中国科学 : 数学　2020 年　第 50 卷　第 12 期 : 1695 ∼ 1720
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
论　文

Banach 空间中的超弱紧集

献给吴从炘教授 85 华诞

程庆进

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: qjcheng@xmu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-31; 接受日期: 2020-07-23; 网络出版日期: 2020-12-16
国家自然科学基金 (批准号: 11731010) 资助项目

摘要　超弱紧集是超自反空间的一个局部化概念, 本文将简要回顾 Banach 空间中超弱紧集的研究, 同时给出一些新的相关研究成果.

关键词　Banach 空间　超弱紧集　一致 Eberlein 紧

MSC (2010) 主题分类　46B20

1　引言

众所周知, 超自反空间或一致可凸化的 Banach 空间是自反 Banach 空间中最重要的一类空间, 其在 Banach 空间理论和应用中占有重要地位. 一个 Banach 空间 E 被称为超自反的, 如果每个在 E 中有限表示的空间是自反的. 自 James [1] 在 1972 年引入超自反空间的概念后, 这类空间的研究便备受关注, 在短短几年间, 泛函分析学家们就建立了此类空间的一些奠基性结果. 例如, 1972 年, James [1] 证明了一个 Banach 空间 E 为超自反的当且仅当其闭单位球 B_E 不具有有限树性质; 同年, Enflo [2] 利用 James 树特征定理, 通过构造技术证明了每个超自反空间均可再赋范成一致凸空间; 进一步地, 1975 年, Pisier [3] 利用 Banach 空间值的鞅, 从概率角度证明了每个超自反空间均可再赋范成一个具有指数型凸性模的一致凸空间. Enflo-Piser 再赋范定理被认为是再赋范理论最为经典和深刻的结果, 是再赋范理论的里程碑. 经过近五十年的发展, 超自反空间理论已成为一个研究内容多样、结论丰富并具有广泛应用的研究领域. 尤其近二十年来, 此类空间与粗几何中一些重要猜测 (如粗 Novikov 猜测) 联系密切 (参见文献 [4, 5]), 例如, Kasparov 和 Yu [6] 证明了粗 Novikov 猜测对于可粗嵌入进超自反空间的有界几何成立, 这使得这类空间的研究受到了人们特别的关注 (参见文献 [7–9]).

为了研究有界几何向超自反空间的粗嵌入问题, 一个自然的想法是, 研究将有界几何中的点拉回到 Banach 空间的单位球内时的集合的 “超性质” 分布行为. 另一方面, 在许多情形下整个空间的一致

英文引用格式: Cheng Q J. Super weakly compact subsets of Banach spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1695–1720, doi: 10.1360/SSM-2020-0168

凸性或超自反性的假设是不必要的, 因为有时我们仅仅需要局部化的条件. 例如, Kirk [10] 的非扩张映射的不动点定理说明只要一个有界闭凸集 C 具有正规结构和弱紧性便可保证其上的非扩张映射具有不动点. 对比弱紧集可视作自反空间概念的局部化和推广, 我们自然会需要一个可视作超自反空间的局部化概念. 遗憾的是, 30 多年以来一直缺失这样的一个概念, 究其原因, 可能的困难点在于如何合理地将空间超自反概念中用到的 "有限表示" 局部化到一般集合上. 笔者在 2004 年师从程立新教授读博时, 就在程老师的指导下开始了超自反空间局部化问题的研究. 我们的想法是, 首先将超自反这一概念局部化—提出合理的超弱紧集概念, 然后研究这类集合一致嵌入超自反空间的条件并应用到有界几何向超自反空间的粗嵌入上. 2007 年, 程立新和程庆进 [11, 12] 发现, 利用顶点在目标集合中的 "单形" 代替有限维子空间来定义集合的有限表示是 "有限表示" 的一个非常自然而适用的局部化概念. 于是, 超自反空间的局部化问题 "单形" 局部化了 James 有限表示的概念, 进而对 Banach 空间中的有界弱闭集引入了超自反空间的一个局部化概念—超弱紧集, 并建立了平行于超自反空间中有界子集的一系列性质及局部化的 James-Enflo 再赋范定理 [12, 13].

更为有趣的是, 我们后来发现很多关于 Banach 空间特殊集合的概念可以与超弱紧集关联起来, 最早的可以追溯到 20 世纪 70 年代. 首先在 1976 年, Beauzamy [14] 将空间的超自反性推广到两个 Banach 空间之间的线性算子上, 引入了 "一致可凸化" (法文称 "uniformément convexifiant") 算子的概念, 并建立了算子版的 James-Enflo 定理, 但 Pisier [3] 指出一致可凸化算子不一定具有空间时的再赋指数型凸性模的结果, 更多算子版的推广概念可参见文献 [15–21]. 2008 年, Raja [22] 通过局部化 Lancien [23] 的指标性质, 对 Banach 空间中的一个有界闭凸集上定义了有限指标性质, 并证明此类集合上可再赋 "一致凸" 范数; 2009 年, Fabian 等 [24] 通过局部化 Lancien 的对偶指标性质, 又在 Banach 空间中的一般有界子集上引入了有限对偶指标性质, 并证明了此类集合上可再赋某种 "一致 Gâteaux 可微" 范数. 但是他们没有给出这两类集合是否具有 James 树特征性质.

2018 年, Cheng 等 [25] 系统地研究了一般超弱紧集的性质, 特别有趣的是证明了对一个有界闭凸集而言, Raja 的有限指标性质、Fabian 等 [24] 的有限对偶指标性质和我们的超弱紧集这 3 个概念是等价的, 并且一个算子 $T: X \to Y$ 为一致可凸化算子当且仅当 TB_X 为 Y 的一个相对超弱紧集. 现在超弱紧集概念已被人们认为是超自反性的一个合理、恰当的局部化概念 (参见文献 [26]) 并被广泛研究. 研究表明超弱紧集广泛存在于非超自反空间环境中, 这类集合很好地遗传了超自反空间的几何和拓扑性质, 并与其他一些重要概念如不动点、Banach-Saks 性质、一致弱零集和一致 Eberlein 紧等建立了密切的关系. 最近的一些文献 (参见文献 [25, 27]) 表明, 超弱紧集理论正成为一个活跃的研究方向.

本文目的是简要介绍超弱紧集这个方向的研究进展. 本文分为 6 节, 第 1 节为背景介绍; 第 2 节介绍超弱紧集的定义和基本性质, 主要介绍超弱紧集的特征和一些超弱紧集的例子; 第 3 节转向凸的超弱紧集, 主要介绍超弱紧凸集上的 Enflo 再赋范定理及其应用; 第 4 节介绍超弱紧算子的 Enflo 再赋范定理、因子分解以及超弱紧生成空间的再赋范特征等; 第 5 节是关于超弱紧集的非线性内容, 主要介绍超弱紧与一致 Eberlein 紧的关系; 最后一节给出尚待解决的问题.

文中 E 表示 Banach 空间, E^* 则表示 E 的对偶空间. 我们用 B_E 来表示 Banach 空间 E 中的闭单位球, S_E 则表示 Banach 空间 E 中的单位球面.

2 超弱紧集的定义和基本性质

2.1 集合的有限表示和超幂

有限表示和超幂是研究 Banach 空间理论的两个重要的工具, 有限表示是 James [1] 在研究超自反

空间理论时引入的, 而 Banach 空间的超幂则是由 Dacunha-Castelle 和 Krivine [28] 引入的, 也可参见文献 [29]. 之后, Henson 和 Moore [30] 及 Stern [29] 建立了有限表示和超幂的密切关系, 相关内容可参见文献 [31]. 本节介绍这两个概念在集合上的局部化以及它们之间的密切关系, 这是引入超弱紧集的重要工具.

回顾 James [1] 引入的空间之间的有限表示的概念. 设 X 和 Y 为 Banach 空间, 称 Y 在 X 中有限表示, 如果对每个 $\varepsilon>0$ 和每个有限维子空间 $E\subset Y$, 都存在一个有限维子空间 $F\subset X$ 和线性映射 $T:E\to F$, 使得

$$\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant 1+\varepsilon.$$

线性空间 X 中的一个 n- 单形 S_n 是由 X 中 $n+1$ 个仿射无关向量构成的凸包 $S\equiv \mathrm{co}\{x_i\}_{i=0}^n$, 也就是 $\{x_i-x_0\}_{i=1}^n$ 是线性无关的, 此时称 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 为 n- 单形 S_n 的顶点. 以下用 $\mathrm{co}A$ 表示 A 的凸包, $\mathrm{aff}A$ 表示 A 的仿射包, 即

$$\mathrm{aff}(A)=\left\{\sum_{j=1}^n\alpha_jx_j: x_j\in A,\alpha_j\in\mathbb{R},\sum_{j=1}^n\alpha_j=1,1\leqslant j\leqslant n,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

2007 年, 文献 [11,12] 将经典有限表示定义中的 “有限维线性子空间” 用 “单形” 代替, 引入了集合之间有限表示的概念:

定义 2.1 设 X 和 Y 是 Banach 空间并且 $A\subset X$, $B\subset Y$, 称 B 在 A 中有限表示, 如果对每个 $\varepsilon>0$ 和每个顶点在 B 中的 n- 单形 S_n, 都存在顶点在 A 中的 n- 单形 $\widetilde{S}_n$ 和仿射映射 $T:\mathrm{aff}(S_n)\to\mathrm{aff}(\widetilde{S}_n)$, 使得 $T(S_n)=\widetilde{S}_n$ 以及下面不等式成立:

$$(1-\varepsilon)\|x-y\|\leqslant\|Tx-Ty\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x-y\|,\quad\forall\,x,y\in\mathrm{aff}(S_n).\tag{2.1}$$

集合 B 在集合 A 中有限表示, 意思是每个顶点在 B 中的单形, 都可以找到顶点在 A 中的单形, 使其具有足够好的逼近性质. 显然, 集合 A 的每个子集均可在 A 中有限表示. 根据定义, 不难得到下面的定理:

定理 2.1 [11] Banach 空间 X 在 Banach 空间 Y 中有限表示当且仅当相应单位球 B_X 在 B_Y 中有限表示.

对一个抽象集 Γ, $c_0(\Gamma)$ 表示定义在 Γ 上的所有无穷远为 0 的数值函数 f (即对每个 $\varepsilon>0$, $\{\gamma\in\Gamma:|f(\gamma)|>\varepsilon\}$ 为有限集) 的全体, 赋以最大值范数 $\|f\|_\infty=\max\{|f(\gamma)|:\gamma\in\Gamma\}$ 构成的 Banach 空间.

例 2.1 [25] 设 $A=\{e_j\}$ 为 c_0 的标准单位向量基, 则 Banach 空间中每个在 A 中有限表示的集合 B 均等价于 $c_0(B)$ 的单位向量基.

设 Ω 是一个非空集合, Ω 的一个子集族 $\mathcal{F}$ 称为是一个滤子, 如果它满足以下三条:

(i) $\emptyset\notin\mathcal{F}$;

(ii) 如果 $A,B\in\mathcal{F}$, 则 $A\cap B\in\mathcal{F}$;

(iii) 如果 $A\in\mathcal{F}$ 并且 $A\subset B\subset\Omega$, 则 $B\in\mathcal{F}$.

