊, 张宝珍, 等. 基于不确定性和模糊理论的汽车平顺性优化[J]. *机械科学与技术*, 2013, 32(5): 636–640.
- LI W P, WANG L, ZHANG B Z, et al. Optimizing vehicle ride comfort based on uncertainty theory and fuzzy theory[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2013, 32(5): 636–640 (in Chinese).

- [27] 姜潮. 基于区间的不确定性优化理论与算法 [D]. 长沙: 湖南大学, 2008.
- JIANG C. Theories and algorithms of uncertain optimization based on interval[D]. Changsha: Hunan University, 2008 (in Chinese).
- [28] 锁斌. 基于证据理论的不确定性量化方法及其在可靠性工程中的应用研究 [D]. 绵阳: 中国工程物理研究院, 2012.
- SUO B. Uncertainty quantification method based on evidence theory and its application in reliability engineering[D]. Mianyang: China Academy of Engineering Physics, 2012.
- [29] 曹立雄. 基于证据理论的结构不确定性传播与反求方法研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2019.
- CAO L X. Research on structural uncertainty propagation and inverse method based on evidence theory[D]. Changsha: Hunan University, 2019 (in Chinese).
- [30] ASME. Guide for verification and validation in computational solid mechanics: ASME V & V 10-2006[S]. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2006.
- [31] MELDI M, SALVETTI M V, SAGAUT P. Quantification of errors in large-eddy simulations of a spatially evolving mixing layer using polynomial chaos[J]. *Physics of Fluids*, 2012, 24(3): 035101.
- [32] 王瑞利, 刘全, 温万治. 非嵌入式多项式混沌法在爆轰产物 JWL 参数评估中的应用 [J]. *爆炸与冲击*, 2015, 35(1): 9–15.
- WANG R L, LIU Q, WEN W Z. Non-intrusive polynomial chaos methods and its application in the parameters assessment of explosion product JWL[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2015, 35(1): 9–15 (in Chinese).
- [33] 赵辉, 胡星志, 张健, 等. 湍流模型系数不确定度对翼型绕流模拟的影响 [J]. *航空学报*, 2019, 40(6): 63–73.
- ZHAO H, HU X Z, ZHANG J, et al. Effects of uncertainty in turbulence model coefficients on flow over airfoil simulation[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(6): 63–73 (in Chinese).
- [34] 刘全, 王瑞利, 林忠. 非嵌入式多项式混沌方法在拉氏计算中的应用 [J]. *固体力学学报*, 2013, 33(增刊 1): 224–233.
- LIU Q, WANG R L, LIN Z. Uncertainty quantification for Lagrangian computation using non-intrusive polynomial chaos[J]. *Acta Mechnica Solida Sinica*, 2013, 33(Supp 1): 224–233 (in Chinese).
- [35] ENDERLE B, RAUCH B, GRIMM F, et al. Non-intrusive uncertainty quantification in the simulation of turbulent spray combustion using polynomial chaos expansion: a case study[J]. *Combustion and Flame*, 2019, 213: 26–38.
- [36] SCHAEFER J, HOSDER S, WEST T, et al. Uncertainty quantification of turbulence model closure coefficients for transonic wall-bounded flows[J]. *AIAA Journal*, 2016, 55(1): 1–19.
- [37] SCHAEFER J A, CARY A W, DUQUE E P, et al. Application of a CFD uncertainty quantification framework for industrial-scale aerodynamic analysis[C]//AIAA SciTech Forum, 7-11 January 2019. San Diego, California: AIAA, 2019.
- [38] LI J, GAO Z H, HUANG J Y, et al. Robust design of NLF airfoils[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2013, 26(2): 309–318.
- [39] WU X J, ZHANG W W, SONG S F. Robust aerodynamic shape design based on an adaptive stochastic optimization framework[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 57(2): 639–651.
- [40] EL MAANI R, MAKHLOUFI A, RADI B, et al. Reliability-based design optimization with frequency constraints using a new safest point approach[J]. *Engineering Optimization*, 2018, 50(10): 1715–1732.
- [41] CHEN Z Z, WU Z H, LI X K, et al. A multiple-design-point approach for reliability-based design optimization[J]. *Engineering Optimization*, 2019, 51(5): 875–895.
- [42] ZANG T A, HEMSCH M J, HILBURGER M W, et al. Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles[R]. Hampton, VA: NASA, 2002.