一个滤子 $\mathcal{F}$ 被称为是自由的, 如果 $\cap\{F\in\mathcal{F}\}=\emptyset$. 一个滤子 $\mathcal{F}$ 被称为是一个超滤子, 如果对任意 $A\subset\Omega$, 有 $A\in\mathcal{F}$ 或者 $\Omega\backslash A\in\mathcal{F}$. 设 K 是一个拓扑空间, 并且 $f:\Omega\to K$ 是一个函数. 称 f 按滤子 $\mathcal{F}$ 收敛到某个 $k\in K$, 如果对每个包含 k 的邻域 U, 有 $f^{-1}(U)\in\mathcal{F}$. 此时, 简记为

$$\lim_{\mathcal{F}}f=k.$$

我们常用的一个重要事实是, 如果 $\mathcal{F}$ 是一个超滤子并且 $f(\Omega)\subset K$ 是一个相对紧集, 那么 f 按 $\mathcal{F}$ 收敛, 特别地, 每个有界实值函数按照超滤子 $\mathcal{F}$ 收敛.

Banach 空间的超积 (ultraproduct) 是一个用无限维方法研究有限表示的合适工具, 先来回顾相关定义. 对一个非空集 Ω, 设 $\{X_\omega:\omega\in\Omega\}$ 为一族 Banach 空间并且 $\mathscr{U}$ 为 Ω 上的一个自由超滤子. 考虑 l_∞- 和空间 $(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega)_\infty$ 并定义如下半范数:

$$\|(x_\omega)\|_{\mathcal{U}}=\lim_{\mathcal{U}}\|x_\omega\|,\quad \forall\,(x_\omega)\in\left(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega\right)_\infty.$$

令

$$\mathcal{N}=\left\{(x_\omega)\in\left(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega\right)_\infty:\lim_n\|x_\omega\|_{\mathcal{U}}=0\right\},$$

则 $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ 诱导的商范数使其商空间

$$\prod_{\mathcal{U}}X_\omega=\left(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega\right)_\infty\Big/\mathcal{N}$$

为一个 Banach 空间. 这个空间被称为 $\{X_\omega:\omega\in\Omega\}$ 的超积或者超幂. $\prod_{\mathcal{U}}X_\omega$ 中的 (等价类) 元素将用 $[(x_\omega)]$ 或者 $\mathbf{x}=(x_\omega)_{\mathcal{U}}$ 表示, 其中代表元 $(x_\omega)\in(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega)_\infty$. 对一族子集 $\{A_\omega\subset X_\omega:\omega\in\Omega\}$, 其超积为

$$\prod_{\mathcal{U}}A_\omega=\left\{[(x_\omega)]:(x_\omega)\in\left(\sum_{\omega\in\Omega}\oplus X_\omega\right)_\infty,x_\omega\in A_\omega\,(\omega\in\Omega)\right\}.$$

特别地, 如果对所有的 $\omega\in\Omega$ 有 $X_\omega=X$ 和 $A_\omega=A$, 我们用 $A_{\mathcal{U}}$ 代表 A 的超积或者超幂.

下面定理在集合有限表示的研究中起到了非常关键的作用:

定理 2.2 [25] (i) 设 A 为 Banach 空间 X 的一个非空集, $\mathcal{U}$ 为某个集合 Ω 上的自由超滤子, 则 $A_{\mathcal{U}}$ 在 A 中有限表示;

(ii) 设 A 为 Banach 空间 X 的一个有界子集, 如果 Banach 空间 Y 中的一个子集 B 在 A 中有限表示, 则对每个仿射无关的子集 $B_0\subset B$, 存在超滤子 $\mathcal{U}$ 和一个仿射等距 $T:\mathrm{aff}(B)\to\mathrm{aff}(A)_{\mathcal{U}}$, 使得 $T(B_0)\subset A_{\mathcal{U}}$.

注 2.1 最近, 为了研究一个长期的公开问题, Chen 和 Cheng 1) 利用多面体代替单形引入了 Banach 空间中两个子集间的强有限表示的概念, 这个概念要严格强于有限表示的概念. Chen 和 Cheng 1) 证明了 Banach 空间中的每个子集 B 均存在可数子集 $B_0\subset B$ 使得

(i) B 在 B_0 中强有限表示 (特别地, 有限表示);

(ii) 存在一个超滤子 $\mathcal{U}$ 使得 B 是仿射等距于 $[\mathrm{co}B_0]_{\mathcal{U}}$ 的一个子集.

利用这些结果, 他们肯定地解决了非紧性测度理论中的公开问题: 设 M 是一个度量空间, $B\subset M$ 为一个有界子集, 是否存在 B 的一个可数子集 B_0 使得 Kuratowski 非紧性测度

$$\alpha(B)=\alpha(B_0)?$$

注 2.2 1) 特别地, 上面注记中的结论表明,

(i) 每个 Banach 空间均可在它的一个可分子空间中有限表示;

1) Chen X, Cheng L. On countable determination of the Kuratowski measure of noncompactness. Submitted, 2020

(ii) 如果 Banach 空间 Y 在 Banach 空间 X 中有限表示, 则存在一个超滤子 $\mathcal{U}$ 使得 Y 是线性等距于 $X_{\mathcal{U}}$ 的一个子空间;

(iii) 每个 Banach 空间 X 都存在一个可分子空间 X_0 和一个超滤子 $\mathcal{U}$ 使得

$$X_{\mathcal{U}} = [X_0]_{\mathcal{U}}.$$

2.2 超弱紧集的基本性质

有了集合之间有限表示的概念, 类似于 James 引入超自反空间的概念, 现在可以自然地引入超弱紧集的定义.

定义 2.2 称 Banach 空间 X 中的一个子集 A 是相对超弱紧的, 如果每个可在 A 中有限表示的 Banach 空间 Y 中的集合 B 是相对弱紧的, 特别地, 如果 A 还是弱闭的, 此时称 A 为超弱紧的.

定理 2.1 可立即导出下面的结果.

定理 2.3 一个 Banach 空间为超自反的当且仅当其闭单位球为超弱紧的.

根据定理 2.3 并注意 Banach 空间中范紧集的超幂仍为范紧集, 有下面的例子:

例 2.2 (i) 超自反空间中的每个有界集为相对超弱紧的;

(ii) Banach 空间中的每个紧集为超弱紧的.

注 2.3 (i) 需要注意的是超弱紧集的概念要严格弱于范紧集而严格强于弱紧集. 例如, 注意到空间 $E = (\prod_{n\geqslant 1} l_1^n)_2$ 是自反而非超自反的, 这样闭单位球 B_E 是弱紧而非超弱紧的.

(ii) 我们知道非自反 Banach 空间 l_1 可在自反 Banach 空间 $Y \equiv (\prod_{n\geqslant 1} l_1^n)_2$ 中有限表示, 从而由定理 2.1 知单位球 B_{l_1} 在 B_Y 中有限表示. 注意到 B_{l_1} 是非弱紧而 B_Y 是弱紧的, 由此得到一个非弱紧集可在弱紧集中有限表示的例子, 这说明弱紧性在有限表示下并不保持.

定理 2.4 [25] 设 A 是 Banach 空间 X 的一个非空子集, 则以下条件等价:

(i) A 是 (相对) 超弱紧的;

(ii) 对任意自由超滤子 $\mathcal{U}$, $A_{\mathcal{U}}$ 是 (相对) 弱紧的;

(iii) 对自然数集 $\mathbb{N}$ 上的某个自由超滤子 $\mathcal{U}$, $A_{\mathcal{U}}$ 是 (相对) 弱紧的;

(iv) 对任意自由超滤子 $\mathcal{U}$, $A_{\mathcal{U}}$ 是 (相对) 超弱紧的.

事实上, (ii) 中的任意超滤子可退化成 (iii) 中自然数集 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子的结论归于 Eberlein-Smulyan 定理: 弱紧性是可分决定的. 这一事实, 对超弱紧性也是对的, 即下面的定理:

定理 2.5 [25] Banach 空间中的一个集合为相对超弱紧的当且仅当其每个可分子集为相对超弱紧的.

以下结果表明相对超弱紧集在一些运算下具有良好的封闭性.

定理 2.6 [25] (i) 设 A 为 Banach 空间 X 中的一个相对超弱紧集, $T: X \to Y$ 为一个有界线性算子, 则 TA 为 Y 中的相对超弱紧集;

(ii) 设 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$ 为相对超弱紧集, 则乘积 $A \times B \subset X \times Y$ 为相对超弱紧集;

(iii) 设 $A, B \subset X$ 为两个相对超弱紧集合, 则 $A + B$ 也是相对超弱紧集;

(iv) 设 $A, B \subset X$ 为两个相对超弱紧集合, 则 $A \cup B$ 也是相对超弱紧集.

注意上面定理中的结论 (i) 是判定一个集合为相对超弱紧集的一个重要依据.

我们以下面的两个重要性质结束本节. 可以证明超弱紧集在弱闭包下是封闭的, 也就是如下定理:

定理 2.7 [25] Banach 空间中的一个集合 A 为相对超弱紧的 (当且) 仅当其弱闭包 $\overline{A}^w$ 是超弱紧的.

我们知道, 弱紧集的 Krein-Šmulian 定理表明弱紧集合的闭凸包还是弱紧的. 类似地, 对于超弱紧集, Cheng 等 [25] 提出了一个自然的问题: 对超弱紧集合而言, Krein-Šmulian 定理是否成立?

2.3 超弱紧集的特征

本小节主要介绍刻画超弱紧集的 3 种方法, 分别是 James 型树特征、Grothendieck 型定理和 James 型序列特征.

众所周知, James [1] 引入的树性质是刻画超自反性的一个非常有用的几何工具. James 树定理表明, 一个 Banach 空间是超自反的当且仅当其闭单位球不具有有限树性质. 以下将在超弱紧集上建立类似的刻画.

定义 2.3 设 $A \subset X$ 并且 $\varepsilon > 0$.

(1) 称 A 中的两个点 x_1 和 x_2 构成 A 的 $(1,\varepsilon)$- 树, 如果 $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$. 假设 $(n-1,\varepsilon)$- 树已被定义, 称 A 中的 2^n 点 $x_1,\ldots,x_{2^n} \in A$ 构成了 A 中的 (n,ε)- 树, 如果

(i) $\|x_{2i-1} - x_{2i}\| \geqslant \varepsilon$, $i = 1,\ldots,2^{n-1}$;

(ii) 中点 $\frac{x_{2i-1}+x_{2i}}{2}$ $(i = 1,\ldots,2^{n-1})$ 构成了 A 的凸包 $\mathrm{co}A$ 中的 $(n-1,\varepsilon)$- 树.

(2) 称 A 具有有限树性质, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, A 中存在 (n,ε)- 树.

(3) 称 A 具有一致有限树性质, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 和 A 中的一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 2^n 点 $x_1,\ldots,x_{2^n} \in A$ 构成了 A 中的 (n,ε)- 树.

根据定义, 容易得到下面的事实.

例 2.3 (i) 设 (e_j) 为 l_1 中的标准单位向量基, 则 $A = (e_j)$ 具有一致有限树性质;

(ii) 设 (e_j) 为 c_0 中的标准单位向量基, 则 $A = (e_j)$ 不具有有限树性质.

下面定理表明超弱紧集也具有 James 型的树特征定理.

定理 2.8 2) 设 $A \subset X$ 是一个有界集, 下面条件等价:

(i) A 是相对超弱紧的;

(ii) A 不具有有限树性质;

(iii) 对自然数集 $\mathbb{N}$ 上的任意自由超滤子 $\mathcal{U}$, $A_{\mathcal{U}}$ 不具有一致有限树性质.

弱紧集的 Grothendieck 定理表明, Banach 空间 X 的一个子集 A 是相对弱紧的当 (且仅当) 对每个 $\varepsilon > 0$ 存在一个相对弱紧集 B 使得 $A \subset B + \varepsilon B_X$, 这一准则对超弱紧集仍然成立, 它也是判定一个集合为超弱紧的一个有用的工具.

定理 2.9 [25] Banach 空间 X 的一个子集 A 是相对超弱紧的当 (且仅当) 对每个 $\varepsilon > 0$ 存在一个相对超弱紧集 B 使得

$$A \subset B + \varepsilon B_X.$$

现在转到超弱紧集合的 James 型序列特征, 前面的定理 2.4 表明, 判定一个集合 A 的超弱紧性可通过 A 的超幂 $A_{\mathcal{U}}$ 的弱紧性来反映; 而著名的 James 定理表明, $A_{\mathcal{U}}$ 的弱紧性可由超幂的对偶空间 $(X_{\mathcal{U}})^*$ 中的泛函在 $A_{\mathcal{U}}$ 上的上确界的可达性来刻画. 但是我们知道, 对一个非超自反空间 X 而言, 它的超幂的对偶空间 $(X_{\mathcal{U}})^*$ 要严格大于 $(X^*)_{\mathcal{U}}$, 这意味着 $(X_{\mathcal{U}})^*$ 中存在许多未知或者不可表示的元素, 这给利用 James 定理来研究 $A_{\mathcal{U}}$ 的弱紧性带来了很大困难. 另一方面, James 对弱紧性给出了一个纯粹从自身出发的序列特征刻画 (参见文献 [32, 定理 1]), Cheng 等 [25] 证明了超弱紧性也具有类似的 James 型序列特征, 这对于超弱紧集的刻画是极其有用的.

2) Cheng Q. Super weak compactness in Banach spaces. Preprint

定理 2.10 [25]　设 A 是 Banach 空间 X 中的一个子集, 则下面两条等价:

(i) A 不是相对超弱紧的;

(ii) A 具有一致有限的可分离性质, 即存在 $\theta > 0$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 可找到 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ 满足

$$\operatorname{dist}(\operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_j\}, \operatorname{co}\{x_{j+1}, \ldots, x_n\}) \geqslant \theta \quad (\forall\, 1 \leqslant j < n).$$

定理 2.10 的结论可用来直接构造非超弱紧集中的有限树. 类似于 James 在文献 [32, 定理 3] 中利用线性泛函给出的弱紧性的判定准则, 也可以给出超弱紧性的泛函特征刻画.

定理 2.11 [25]　设 A 是 Banach 空间 X 中的一个子集, 则下面两条等价:

(i) A 不是相对超弱紧的;

(ii) A 具有一致有限的双正交性质, 即存在 $\theta > 0$ 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 可找到 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ 和 $x_1^*, \ldots, x_n^* \in B_{X^*}$ 满足

$$\langle x_i^*, x_j \rangle = \begin{cases} \theta, & 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n, \\ 0, & 1 \leqslant j < i \leqslant n. \end{cases} \tag{2.2}$$

上面提供的超弱紧性的 3 类特征再加上相对超弱紧性对有界线性算子的保持性 (见定理 2.6(i)) 是判定一个集合为超弱紧的重要依据.

2.4　超弱紧集的例子

利用第 2.3 小节介绍的关于超弱紧集的特征, 可在非超自反空间中给出大量的超弱紧集的例子, 为方便起见, 本小节仅介绍在经典空间 c_0 和 $L_1[0,1]$ 中超弱紧集的例子.

例 2.4 [25]　(i) 设 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 c_0 中的标准单位向量基, 则 $A = \{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为相对超弱紧集;

(ii) l_p $(1 < p < \infty)$ 的闭单位球 B_{l_p} 视作 c_0 的子集时, 其为 c_0 中的一个相对超弱紧集;

(iii) 设 $A \subset c_0$ 满足对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ 使得

$$^\sharp\{n \in \mathbb{N} : |x(n)| \geqslant \varepsilon\} < N_\varepsilon, \quad \forall\, x \in A,$$

其中 $^\sharp B$ 表示集合 B 的势, 则 A 为相对超弱紧集.

证明　(ii) 显然包含了 (i) 的结论. 对于 (ii), 注意到恒同算子 $I : l_p \to c_0$ 是连续的以及 B_{l_p} 为超弱紧的, 根据定理 2.6(i) 可知, 有 $I(B_{l_p}) \subset c_0$ 为相对超弱紧的. 对于 (iii), 固定 $\varepsilon > 0$, 设 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ 使得对所有的 $x \in A$ 有 $^\sharp\{n \in \mathbb{N} : |x(n)| \geqslant \varepsilon\} < N_\varepsilon$, 则

$$A \subset N_\varepsilon \alpha C + \varepsilon B_X,$$

其中

$$\alpha = \sup\{\|x\| : x \in A\}, \quad C = \overline{\operatorname{co}}\{\mp e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

注意 C 是超弱紧的, 根据超弱紧的 Grothendieck 型定理 2.9, 我们得到 A 为相对超弱紧的.　□

例 2.5 (c_0 中的非超弱紧集)　在 c_0 中存在弱紧而非超弱紧的子集.

证明 选取序列 c_0 中如下定义的序列 $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

则由其构造知, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为弱零序列, 从而为相对弱紧集, 但利用定理 2.10 不难看出 A 不是相对超弱紧的. □

这个例子表明, 只要 K 为无限紧集, 则连续函数空间 $C(K)$ 上总存在弱紧而非超弱紧集. 这是由于 c_0 总是线性同胚于 $C(K)$ 的一个闭子空间 (参见文献 [33, 定理 12.30]). 设 T 为那样的线性同胚以及 A 为 c_0 中的一个弱紧而非超弱紧的集合, 根据定理 2.6(i) 可知, $TA\subset C(K)$ 是一个相对弱紧而非超弱紧的集合.

最近, Lancien 和 Raja [27] 研究了 c_0 中超弱紧集的刻画问题, 设 $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ 表示自然数集 $\mathbb{N}$ 的所有有限子集, χ_A 表示集合 A 上的特征函数.

命题 2.1 [27] 设 $I\subset[\mathbb{N}]^{<\omega}$ 为一族子集并且使得 $K=\{\chi_A : A\in I\}$ 为 c_0 中的一个超弱紧集, 则存在 $p\in\mathbb{N}$ 和 $a>0$ 使得

$$^\sharp\{A\cap B : A\in I\}\leqslant a(^\sharp A)^p,\quad \forall\, B\in[\mathbb{N}]^{<\omega}.$$

但注意上面结论只是 c_0 中某类特殊超弱紧集的一个必要条件, 到目前为止, 还没有 c_0 中超弱紧集的特征化定理.

例 2.6 [27] 对任意测度空间 (Ω,μ), $L_1(\Omega,\mu)$ 中的每个弱紧集均为超弱紧的.

2.5 Banach-Saks 性质

Banach-Saks 性质的研究始于 Banach 和 Saks 的工作 [34], 至今已有 80 多年的历史 (参见文献 [35–41]). 称 Banach 空间 X 中的有界集 K 为 Banach-Saks 集或者具有 Banach-Saks 性质, 如果 K 中的每个序列都具有平均收敛的子列, 即任取 $\{x_n\}\subset K$, 存在 $\{z_n\}\subset\{x_n\}$ 使得 $\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n z_j\}_n$ 在 X 中收敛. 进一步地, 称 K 具有超 Banach-Saks 性质, 如果每个可在 K 中有限表示的集合均为 Banach-Saks 集. 显然, 每个 Banach-Saks 集是相对弱紧的, 一个 Banach 空间为超自反的当且仅当其具有超 Banach-Saks 性质.

设 $\{x_n\}\subset X$ 弱收敛到 $x\in X$, 称其生成了一个 ℓ_1- 扩散模 (spreading model), 如果存在 $\gamma>0$ 使得对所有满足 $\sharp s\leqslant\min s\equiv\min\{j\in s\}$ 的有限集 $s\subset\mathbb{N}$ 和所有序列 $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$, 有

$$\Big\|\sum_{n\in s}a_n(x_n-x)\Big\|\geqslant\gamma\sum_{n\in s}|a_n|. \tag{2.3}$$

显然, c_0 中的标准单位基 $\{e_j\}$ 为一致弱零的. Grothendieck 准则表明, $C(K)$ 中有界序列的弱收敛等价于逐点收敛, 为了建立它的一致版本, Mercourakis [42] 引入了一致弱收敛的概念. 称序列 $\{x_n\} \subset X$ 一致弱收敛到 $x \in X$, 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, 使得对每个 $x^* \in B_{X^*}$, 有

$$\sharp\{n \in \mathbb{N} : |\langle x^*, x_n - x\rangle| \geqslant \varepsilon\} \leqslant n_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Mercourakis [42] 证明了一个有界集 K 为 Banach-Saks 集当且仅当其为相对弱紧的而且每个弱零序列均有一个弱一致收敛的子列, 这也等价于 K 为相对弱紧的并且 K 中没有弱收敛的序列生成一个 ℓ_1-扩散模 (参见文献 [41]). 利用这些结果, Cheng 等 [25] 证明了下面的定理:

定理 2.12 Banach 空间 X 中的一个有界集 K 具有超 Banach-Saks 性质当且仅当其为相对超弱紧的.

Szlenk [35] 证明了 $L_1[0,1]$ 中的每个弱紧集具有 Banach-Saks 性质, 注意到 $L_1[0,1]$ 中的每个弱紧集为超弱紧的, 由此知 $L_1[0,1]$ 中的每个弱紧集实际上具有超 Banach-Saks 性质.

推论 2.1 $L_1[0,1]$ 中的每个弱紧集具有超 Banach-Saks 性质.

注 2.4 我们知道 Banach 空间中集合 K 的弱紧性可用 K 中任意子列是否有弱收敛子列来刻画, 对于超弱紧性, 自然的问题是, 超弱紧性与一致弱收敛是否也有此对应关系? 事实是, 如果 $\{x_n\}$ 是弱一致收敛的, 则由例子 2.4(iii) 知其为相对超弱紧的, 但另一方面, 超弱紧集中的弱收敛不一定为一致弱收敛的. 实际上, 我们可在 c_0 中构造一个弱零序列 $\{x_n\}$ 使得其为相对超弱紧的但是它不是一致弱收敛的 2).