- [43] LIE W, YANG S Y, BAI Y N, et al. Efficient robust optimization based on polynomial chaos and Tabu search algorithm[J]. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 2012, 39(1): 145–150.
- [44] MANDUR J, BUDMAN H. A polynomial-chaos based algorithm for robust optimization in the presence of Bayesian Uncertainty[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, 45(15): 549–554.
- [45] HUANG Y C, LI H Y, DU X, et al. Mars entry trajectory robust optimization based on evidence under epistemic uncertainty[J]. *Acta Astronautica*, 2019, 163: 225–237.
- [46] ONORATO G, LOEVEN G J A, GHORBANIASL G, et al. Comparison of intrusive and non-intrusive polynomial chaos methods for CFD applications in aeronautics[C]//European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. Lisbon, Portugal: [s.n.], 2010.
- [47] XIONG F F, CHEN S S, XIONG Y. Dynamic system uncertainty propagation using polynomial chaos[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, 27(5): 1156–1170.
- [48] WIENER N. The homogeneous chaos[J]. *American Journal of Mathematics*, 1938, 60(4): 897–936.
- [49] WITTEVEEN J A S, BIJL H. Modeling arbitrary un-

- certainties using Gram-Schmidt polynomial chaos[C]//44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV, USA: AIAA, 2006.
- [50] ZHANG G, BAI J J, WANG L X, et al. Uncertainty analysis of arbitrary probability distribution based on Stieltjes Process[C]//IEEE 21st Workshop on Signal and Power Integrity (SPI). Baveno, Italy: IEEE, 2017.
- [51] XU Y J, MILI L, SANDU A, et al. Propagating uncertainty in power system dynamic simulations using polynomial chaos[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019, 34(1): 338–348.
- [52] OLADYSHKIN S, NOWAK W. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, 106: 179–190.
- [53] WANG F G, XIONG F F, JIANG H, et al. An enhanced data-driven polynomial chaos method for uncertainty propagation[J]. *Engineering Optimization*, 2018, 50(2): 273–292.
- [54] SOCIE D F. Seminar notes: probabilistic aspects of fatigue[M]. Illinois: University of Illinois Press, 2003.
- [55] 苏松松, 冷小磊. 考虑空间相关性的飞行器气动噪声响应分析[J]. *江苏航空*, 2011(增刊1): 115–117.
- SU S S, LENG X L. Aerodynamic noise response analysis of aircraft considering spatial correlation[J]. *Jiangsu Aviation*, 2011(Supp 1): 115–117 (in Chinese).
- [56] RACKWITZ R, FLESSLER B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. *Computers & Structures*, 1978, 9(5): 489–494.
- [57] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transformation[J]. *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, 23(3): 470–472.
- [58] KIUREGHIAN A D, LIU P L. Structural reliability under incomplete probability information[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(1): 85–104.
- [59] LIN Q Z, XIONG F F, WANG F G, et al. A data-driven polynomial chaos method considering correlated random variables[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(2): 2131–2147.
- [60] PAULSON J A, BUEHLER E A, MESBAH A. Arbitrary polynomial chaos for uncertainty propagation of correlated random variables in dynamic systems[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 3548–3553.
- [61] WANG G Z, XIN H H, WU D, et al. Data-driven arbitrary polynomial chaos-based probabilistic load flow considering correlated uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2019, 34(4): 3274–3276.
- [62] XIONG F F, CHEN W, XIONG Y, et al. Weighted stochastic response surface method considering sample weights[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(6): 837–849.
- [63] HU C, YOUN B D. Adaptive-sparse polynomial chaos expansion for reliability analysis and design of complex engineering systems[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(3): 419–442.
- [64] MONTGOMERY D C. Design and Analysis of Experiments[M]. New York: Wiley, 1976.
- [65] SMOLYAK S A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions[J]. *Doklady Akademii Nauk*, 1963, 148(5): 1042–1045.
- [66] XIONG F F, GREENE S, CHEN W, et al. A new sparse grid based method for uncertainty propagation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(3): 335–349.
- [67] ISUKAPALLI S S. Uncertainty analysis of transport-transformation models[D]. New Brunswick: The State University of New Jersey, 1999.
- [68] ISUKAPALLI S S, ROY A, GEORGOPOULOS P G. Efficient sensitivity/uncertainty analysis using the combined stochastic response surface method and automated differentiation: application to environmental and biological systems[J]. *Risk Analysis*, 2000, 20(5): 591–602.