3 超弱紧凸集

本节考虑凸的超弱紧集. 研究表明, 在凸集的情形下, 超弱紧集具有更好的几何和拓扑性质. 此时, 凸的超弱紧集继承了超自反空间那些涉及 "良好" 范数和 "良好" 凸函数等存在性的更加深刻的性质. 例如, 凸的超弱紧集上的 Enflo 再赋范定理成立. 这一结果是本节的核心结果, 也是整个超弱紧集理论的核心结果之一. 以此结果为基础, 可进一步产生凸的超弱紧集的指标特征等结果; 另一方面, 凸的超弱紧集也为研究超弱紧生成空间提供了极大的方便. 我们也举例表明 (见例子 5.1), 有些超弱紧性质, 凸性假设是必须的.

3.1 超弱紧凸集上的 Enflo 再赋范定理

1936 年, Clarkson 引入了一致凸 Banach 空间概念, 指出像 Hilbert 空间一样, 取值于一致凸 Banach 空间的向量测度的 Radon-Nikodym 定理仍然成立. Clarkson 开创了从 Banach 空间单位球的几何结构研究 Banach 空间性质的方法. 一致凸 Banach 空间具有很直观的几何意义, 它表明, 对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得单位球面上的任意两点的距离只要不小于 ε, 则这两点连线在单位球内对应的弧高就不小于 δ. 具体地说, 一个 Banach 空间 X 被称为是一致凸的, 如果对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x, y \in B_X$ 满足 $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, 则

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

这等价于 X 的凸性模 δ_X 在 $(0,2]$ 上总是正的, 这里

$$\delta_{(X,\|\cdot\|)}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

另一个经常用到的是如下的齐次特征: X 是一致凸的当且仅当对每个 $x_n, y_n \in B_X$, 有

$$2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) - \|x_n + y_n\|^2 \to 0 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0.$$

James[1] 在 1972 年引入了超自反空间的概念并证明了每个一致凸空间是超自反的. 反之, Enflo[2] 证明了每个超自反空间 X 均可找到一个等价范数 $|\cdot|$ 使 $(X, |\cdot|)$ 为一致凸空间 (此时称 X 可一致凸化). 随后在 1975 年, Pisier[3] 利用鞅技术将 Enflo 的再赋范定理改进为定量化的结果: 每个超自反空间 X 均可找到一等价范数 $|\cdot|$ 使得其具有指数型的凸性模, 即存在常数 $c > 0$ 和 $2 \leqslant q < \infty$ 使得

$$\delta_{(X,|\cdot|)}(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, \quad \forall\, \varepsilon \in [0, 2].$$

Enflo 和 Pisier 的再赋范定理是超自反空间的基本定理之一, 也是再赋范理论的里程碑. 自 20 世纪 70 年代开始, 人们从各种不同的角度出发去推广和局部化 Enflo 再赋范定理 (也考虑 Pisier 再赋范的问题), 如 Beauzamy[14] 的算子版的再赋范、Raja[22] 和 Fabian 等[24] 的具有有限指标性质集合的再赋范及 Cheng 等[13] 的关于超弱紧凸集的再赋范. 本节先介绍局部化的再赋范结果.

3.1.1 指标途径的再赋范

Lancien[23] 发展了 Cantor 导数的概念, 定义了 Banach 空间单位球及其对偶单位球的 Szlenk 指标和弱 Szlenk 指标. 特别地, 以这些指标作为工具, 他在 1995 年给出了 Pisier 再赋范定理的一个简单而且是几何途径的证明. 之后, Raja 在 2008 年和 Fabian 等在 2009 年将 Lancien 的指标性质局部化到一般集合上, 并建立了 Enflo 形式的再赋范结果. 下面先回顾相应概念.

设 A 是 Banach 空间 X 的一个子集, 给定 $x^* \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. 称集合 $S = \{x \in X : x^*(x) > \alpha\}$ 为一个切片.

可凹性指标 (dentability index) 定义

$$D'_\varepsilon(A) = \{x \in A : \|\cdot\| - \mathrm{diam}(S \cap A) > \varepsilon,\ \text{满足 } x \in S \text{ 的所有切片 } S\}.$$

归纳地, 定义

$$D_\varepsilon^{n+1}(A) = (D_\varepsilon^n(A))'.$$

集合 A 的可凹性指标定义为

$$D(A, \varepsilon) = \min\{n : D_\varepsilon^n(A) = \emptyset\}, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

定理 3.1[23] Banach 空间 X 存在一个等价范数使其具有指数型凸性模等价于 X 具有有限指标性质, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$D(B_X, \varepsilon) < \infty.$$

Lancien[23] 指出, 虽然可证明每个一致凸空间具有有限指标性质, 但是如果不用 Enflo 的再赋范结果, 我们仍然缺少一个直接的证明去表明每个超自反空间具有有限指标性质. 2006 年, Lancien 在文献 [43] 中指出, 如果将 James 的工作连同 Pisier 的关于超自反空间的鞅结果联合起来, 可以推出超自反空间具有有限指标性质, 其证明思路如下: 如果 X 是超自反的, 那么空间 $L_2(X)$ 也是超自反的, 然后利用 $L_2(X)$ 中的鞅差以及 James 关于超自反空间基序列的定量化估计, 便可得到超自反空间具有有限指标性质, 这个具体的证明也可以参见文献 [44]. 这样当联合 James 的工作和一些较为简单的鞅

差结果时, Lancien 实际上给出了 Pisier 再赋范结果的一个几何途径的证明, 它也包含了 Enflo 结果的一个不同途径的证明.

受 Lancien 的几何途径的启发, Raja 引入了如下概念.

定义 3.1 [22] 设 A 是 Banach 空间 X 的一个有界闭凸集. 称 A 是一个有限可凹集或者具有有限指标性质, 如果对每个 $\varepsilon>0$, 有 $D(A,\varepsilon)<\infty$.

定理 3.2 [22] 设 A 是 Banach 空间 X 的一个有界闭凸集合, 则以下两条等价:

(i) A 具有有限指标性质;

(ii) A 能够被一致凸化, 也就是在 X 上存在一个等价范数 $|\cdot|$, 使得只要 $x_n,y_n\in A$ 满足

$$2(|x_n|^2+|y_n|^2)-|x_n+y_n|^2\to 0,$$

则 $|x_n-y_n|\to 0$.

特别地, Raja [22] 利用上面的再赋范结果证明了局部版的 Cepedello-Boiso 结果 (参见文献 [45]): 具有有限指标集合上的任意一个 Lipschitz 函数均可用一列 Δ- 凸函数一致逼近. 设 X 是一个 Banach 空间, $M\subset X$ 是一个有界子集, 考虑对偶空间在 M 上的一致收敛性度量, 即对 $f\in X^*$, 有

$$|f|_M=\sup_{x\in M}|f(x)|;$$

对有界集 $S\subset X^*$, 定义

$$\rho_M(S)=\sup\{|f-g|_M:f,g\in S\}$$

为 S 针对 M 的直径. 给定 $D\subset B_{X^*}$ 和有界子集 $M\subset X$ 以及 $\varepsilon>0$, 定义如下的导集:

$$D'_{(M,\varepsilon)}=\{x^*\in D:\rho_M(S)\geqslant\varepsilon\},$$

其中 S 为包含 x^* 的关于 D 的任一弱 $*$ 切片, 一个集合的弱 $*$ 切片就是此集合与一个弱 $*$- 开半空间的交. 归纳地, 定义

$$(D)^{(n)}_{(M,\varepsilon)}=(D^{(n-1)}_{(M,\varepsilon)})'_{(M,\varepsilon)}.$$

对 $D=B_{X^*}$, Fabian 等 [24] 给出了如下定义:

定义 3.2 设 $M\subset X$ 是一个有界集, 称 M 具有有限对偶指标性质, 如果对每个 $\varepsilon>0$ 都存在某个 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $(B_{X^*})^{(n)}_{(M,\varepsilon)}=\emptyset$.

当 $M=B_X$ 时, Lancien 已经考虑如上定义的导集, 证明了一个 Banach 空间可一致凸化 (等价地, 可一致光滑化或者一致 Frechet 可微) 当且仅当其单位球具有有限对偶指标性质. 2009 年, Fabian 等 [24] 精细了 Lancien 的工作 [23], 证明了如下定理:

定理 3.3 [24] 设 M 是 Banach 空间 X 的一个有界子集, 则以下两条等价:

(i) X 上存在一个等价范数 $|\cdot|$ 使得它是 M- 一致 Gâteaux 光滑的;

(ii) M 具有有限对偶指标性质.

设 $M\subset B_X$, 称范数 $\|\cdot\|$ 是 M- 一致 Gâteaux 光滑的, 如果当 $t\to 0^+$ 时,

$$\frac{\rho_M(t)}{t}\to 0,$$

其中 ρ_M 定义为

$$\rho_M(t) = \sup\{\|x + ty\| + \|x - ty\| - 2 : x \in S_X, y \in M\}, \quad t \in (0, \infty);$$

如果还有 $\overline{\mathrm{span}} M = X$, 此时称范数 $\|\cdot\|$ 是强一致 Gâteaux 光滑的.

注 3.1 (i) Raja 和 Fabian 等从集合的有限指标性质出发, 获得了这类集合上的再赋凸性和光滑性的结果, 一个自然的问题是, 不具有 James 有限树性质的集合或者超弱紧集是否具有有限指标性质？这个问题在集合为单位球时是肯定的, 即超自反空间的单位球是具有有限指标性质的, 证明需要用到 James 基序列估计等手段, 但对于一般的超弱紧集而言, 因缺少相应的定量化估计 (很可能没有) 使得这个问题没有现成的答案.

(ii) 另外, Raja 的指标性质对于一般的非凸集合是失效的, 因为存在非凸集合具有有限指标性质, 但是其凸包不再具有有限指标性质 (例子可参见文献 [22, 25]); 而 Fabian 等关于有界集 M 的有限对偶指标性质的定义则直接蕴涵了其凸包也是具有有限对偶指标性质的.

(iii) Raja 和 Fabian 等构造所要的一致凸和一致光滑的范数的过程比 Lancien 的文章要来得简单些, 部分原因是他们不需要对所构造的范数的凸性模有很好的控制关系.

3.1.2 超弱紧集的再赋范

现在转到超弱紧集合的再赋范介绍, 即介绍 Cheng 等 [13] 建立的超弱紧凸集合上的 James-Enflo 定理. 特别地, 此结果建立了超弱紧集、指标性质与再赋范的密切联系. 下面回顾几个定义.

设 C 为 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集, f 为 C 上的一个凸函数. f 被称为是一致凸的, 如果对每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得

$$x, y \in C \quad 和 \quad \|x - y\| \geqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \delta. \tag{3.1}$$

特别地, C 被称为是一致凸的, 如果对每个 $z \in C$, $f_z \equiv \|\cdot - z\|^2$ 在 C 上是一致凸的; C 被认为是可一致凸化的, 如果 C 上存在一个一致凸函数. 在此定义下, 一个 Banach 空间 X 是一致凸的当且仅当其单位球 B_X 是一个一致凸集.

著名的 Davis-Figiel-Johnson-Pełczýnski 定理 [46] 表明 Banach 空间中的每个弱紧集合均可线性弱嵌入进某个自反的 Banach 空间, 此定理是局部嵌入问题的杰出代表.

定理 3.4 [46] 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, K 是 X 的凸对称有界子集. 对 $n \in \mathbb{N}$, 设 $U_n = 2^n K + 2^{-n} B_X$. 用 $\|\cdot\|_n$ 代表由 U_n 生成的 Minkowski 泛函, 即

$$\|x\|_n = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U_n\}.$$

设 $Y = \{x \in X : |x| < \infty\}$, 其中 $|x|$ 被定义为

$$|x| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

再设 $j : Y \to X$ 是自然包含映射, 则

(i) $(Y, |\cdot|)$ 是 Banach 空间;

(ii) $K \subset B_{(Y,|\cdot|)}$;

(iii) $(Y, |\cdot|)$ 是 Banach 空间并且 j 是连续的;

(iv) $(Y, |\cdot|)$ 是自反的当且仅当 K 是 X 的相对弱紧集.

上面的定理直接蕴涵了弱紧集向自反空间的弱嵌入结果:

定理 3.5 [46] Banach 空间中的每个弱紧集均可线性弱同胚于某个自反 Banach 空间中的一个弱紧集.

遗憾的是, 从超弱紧凸集出发, Davis-Figiel-Johnson-Pełczýnski 定理产生的自反 Banach 空间 Y 一般不再是超自反的, 而且超弱紧集也一般不再线性弱同胚于某个超自反 Banach 空间中的某个超弱紧集, 反例如下:

例 3.1 [22] 设 $X=(\sum_{k=2}^{\infty} l_k)_2$ 和 $K=\prod_{k=2}^{\infty} 2^{-k} B_{l_k}$, 则由超弱紧集的 Grothendieck 型特征知 K 是一个 (凸对称) 超弱紧集, 但是 K 不能线性弱同胚于任意超自反空间中的一个超弱紧集.

2010 年, Cheng 等 [13] 对 Davis-Figiel-Johnson-Pełczýnski 定理给出了两个简单但是重要的发现:

(i) 在 Davis-Figiel-Johnson-Pełczýnski 定理中, 如果 $K\subset(X,\|\cdot\|)$ 是一个对称超弱紧凸集, 那么空间 Y 的闭单位球 B_Y, 被视作是 $(X,\|\cdot\|)$ 的一个子集时, 是超弱紧的.

(ii) 在集合 K 上, 范数 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 生成的拓扑是一致的.

上面的结果 (ii) 使得弱紧集的弱嵌入定理可改进为强嵌入, 也就是下面的定理:

定理 3.6 [13] Banach 空间的每个弱紧集均可线性同胚于某个自反 Banach 空间的一个弱紧集.

下面给出超弱紧集的嵌入定理, 它在构造超弱紧凸集上所需要的 Enflo 型的范数时起了非常关键的作用.

定理 3.7 [13] 设 K 是 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的一个非空对称超弱紧凸集, 则存在自反 Banach 空间 $(Y,|\cdot|)$ 使得

(i) $K\subset B_{(Y,|\cdot|)}\subset X$;

(ii) 在 Y 上 $|\cdot|$- 拓扑要严格强于 $\|\cdot\|$- 拓扑, 特别地, 范数 $|\cdot|$ 关于范数 $\|\cdot\|$ 是一致凸的, 即对每个 $|\cdot|$- 有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$, 如果

$$2(|x_n|^2+|y_n|^2)-|x_n+y_n|^2\to 0,$$

则 $\|x_n-y_n\|\to 0$;

(iii) 限制在集合 K 上, 范数 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 生成的拓扑是一致的, 特别地, $(K,|\cdot|)$ 是一致凸的.

现在给出本节的主要定理:

定理 3.8 [13] 设 K 为 Banach 空间 X 的一个超弱紧凸集, 则存在 X 上的一个等价范数 $|\cdot|$ 使得 $(K,|\cdot|)$ 是一致凸的.

注意在上面定理中, 当 $K=B_X$ 时此结果即为 Enflo 再赋范结果. 定理 3.8 的证明较长, 我们仅阐述其证明思路:

(1) 注意超弱紧集 $K\subset(X,\|\cdot\|)$ 不具有有限树性质, 然后充分利用 Enflo 的超自反空间的闭单位球不具有有限树性质来构造一致凸范数的技术, 我们证明了在 $E_K=\mathrm{span}K$ 上存在一个一致凸函数.

(2) 上面的结论联合定理 3.7, 导出存在一个自反的 Banach 空间 $(Y,|\cdot|)$, 其包含 K, 使得在 $(Y,|\cdot|)$ 上 $|\cdot|$ 关于 $\|\cdot\|$ 是一致凸函数 (不是关于 $|\cdot|$). 当限制在 K 上时, $f=|\cdot|^2$ 为一致连续的一致凸函数.

(3) 利用传递技术, 对每个整数 $n\geqslant 1$, 设 f_n 为如上的 f 和 $n\|\cdot\|$ 的下卷积, 也就是

$$f_n(x)=\inf\{f(y)+n\|x-y\|: y\in X\},\quad x\in X.$$

通过考虑 f_n 的凸性和一致收敛性以及由它们生成的级数, 我们可导出一个具有更好凸性的凸函数 $h: X\to\mathbb{R}$, 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant h(x)\leqslant\beta\|x\|,\quad x\in X,$$

并且在每个固定的 $m \in \mathbb{N}$, h 在 mK 上是一致凸的.

(4) 最后设 $B = \{x \in X : h(x) \leqslant 1\}$, 再设 $|||\cdot|||$ 是由 B 产生的 Minkowski 泛函, 则 $|||\cdot|||$ 是 X 上的一个等价范数. 特别地, 它限制在 K 上是一致凸的.

可以证明只要一个有界闭凸集 K 上存在一个有界的一致凸函数, 则其为超弱紧集 (参见文献 [13]), 特别地, 一致凸集为超弱紧集, 也就是模拟版的 James 定理成立. 这样对于超弱紧集, 我们得到了 James 和 Enflo 关于超自反情形的局部版的结果:

定理 3.9 [13] 设 $K \subset X$ 为一个有界闭凸集, 则 K 为超弱紧的当且仅当存在 X 上的一个等价范数使得其在 K 上为一致凸的.

3.2 超弱紧凸集的等价特征

利用超弱紧凸集上的再赋范结果 (定理 3.8), 可以证明对于凸集而言, Raja [22] 引入的有限指标性质、Fabian 等 [24] 引入的有限对偶指标性质和 Cheng 等 [13] 引入的超弱紧集的概念是等价的.

定理 3.10 [25] 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集, 则以下条件等价:

(i) K 为超弱紧集;

(ii) K 具有有限指标性质;

(iii) K 具有有限对偶指标性质.

称一个 Banach 空间具有不动点性质 (fixed point property, FPP), 如果定义在此空间中的每个有界闭凸集到其自身的非扩张映射均有不动点. Banach 空间 Y 称为具有超不动点性质, 如果每个在 Y 中有限表示的 Banach 空间具有不动点性质. Maurey 首先证明了超自反空间对等距映射 (不一定线性) 具有超不动点性质. 之后, Elton 等 [47] 给出了 Maurey 定理的一个不同的证明, 其中 Pisier 的关于超自反空间可再赋指数型模的结果在证明中起了关键作用; Dulst 和 Pach [48] 证明了 Maurey 定理的逆也是正确的, 这样他们的结果给出了超自反性在等距映射下的一个超不动点刻画.

尽管 Maurey 定理表明超自反空间中的每个有界闭凸集对等距映射均有不动点, 但是遗憾的是, 这一结果对于非超自反空间中的一般超弱紧凸集不再成立 (其原因可能是, 在一般的超弱紧凸集上类似的 Pisier 再赋范结果不再成立), 如下 Alspach 的反例说明了这个结论.

例 3.2 [49] 设 $C = \{f \in L_1[0,1] : 0 \leqslant f \leqslant 2 \text{ a.e.}\}$, 则 C 是弱紧的 (从而为超弱紧的) 凸集, 但是存在一个等距映射 $U : C \to C$ 使得它不具有一个不动点.

但是当对等距映射增加线性的假设时, Cheng 等 [50] 证明了如下的超不动点性质.

定理 3.11 [50] 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集, 则以下条件等价:

(i) K 为超弱紧的;

(ii) K 对仿射等距映射具有超不动点性质;

(iii) K 对线性等距映射具有超不动点性质.

Maurey 的结果再结合 Enflo 再赋范定理和 Browder 不动点定理也给出了超自反性的非扩张映射下的一个不动点刻画: 一个 Banach 空间为超自反的当且仅当其再赋范下具有超不动点性质. 利用超弱紧凸集的再赋范结果, Cheng 等 [50] 建立了超弱紧凸集上的类似结果.

定理 3.12 [50] 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集, 则以下两个条件等价:

(i) K 为超弱紧的;

(ii) 存在 X 上的一个等价范数使得 K 具有超不动点性质.

现在将 Cheng 等[13]、Raja[22]、Fabian 等[24] 和 Cheng 等[51,52] 的结果联合起来, 得到了超弱紧凸集的一系列等价特征, 这表明超弱紧性很好地遗传了超自反性的很多良好性质:

定理 3.13 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集, 则下列命题等价:

(1) K 是超弱紧的;

(2) K 不具有有限树性质;

(3) K 不具有一致有限可分离性质;

(4) K 可再赋范具有一致凸性;

(5) $K_{\mathcal{U}}$ 是弱紧的, $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子;

(6) K 具有有限指标性质;

(7) K 具有有限对偶指标性质;

(8) K 具有 Δ- 凸函数逼近性质;

(9) K 不具有一致有限双正交性质;

(10) K 具有超 Banach-Saks 性质;

(11) K 可再赋范具有 M- 一致 Gâteaux 光滑性.

4 超弱紧算子与超弱紧生成空间

4.1 超弱紧算子

弱紧算子作为对自反空间的推广已被广泛研究, 定义在两个 Banach 空间之间的一个线性算子 $T: X \to Y$ 被称为是弱紧算子, 如果 TB_X 为 Y 中的相对弱紧集. 对应地, 作为对超自反空间概念的推广, 一致可凸化算子或等价的超弱紧算子, 已被 Beauzamy[14]、Heinrich[15]、Tacon[16]、Rosenthal[17]、Wenzel[18]、Pietsch[19]、Causey 和 Dilworth[20,21] 等研究. 下面回顾相关概念.