- [69] HOSDER S, WALTERS R, BALCH M. Efficient sampling for non-intrusive polynomial chaos applications with multiple uncertain input variables[C]//48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Honolulu, Hawaii: AIAA, 2007.
- [70] WEI D L, CUI Z S, CHEN J. Uncertainty quantification using polynomial chaos expansion with points of monomial cubature rules[J]. *Computers & Structures*, 2008, 86(23–24): 2102–2108.
- [71] HAMPTON J, DOOSTAN A. Basis adaptive sample efficient polynomial chaos (BASE-PC)[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 371: 20–49.
- [72] BLATMAN G, SUDRET B. Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach[J]. *Comptes Rendus Mécanique*, 2008, 336(6): 518–523.
- [73] BLATMAN G, SUDRET B. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(6): 2345–2367.
- [74] 王丰刚. 面向飞行器设计的混沌多项式方法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2019.
- WANG F G. Research on polynomial chaos method for flight vehicle design[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2019 (in Chinese).
- [75] 陈光宋, 钱林方, 吉磊. 身管固有频率高效全局灵敏度分析[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(21): 31–36.
- CHEN G R, QIAN L F, JI L. An effective global sensitivity analysis method for natural frequencies of a bar-

- rel[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(21): 31–36 (in Chinese).
- [76] CHENG K, LU Z Z. Sparse polynomial chaos expansion based on D-MORPH regression[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 323: 17–30.
- [77] DIAZ P, DOOSTAN A, HAMPTON J. Sparse polynomial chaos expansions via compressed sensing and D-optimal design[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 336: 640–666.
- [78] TSILIFIS P, HUAN X, SAFTA C, et al. Compressive sensing adaptation for polynomial chaos expansions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 380: 29–47.
- [79] 陈江涛, 章超, 刘骁, 等. 基于稀疏多项式混沌方法的不确定性量化分析 [J]. *航空学报*, 2020, 41(3): 169–177.
- CHEN J T, ZHANG C, LIU X, et al. Uncertainty quantification analysis with sparse polynomial chaos method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(3): 169–177 (in Chinese).
- [80] GAO X F, WANG Y J, SPOTTS N, et al. Fast uncertainty quantification in engine nacelle inlet design using a reduced dimensional polynomial chaos approach[C]//AIAA/SAE/ASCE Joint Propulsion Conference. Salt Lake City, UT: AIAA, 2016.
- [81] WINOKUR J G. Adaptive sparse grid approaches to polynomial chaos expansions for uncertainty quantification[D]. Durham: Duke University, 2015.
- [82] WU X J, ZHANG W W, SONG S F, et al. Sparse grid-based polynomial chaos expansion for aerodynamics of an airfoil with uncertainties[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2018, 31(5): 997–1011.
- [83] XIONG F F, XUE B, ZHANG Y, et al. Polynomial chaos expansion based robust design optimization[C]//2011 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering. Xi'an, China: IEEE, 2011: 868–873.
- [84] KENNEDY M C, O'HAGAN A. Predicting the output from a complex computer code when fast approximations are available[J]. *Biometrika*, 2000, 87(1): 1–13.
- [85] NG L W T, ELDRED M. Multifidelity Uncertainty quantification using non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation[C]//53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Honolulu, USA: AIAA, 2012.
- [86] PALAR P S, TSUCHIYA T, PARKS G T. Multi-fidelity non-intrusive polynomial chaos based on regression[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 305: 579–606.
- [87] MATTEO B. Multi-fidelity surrogate modelling with polynomial chaos expansions[D]. Zurich, Switzerland: ETH, 2016.
- [88] YAN L, ZHOU T. Adaptive multi-fidelity polynomial chaos approach to Bayesian inference in inverse problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 381: 110–128.
- [89] CHENG K, LU Z Z, ZHEN Y. Multi-level multi-fidelity sparse polynomial chaos expansion based on Gaussian process regression[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 349: 360–377.
- [90] WANG F G, XIONG F F, CHEN S S, et al. Multi-fidelity uncertainty propagation using polynomial chaos and Gaussian process modeling[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 60(4): 1583–1604.
- [91] REN C K, XIONG F F, MO B, et al. Design sensitivity analysis with polynomial chaos for robust optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(4): 357–373.