设 X 和 Y 是 Banach 空间, 称一个有界线性算子 $T: X \to Y$ 为超弱紧算子, 如果对自然数集 $\mathbb{N}$ 上的任意自由超滤子 $\mathcal{U}$, $T_{\mathcal{U}}: X_{\mathcal{U}} \to Y_{\mathcal{U}}$ 为弱紧算子, 其中

$$T_{\mathcal{U}}(x_n)_{\mathcal{U}} = (Tx_n)_{\mathcal{U}}, \quad \forall\, (x_n)_{\mathcal{U}} \in X_{\mathcal{U}}.$$

这样一个 Banach 空间为超自反的当且仅当其恒同算子 $I: X \to X$ 为超弱紧的, 因此, 上面的概念是超自反空间概念的一个自然推广. 特别地, 设 K 是 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 的一个有界闭凸对称子集 (不妨设 $K \subset B_X$), 再设 $E = \mathrm{span} K$ 和 $|\cdot|_K$ 为 K 生成的 Minkowski 泛函, 那么 K 是超弱紧的当且仅当恒同算子 $I: (E, |\cdot|_K) \to (X, \|\cdot\|)$ 为超弱紧算子.

Beauzamy[14] 和 Cheng 等[13] 的结果表明下面定理成立.

定理 4.1 设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则下列条件等价:

(i) T 是超弱紧的;

(ii) TB_X 为相对超弱紧集;

(iii) TB_X 不具有有限树性质;

(iv) T 的共轭算子 $T^*: Y^* \to X^*$ 是超弱紧的.

设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 称 T 可通过某个 Banach 空间 Z 因子分解, 如果存在 $T_1 \in \mathcal{B}(X, Z)$ 和 $T_2 \in \mathcal{B}(Z, Y)$, 使得 $T = T_2 T_1$. 这种现象在 Banach 空间理论中不仅是有趣而且是重要的. 著名的 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理表明[46]: 弱紧算子可通过自反 Banach 空间因子分解. 比照地, 一个自然

的问题是, 超弱紧算子是否可通过某个超自反空间因子分解? Beauzamy [14] 率先研究了这一问题并用反例给出了否定的回答. 之后, 文献 [18, 例 3] 和 [21, 命题 6.8] 给出了更多的反例. 特别地, 文献 [21, 注 6.9] 构造了一个紧算子 (也是超弱紧算子), 它不能通过任意具有有限余型的 Banach 空间因子分解.

例 4.1 [21] 定义 $T: c_0 \to c_0$ 为

$$T\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\bigg) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n e_n,$$

其中

$$t_n = \frac{1}{1+\log(n+1)} \quad (n=1,2,\ldots).$$

显然 T 为紧算子, 但是对任意 $2<q<\infty$, 有

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\bigg\|\sum_{n=1}^{s} \varepsilon_n e_n\bigg\| = 1$$

和

$$\sup_{s\in\mathbb{N}} \bigg(\sum_{n=1}^{s} \|Te_n\|^q\bigg)^{\frac{1}{q}} \geqslant \sup_{s\in\mathbb{N}} \frac{s^{\frac{1}{q}}}{\log(s+1)} = \infty.$$

这样, T 不具有有限余型, 因此, T 不能通过任意具有有限余型的 Banach 空间因子分解.

设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T: X\to Y$ 为一个有界线性算子, T 的凸性模被定义为

$$\delta_T(\varepsilon) = \inf\bigg\{1 - \bigg\|\frac{x+y}{2}\bigg\| : x,y\in B_X, \|Tx-Ty\| \geqslant \varepsilon\bigg\}.$$

类似地, T 的光滑模被定义为

$$\rho_T(\tau) = \sup\bigg\{\frac{\|x+Ty\|+\|x-Ty\|}{2} - 1 : y\in S_Y, x\in \tau B_X\bigg\}.$$

称 T 是一致凸的, 如果对每个 $\varepsilon\in(0,2\|T\|)$ 有 $\delta_T(\varepsilon)>0$. 称 T 是一致光滑的, 如果 $\lim_{\tau\to 0+}\frac{\rho_T(t)}{\tau}=0$. 类似于 Banach 空间具有指数型凸性模和指数型光滑模的定义, 我们可以定义算子 T 的指数型凸性模和指数型光滑模的概念. 显然, 一个 Banach 空间 X 为一致凸的当且仅当恒同算子 $I: X\to X$ 为一致凸的.

Beauzamy [14] 建立了如下算子版的 James-Enflo 再赋范定理.

定理 4.2 [14] 设 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, 则以下两条等价:

(i) T 是超弱紧的;

(ii) T 可一致凸化, 即存在 X 上的一个等价范数 $|\cdot|$ 使得 $T: (X,|\cdot|)\to Y$ 是一致凸的.

Beauzamy 的结果联合标准的对偶性论断实际上给出了 $T: X\to Y$ 是超弱紧的当且仅当 T 可一致光滑化, 也就是在 Y 上存在一个等价范数 $|\cdot|$ 使得 $T: X\to(Y,|\cdot|)$ 是一致光滑的, 当然也等价于 T 可一致凸化和一致光滑化.

但是 Pisier [3] 指出超弱紧算子不再具有超自反空间情形时的再赋指数型凸性模的结果, 反例可参见文献 [14] 和例 4.1. 另外在空间情形时, Pisier 证明了一个 Banach 空间为超自反的当且仅当其对某个 $p>1$ 具有鞅型 p, 但是对于算子而言此结果也不再成立. 这些否定的结果表明超弱紧算子与超自反空间具有重大的差异, 主要的原因可能在于, 对于算子的情形, 我们缺少一个合适的 J- 凸性的概

念以及鞅型理想范数的次可乘性不再适用. 为了克服上述困难, 并寻找一些类似的替代物, Wenzel [18] 引入了鞅 (余) 型理想范数和 Haar (余) 型理想的概念 (相应概念可参见文献 [18]). 他的结果联合 Beauzamy [14] 的结论有如下定理:

定理 4.3　设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则以下等价:

(1) T 是超弱紧的;

(2) T 具有鞅子型;

(3) T 具有鞅子余型;

(4) T 具有 Haar 子型;

(5) T 具有 Haar 子余型;

(6) T 不能一致因子通过有限加和算子 $\sum_n$;

(7) T 是可一致凸化的;

(8) T 是可一致光滑化的;

(9) $[L_2, T]$ 是一致可凸化的.

Hoffman [53]、Figiel 和 Pisier [54] 建立了空间具有指数型凸性模和指数型光滑模的齐次特征, Cheng 和 Cheng [13] 证明了算子的情况也是成立的, 这统一了 Pisier [3] 关于算子指数型模的定义和 Wenzel [55] 关于 p- 一致光滑和 q- 一致凸的概念.

定理 4.4　设 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, 则

(i) 对某个 $1 < p \leqslant 2$, T 具有指数为 p 的光滑模等价于存在 $c > 0$ 使得

$$\|y + Tx\|^p + \|y - Tx\|^p \leqslant 2\|y\|^p + c\|x\|^p, \quad \forall\, x \in X, \quad y \in Y;$$

(ii) 对某个 $2 \leqslant q < \infty$, T 具有指数为 q 的凸性模等价于存在 $c > 0$ 使得

$$c\|Tx - Ty\|^q \leqslant 2^{q-1}(\|x\|^q + \|y\|^q) - \|x - y\|^q, \quad \forall\, x, y \in X.$$

4.2　超弱紧生成空间

我们知道, 弱紧生成 Banach 空间是 Banach 空间家族中一类重要的 Banach 空间, 这一概念推广了可分 Banach 空间的概念并保持了其良好的几何和拓扑结构. 一个 Banach 空间 X 被称为是弱紧生成的 (weakly compactly generated, WCG), 如果存在一个弱紧集 $A \subset X$ 使得 $\overline{\operatorname{span}} A = X$. WCG 空间的研究开始于 Amir 和 Lindenstrauss 的重要论文 [56], 现在 WCG 空间理论已发展成为一个内容极其丰富的领域 (参见文献 [33, 57–59]).

2015 年, Cheng 等 [50] 为了在更广泛的框架下研究超弱紧集理论, 引入了 “超弱紧生成空间” 的概念.

定义 4.1　称 Banach 空间 X 是超弱紧生成的 (super weakly compact generated, SWCG), 如果存在超弱紧集 $A \subset X$ 使得 $\overline{\operatorname{span}} A = X$.

由于超弱紧集对闭凸包是封闭的 (参见文献 [27]), 因此, 在超弱紧生成空间的概念中不妨设生成集 K 为对称凸的超弱紧集. 显然, 可分 Banach 空间和超自反空间是 SWCG, 另外对任意的集合 Γ, $c_0(\Gamma)$ 也是 SWCG, 这是由于恒同映射 $j : l_2(\Gamma) \to c_0(\Gamma)$ 的像在 $c_0(\Gamma)$ 中是稠密的. 著名的 Davis-Figiel-Johnson-Pełczýnski 定理导出了 WCG 空间如下的漂亮特征 (参见文献 [59]):

定理 4.5　设 X 是一个 Banach 空间, 则下列条件等价:

(i) X 是弱紧生成的;

(ii) 存在一个 Banach 空间 Z 和弱紧算子 $T: Z \to X$ 使得 TZ 为 X 的稠密集;

(iii) X 是自反生成的, 即存在一个自反的 Banach 空间 Z 和弱紧算子 $T: Z \to X$ 使得 TZ 为 X 的稠密集.

对应地, 对于超自反空间的情形, 最具代表性的结果是如下的 Fabian 等[60] 的结果 (一些用了现在的超弱紧语言叙述).

定理 4.6[60] 设 X 是一个 Banach 空间, 考虑下面命题:

(i) X 是 Hilbert 生成的;

(ii) X 是超自反生成的;

(iii) X 是超自反的 l_2- 和生成的;

(iv) X 是超弱紧生成的;

(v) X 是一个 Hilbert 生成空间的子空间,

则 (i)$\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)$\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v), 但是反过来的蕴涵关系都不对.

根据文献 [57, 推论 2] 的结果, 我们可得到 $L_1(\mu)$ 是超弱紧生成的当且仅当 μ 是 σ- 有限的. Rosenthal[61] 证明了存在一个有限测度 μ 使得 $L_1(\mu)$ 包含一个子空间不是弱紧生成的, 这否定地回答了 Lindenstrauss 的问题 (参见文献 [57, 问题 1]): 弱紧生成空间的子空间是否是弱紧生成的? 由于 $L_1(\mu)$ 也为超弱紧生成的, 这样 Rosenthal 的反例也同样表明了超弱紧生成空间的子空间不一定为超弱紧生成的.

1968 年, Amir 和 Lindenstrauss[56] 在研究 WCG 空间理论时引入了一种称之为单位算子的投影分解 (projectional resolution of identity, PRI) 的性质: 设 X 是稠密特征为 $\aleph$ (即 X 的稠密子集的最小基数) 的不可分 Banach 空间, μ 是 $\aleph$ 的第一序数. 称 X 上的一个有界线性投影超限序列 $\{P_\alpha\}_{\omega_0\leqslant\alpha\leqslant\mu}$ 为 PRI, 如果它满足下列条件:

(i) $\|P_\alpha\| = 1, \forall\, \alpha \in (\omega_0, \mu]$;

(ii) $\mathrm{dens}(P_\alpha X) \leqslant \mathrm{card}\alpha, \forall\, \alpha \in [\omega_0, \mu]$;

(iii) $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_{\min\{\alpha,\beta\}}$, $P_{\omega_0} \equiv 0, P_\mu$ 是恒等算子, $\forall\, \alpha, \beta \in [\omega_0, \mu]$;

(iv) $\overline{\bigcup_{\beta<\alpha} P_{\beta_1} X} = P_\alpha X$, 如果 $\omega_0 < \alpha$.

Amir 和 Lindenstrauss[56] 证明了弱紧生成空间中存在 PRI, 这对不可分弱紧生成空间的研究以及 Markushevich 基的构造起到了关键性作用. 特别地, Amir 和 Lindenstrauss 建立了如下著名的弱紧生成空间的表示定理:

定理 4.7 设 X 是弱紧生成空间, 则存在指标集 Γ 和一个单的有界线性算子 $T: X \to c_0(\Gamma)$.

这表明任意 Banach 空间的弱紧集均可 “生活在” 在某个具体的坐标空间 $c_0(\Gamma)$ 中, 这肯定地解决了 Corson 和 Lindenstrauss[62] 关于弱紧集在 $c_0(\Gamma)$ 中的表示问题, 这个结果对研究一般的弱紧集理论是非常有用的. 定理 4.7 直接蕴涵了所有的超弱紧集也 “生活在” 在某个具体的坐标空间 $c_0(\Gamma)$ 中:

定理 4.8 设 X 是超弱紧生成空间, 则存在指标集 Γ 和一个单的有界线性算子 $T: X \to c_0(\Gamma)$.

利用 PRI 方法, Amir 和 Lindenstrauss[56] 给出了弱紧生成空间的一个特征化定理:

定理 4.9 Banach 空间 X 是弱紧生成的 (当且) 仅当 X 存在弱紧的 Markushevich 基.

下面回顾一些相关概念, 设 X 是 Banach 空间, Γ 是非空集合. 称集族 $\{(x_\gamma, x_\gamma^*)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ 为 $X \times X^*$ 中的双正交系, 若满足

$$\langle x_\alpha, x_\beta^* \rangle = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

为方便起见, 常用 $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ 表示 $X\times X^*$ 的双正交系.

称 $X\times X^*$ 中的双正交系 $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ 为 Banach 空间 X 的 Markushevich 基 (简称 M- 基), 如果 $\overline{\mathrm{span}}\{x_\gamma; \gamma\in\Gamma\}=X$, 且 $\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{x_\gamma^*; \gamma\in\Gamma\}=X^*$; 称 Banach 空间 X 的 M- 基 $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是弱紧的, 如果 $\{x_\gamma; \gamma\in\Gamma\}\cup\{0\}$ 是弱紧的. 类似地, 我们可以定义超弱紧的 M- 基, 即 Banach 空间 X 的 M- 基 $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ 被称为是超弱紧的, 如果 $\{x_\gamma; \gamma\in\Gamma\}\cup\{0\}$ 是超弱紧的. 最近文献 [63] 证明了如下定理:

定理 4.10　Banach 空间 X 是超弱紧生成的 (当且) 仅当 X 存在超弱紧的 Markushevich 基.

下面转入关于超弱紧生成空间的再赋范特征的介绍. 众所周知, 弱紧生成空间具有丰富的再赋凸性和光滑性结果, 例如, 著名的 Troyanski 定理[64] 表明每个弱紧生成空间 X 上均存在一个等价的局部一致凸范数 (推广的结果参见文献 [58]). 根据定理 3.3 和 3.13 有下面的定理 (参见文献 [26, 定理 1.6]):

定理 4.11　一个 Banach 空间 X 是超弱紧生成的当且仅当其具有一个等价的强一致 Gâteaux 光滑的范数.

对每个 σ- 有限的测度 μ, $L_1(\mu)$ 是强超弱紧生成的. 如果 X 是超自反空间, 则 $L_1(\mu, X)$ 也是强超弱紧生成的. Fabian 等[24] 证明了在强超自反生成空间 X 上存在一个等价的范数使其限制在 X 中的每个弱紧集 M 上为 M- 一致 Gâteaux 光滑的 (参见文献 [24, 定理 7]). 这一结果被 Cheng 等[50] 推广到强超弱紧生成空间上:

定理 4.12　(i) 设 X 为强超弱紧生成的, 则 X 上存在一个等价的范数使其限制在 X 中的每个弱紧集 M 上为 M- 一致 Gâteaux 光滑的 (参见文献 [50]);

(ii) 设 X 为强超弱紧生成的, 则 X 上存在一个等价的范数使其限制在 X 中的每个弱紧集 M 上为一致凸的 (参见文献 [26]);

(iii) 设 X 为强超弱紧生成的, 则 X 上存在一个等价的范数使其限制在 X 中的每个自反的子空间上是一致凸和一致光滑的.

定理 4.13[50]　设 X 为强超弱紧生成的, 则 X 上存在一个等价的范数使得每个弱紧集合具有超不动点性质.

注 4.1[50]　(i) 定理 4.13 直接蕴涵了对每个 σ- 有限的测度 μ, $L_1(\mu)$ 具有一个等价的范数使其每个弱紧集具有超不动点性质.

(ii) 定理 4.13 的逆命题是不对的, 也就是一个 Banach 空间即使满足其中的每个弱紧凸集具有超不动点性质也不一定导出此空间为强超弱紧生成的, 甚至是弱紧生成的. 例如, 取 Γ 为不可数集, 则此时 $l_1(\Gamma)$ 不是弱紧生成的 (由于 $l_1(\Gamma)$ 是弱紧生成的当且仅当 Γ 为可数的), 但是 $l_1(\Gamma)$ 中的每个弱紧集为紧集从而其具有超不动点性质.

(iii) 强超弱紧生成空间不一定为超自反生成的 (参见文献 [26, 例 3.10]): 设 $\{p_k\}$ 是 $(1,2]$ 之间的全体有理点列的一个排列, 则空间

$$X=\left(\sum_{k=1}^{\infty} l_{p_k}(\omega_1)\right)_1$$

是强超弱紧生成的, 但不是超自反生成的.

5　超弱紧集的非线性性质

本节主要围绕以下两个关于超弱紧集的非线性嵌入问题展开介绍.

问题 5.1 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个超弱紧集, 是否 K 可一致嵌入进某个超自反空间?

问题 5.2 设 K 为 Banach 空间 X 中的一个超弱紧集, 是否 K 可弱嵌入 (即在弱拓扑意义下) 进某个超自反空间?

到目前为止, 问题 5.2 只获得了部分肯定的答案; 但问题 5.1 还是未知的, 显然此问题是与超弱紧集的度量特征有关. 我们先从超弱紧集的度量性质开始介绍.

5.1 超弱紧集的度量性质

绝对一致收缩: 绝对一致收缩的概念可以追溯到 Isbell [65, 66] 和 Lindenstrauss [67]. 设 Y 是一个度量空间并且 X 是 Y 的一个子集, 一个一致连续的映射 $r: Y \to X$ 被称为是一个一致收缩, 如果它限制在 X 上为恒同映射. 如果那样的一个一致收缩存在, 也称 X 为 Y 的一致收缩的. 一个度量空间 X 被称为是一个绝对一致收缩的, 如果它是每个等距包含它的度量空间的一个一致收缩. Lindenstrauss [67] 首先证明了超自反空间的闭单位球为绝对一致收缩的; 2004 年, Kalton [68] 指出超自反空间的每个有界闭凸集为一致收缩的. 他们的结果事实上表明了超自反空间中的每个有界闭凸集为绝对一致收缩的, 这是由于对所有的有界闭凸子集 $K \subset B_X$ (此时设 X 为一致凸的), 从 B_X 到 K 的最近点映射总是等度一致连续的.

最近, Cheng 等 [69] 证明了这一事实对非超自反空间中的超弱紧凸集也成立.

定理 5.1 Banach 空间中的每个超弱紧凸集是绝对一致收缩的.

2012 年, Kalton 在文献 [70, 定理 8.3] 中通过构造反例证明了 $L_1[0,1]$ 中存在一个无限维的闭子空间 Z 使得 B_Z 不是绝对一致收缩的, 这否定地回答了他在文献 [68] 提出的问题. 这个例子联合 $L_1[0,1]$ 单位球上的 Mazur 定理, 即 $B_{L_1[0,1]}$ 一致同胚于 B_{l_2}, 可以证明定理 5.1 中超弱紧凸集的凸性条件是不能省去的.

例 5.1 [69] 在 Hilbert 空间 l_2 中存在一个非凸的超弱紧集, 但它不是绝对一致收缩的.

称一个可分 Banach 空间 X 具有有界逼近性质 (bounded approximation property, BAP), 如果存在一列有界线性算子 $T_n: X \to X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = x, \quad \forall x \in X.$$

2004 年, Kalton [68] 在度量空间上引入了其非线性的类似概念. 设 (M,d) 为一个度量空间, 称 M 具有一致 (特别地, 一致紧) 逼近性质, 如果存在一列等度一致连续的映射 $\varphi_n: M \to M$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n x = x, \quad \forall x \in M,$$

而且对每个 $n \in \mathbb{N}$, 其像 $\varphi_n(M) \subset M$ 是有限维的 (特别地, 相对紧的). 这一概念与绝对一致收缩和商映射的一致连续的选择密切相关, 并在单位球的一致分类等问题上扮演了重要角色. 特别地, 他证明了每个可分超自反 Banach 空间中的每个有界闭凸集具有一致逼近性质 (参见文献 [68, 推论 9.4]). 最近, Cheng 等 [69] 将这一结果推广到一般的超弱紧集上:

定理 5.2 可分 Banach 空间中的每个超弱紧凸集具有一致逼近性质.

注 5.1 (i) 定理 5.1 和 5.2 主要用到的工具是超弱紧凸集上的 Enflo 再赋范定理和一致凸集上的凸性模性质刻画;

(ii) Kalton [68] 指出当限制在闭单位球上时, 一致紧逼近性质与一致逼近性质是等价的, 另外, 在可分 Banach 空间的范畴中, 我们还没有发现一个其单位球不具有一致紧逼近性质的例子. 有兴趣的读者可参见文献 [68, 定理 9.5] 和 [68, 第 34 页].