- [92] SUDRET B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2008, 93(7): 964–979.
- [93] PALAR P S, ZUHAL L R, SHIMOYAMA K, et al. Global sensitivity analysis via multi-fidelity polynomial chaos expansion[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, 170: 175–190.
- [94] CHENG K, LU Z Z. Adaptive sparse polynomial chaos expansions for global sensitivity analysis based on support vector regression[J]. *Computers & Structures*, 2018, 194: 86–96.
- [95] 王晗, 严正, 徐潇源, 等. 基于稀疏多项式混沌展开的孤岛微电网全局灵敏度分析 [J]. *电力系统自动化*, 2019, 43(10): 64–77.
- WANG H, YAN Z, XU X Y, et al. Global sensitivity analysis for islanded microgrid based on sparse polynomial chaos expansion[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2019, 43(10): 64–77 (in Chinese).
- [96] 卜令泽. 全局灵敏度与结构可靠度分析——基于偏最小二乘回归的多项式混沌展开方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
- BU L Z. Global sensitivity and structural reliability analysis: research on partial least squares-based polynomial chaos expansion method[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017 (in Chinese).
- [97] 孙佳, 陈光宋, 钱林方, 等. 自动装填机构刚度混合全局灵敏度分析 [J]. *南京理工大学学报*, 2019, 43(2): 135–140.
- SUN J, CHEN G S, QIAN L F, et al. Combined global sensitivity analysis for stiffness of automatic loading mechanism[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2019, 43(2): 135–140 (in Chinese).
- [98] 王娟. 基于替代模型的可靠性与灵敏度分析方法研究 [D]. 南京: 南京理工大学, 2018.
- WANG J. Research on methods of reliability and sensitivity analysis based on meta-models[D]. Nanjing:

- Nanjing University of Science and Technology, 2018 (in Chinese).
- [99] 梁霄, 王瑞利. 混合不确定度量化方法及其在计算流体动力学迎风格式中的应用 [J]. *爆炸与冲击*, 2016, 36(4): 509–515.
- LIANG X, WANG R L. Mixed uncertainty quantification and its application in upwind scheme for computational fluid dynamics (CFD)[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2016, 36(4): 509–515 (in Chinese).
- [100] KARANKI D R, KUSHWAHA H S, VERMA A K, et al. Uncertainty analysis based on probability bounds (P-box) approach in probabilistic safety assessment[J]. *Risk Analysis*, 2010, 29(5): 662–675.
- [101] LIU X, YIN L R, HU L, et al. An efficient reliability analysis approach for structure based on probability and probability box models[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 56(1): 167–181.
- [102] DEMPSTER A P, LAIRD N M, RUBIN D B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1977, 39(1): 1–22.
- [103] YIN S W, YU D J, LUO Z, et al. An arbitrary polynomial chaos expansion approach for response analysis of acoustic systems with epistemic uncertainty[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 332: 280–302.
- [104] 胡钧铭. 一种面向随机与认知不确定性的稳健优化设计方法研究 [D]. 绵阳: 中国工程物理研究院, 2012.
- HU G M. A methodology research on robust design optimization considering aleatory and epistemic uncertainty[D]. Mianyang: China Academy of Engineering Physics, 2012 (in Chinese).
- [105] DEY S, MUKHOPADHYAY T, KHODAPARAST H H, et al. Fuzzy uncertainty propagation in composites using Gram–Schmidt polynomial chaos expansion[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(7–8): 4412–4428.
- [106] ABDO H, FLAUS J M. Uncertainty quantification in dynamic system risk assessment: a new approach with randomness and fuzzy theory[J]. *International Journal of Production Research*, 2016, 54(19): 5862–5885.
- [107] ZAMAN K, RANGAVAJHALA S, MCDONALD M P, et al. A Probabilistic approach for representation of interval uncertainty[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(1): 117–130.
- [108] 姜潮, 刘丽新, 龙湘云, 等. 一种概率–区间混合结构可靠性的计算高效方法 [J]. *计算力学学报*, 2013, 30(5): 605–609.
- JIANG C, LIU L X, LONG X Y, et al. An efficient reliability analysis method for structures with probability–interval mixed uncertainty[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(5): 605–609 (in Chinese).
- [109] SANKARARAMAN S, MAHADEVAN S. Likelihood-based representation of epistemic uncertainty due to sparse point data and/or interval data[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(7): 814–824.