超弱紧集的 Bourgain 型度量特征: 1986 年, Bourgain [71] 利用任意高的二进树的嵌入性给出了超自反空间的度量特征, 这一结果是 Banach 空间非线性几何理论的一个里程碑之一; 之后, Johnson 和 Schechtman [72] 又利用钻石图或者 Laakso 图以及 Baudier [73] 利用无限高的单一二进树的嵌入性给出了超自反性的度量刻画. 2017 年, Causey 和 Dilworth [20] 在超弱紧算子上建立了超自反空间以上的类似特征; 最近, Lancien 和 Raja [27] 在他们的基础上又完成了超弱紧集的类似特征. 下面是超弱紧集上的 Bourgain、Johnson 和 Schechtman 型的度量特征:

定理 5.3 [27] 设 $K \subset (X, \|\cdot\|)$ 为一个有界子集, $\{(T_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是下面中的任意一族: 二进树、钻石图和 Laakso 图, 那么 K 不是相对超弱紧的当且仅当集族 $\{(T_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可一致分离嵌入进 X 并且使得嵌入像的平均落入 K 的绝对闭凸包中, 即存在 $\theta > 0$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 存在 $f_n : (T_n, d_n) \to X$ 满足

(i) $\|f_n(s) - f_n(t)\| \geqslant \theta d(s, t)$ $(s, t \in T_n)$;

(ii) $\mathrm{ave}(f_n) \subset \overline{\mathrm{aco}}(K)$,

其中

$$\mathrm{ave}(f_n) = \left\{\frac{f(s) - f(t)}{d(s, t)} : s, t \in T_n, s \neq t\right\}.$$

对于定理中涉及的二进树、钻石图和 Laakso 图的概念, 可参见文献 [20]. 这里仅介绍这些族中一类最简单的情形: 二进树. 对 $n \in \mathbb{N}$, 设 $T_n = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{0, 1\}^j$. 定义 T_n 上的一个自然的序关系: $s \preceq t \Leftrightarrow$ 序列 t 是序列 s 的扩张. 由此可引入 s 和 t 最大的祖先并记为 $a_{s,t}$. 对 $s \in T_n$, 用 $|s|$ 代表序列 s 的长度, 定义 T_n 上的距离如下:

$$d(s, t) = d(a_{s,t}, s) + d(a_{s,t}, t) = |s| + |t| - 2|a_{s,t}|. \tag{5.1}$$

直观上看, 当把 T_n 看成是一个图时 (两个序列是相连的当且仅当它们中的一个是另一个在序 $\preceq$ 下的立即前任), 这种距离正好是 T_n 上的图距离 (或者是最短的道路距离). 设 $T_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ 并且赋予如定义 (5.1) 的距离, 超弱紧集的 Baudier 型度量特征如下:

定理 5.4 [27] 设 $K \subset (X, \|\cdot\|)$ 为一个有界子集, 那么 K 不是相对超弱紧的当且仅当存在 $\theta > 0$ 和映射 $f : (T_\infty, d) \to X$ 使得

(i) $\|f(s) - f(t)\| \geqslant \theta d(s, t)$ $(s, t \in T_\infty)$;

(ii) $\mathrm{ave}(f) \subset \overline{\mathrm{aco}}(K)$.

5.2 超弱紧性与一致 Eberlein 紧

现在转到问题 5.2 的介绍. 1968 年, Amir 和 Lindenstrauss 引入了 Eberlein 紧的概念. 一个紧 Hausdorff 空间 K 被称为是 Eberlein 紧的, 如果存在某个指标集 Γ 使得 K 拓扑同胚于 $c_0(\Gamma)$ 中的一个弱紧集 (在弱拓扑意义下). 根据定义知, 具体空间 $c_0(\Gamma)$ 中的每个弱紧集为 Eberlein 紧的. Lindenstrauss [67] 指出在一般 Banach 空间理论中, Eberlein 紧的重要性在于它们不仅仅是弱紧集的例子而且包含了所有的弱紧集: Banach 空间中的每个弱紧集在弱拓扑意义下都是 Eberlein 紧的.

1976 年, Benyamini 和 Starbird [74] 引入了比 Eberlein 紧更强的一种紧性: 一致 Eberlein 紧. 一个紧 Hausdorff 空间 K 被称为是一致 Eberlein 紧的, 如果存在某个指标集 Γ 使得 K 同胚于 $c_0(\Gamma)$ 中的

一个弱紧集 (在弱拓扑意义下) $\widetilde{K}$, 使得对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ 满足

$$^\sharp\{\gamma\in\Gamma:|k(\gamma)|>\varepsilon\}<N_\varepsilon,\quad \forall\, k\in\widetilde{K}.$$

他们也举例表明 Banach 空间中存在弱紧集为 Eberlein 紧而非一致 Eberlein 紧的例子, 另外他们证明了如下定理:

定理 5.5 [74] 设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, 则以下论断等价:

(i) K 是一致 Eberlein 紧的;

(ii) K 同胚于某个超自反空间中的弱紧集 (在弱拓扑意义下);

(iii) K 同胚于某个 Hilbert 空间中的弱紧集 (在弱拓扑意义下).

更多一致 Eberlein 紧的研究可参见文献 [59, 60, 75, 76]. 对比 Eberlein 紧和弱紧集的关系, 一个自然的问题是, 设 K 为一个紧的 Hausdorff 空间, K 为一致 Eberlein 紧的是否等价于存在某个指标集 γ 使得 K 同胚于 $c_0(\Gamma)$ 中的某个超弱紧集 (在弱拓扑意义下)?

对此问题, 首先在 2008 年, Raja[22] 利用 Davis-Figiel-Johnson-Pelzyński 定理[46] 以及 Fabian 等[76] 关于 Banach 空间对偶单位球为一致 Eberlein 紧的特征定理, 证明了每个具有有限指标性质的有界闭凸集 (也就是现在的超弱紧凸集) 为一致 Eberlein 紧的; 另一方面, 2018 年, Cheng 等[25] 利用超弱紧集的 Grothendieck 型特征证明了一致 Eberlein 紧定义中涉及 $c_0(\Gamma)$ 中的集合 $\widetilde{K}$ 为超弱紧的, 这意味着每个一致 Eberlein 紧空间是同胚于 $c_0(\Gamma)$ 中的某个超弱紧集. 这再联合 Benyamini 和 Starbird[74] 的结果, 便得到超弱紧凸集的弱嵌入定理: 设 K 是 Banach 空间中的一个超弱紧凸集, 则 K 同胚于某个超自反 Banach 空间中的一个弱紧集 (在弱拓扑意义下).

研究表明弱紧生成空间也与 Eberlein 紧有着密切的联系, 大量这方面的结果可参见综述性文献 [59]. 对应地, 一致 Eberlein 紧的情形也被 Fabian、Godefroy、Hajek 和 Zizler 等研究 2) (参见文献 [59, 60, 77]), 现在用超弱紧集的语言统一叙述其中的一些结果.

定理 5.6 2) [24] 设 K 是一个紧 Hausdorff 空间, 那么下面条件等价:

(i) K 是一致 Eberlein 紧的;

(ii) $C(K)$ 是超弱紧生成的;

(iii) $C(K)$ 包含一个可分离 $C(K)$ 中点的超弱紧集;

(iv) $B_{C^*(K)}$ 是一致 Eberlein 紧的.

定理 5.7 [59, 76–78] 设 X 是一个 Banach 空间, 则下面条件等价:

(i) X 是超弱紧生成的;

(ii) 在 X 上存在一个等价的范数使得 X 为强一致 Gâteaux 光滑的;

(iii) X 是 Hilbert 生成空间的一个子空间;

(iv) 存在指标集 Γ, 使得 B_{X^*} 在弱 $*$ 拓扑下是仿射同胚于 $c_0(\Gamma)$ 中的某个超弱紧集 (在弱拓扑意义下);

(v) $C(B_{X^*})$ 是 Hilbert 生成的.

定理 5.8 [63, 76, 78] 设 X 是一个 Banach 空间, 则下面条件等价:

(i) X 是超弱紧生成空间的一个子空间;

(ii) 在 X 上存在一个等价的范数使得 X 为一致 Gâteaux 光滑的;

(iii) B_{X^*} 在弱 $*$ 拓扑下是一致 Eberlein 紧的;

(iv) $C(B_{X^*})$ 是超弱紧生成的.

定理 5.9 [76] 设 X 是一个 Banach 空间并且其稠密集的势为 ω_1, 则下面条件等价:

(i) X 是超弱紧生成的;

(ii) 存在一个指标集 Γ 和一个单的有界线性算子 $T: X^* \to c_0(\Gamma)$, 使得它是弱 $*$- 弱连续的, 并且使得对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足

$$^\sharp\{\gamma \in \Gamma : |Tf(\gamma)| > \varepsilon\} \leqslant n, \quad \forall f \in B_{X^*}.$$

6 尚待解决的问题

问题 6.1 给出一些经典空间如 c_0、$c_0(\Gamma)$ 和 $C(K)$ 中超弱紧集的特征.

问题 6.2 对超弱紧集而言, Krein-Šmulian 型定理是否成立? 也就是如果 K 为 Banach 空间 X 的一个超弱紧集, $\overline{\mathrm{co}}K$ 是否是超弱紧的?

问题 6.3 是否每个超弱紧集可一致嵌入进某个超自反空间或者 Hilbert 空间?

注意上面问题中, 如果超弱紧集为内部不空的, 例如为超自反空间的单位球时, 其是否可一致嵌入进某个 Hilbert 空间是 Banach 空间理论中的一个长期的公开问题 (参见文献 [79, 第 218 页]、[80, 问题 6.3] 和 [81, 问题 14]).

问题 6.4 如果由有界几何生成的超弱紧集可一致嵌入进某个超自反空间或者 Hilbert 空间, 这是否蕴涵了有界几何本身可粗嵌入进某个超自反空间或者 Hilbert 空间?

作为本文的结尾, 我们指出问题 6.4 本是我们引入超弱紧集的最初的动机之一, 目前尽管超弱紧集理论的框架已基本构成, 但超弱紧集的一致嵌入问题及其在粗几何中的应用 (特别是问题 6.4) 至今还没有什么好的结果, 问题 6.3 和 6.4 将是我们以后最为关心和将要研究的问题.

致谢 作者感谢所有专家对于本文所提供的意见和建议, 同时本文得益于厦门大学泛函分析团队的探讨和支持, 在此表示感谢.

参考文献

1 James R C. Super-reflexive Banach spaces. Canad J Math, 1972, 24: 896–904
2 Enflo P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. Israel J Math, 1972, 13: 281–288
3 Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel J Math, 1975, 20: 326–350
4 Yu G. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups. In: Proceedings of International Congress of Mathematicians. Zürich: European Mathematical Society, 2006, 1623–1639
5 Yu G. The Novikov conjecture. (Russian) Uspekhi Mat Nauk, 2019, 74: 167–184, translation in Russian Math Surveys, 2019, 74: 525–541
6 Kasparov G, Yu G. The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity. Adv Math, 2006, 206: 1–56
7 Lafforgue V. Un renforcement de la propriété (T). Duke Math J, 2008, 143: 559–602
8 Pisier G. Complex Interpolation Between Hilbert, Banach and Operator Spaces. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 208. Providence: Amer Math Soc, 2010
9 Mendel M, Naor A. Nonlinear spectral calculus and super-expanders. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2014, 119: 1–95
10 Kirk W A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer Math Monthly, 1965, 72: 1004–1006
11 Cheng Q. The local embeddings of Banach spaces. PhD Thesis. Xiamen: Xiamen University, 2007 [程庆进. Banach 空间的局部嵌入. 博士学位论文. 厦门: 厦门大学, 2007]
12 Cheng L. On super-weakly compact sets and generalized renormings. www.ims.cuhk.edu.hk/publications/reports/2008-01.pdf, 2007

13 Cheng L, Cheng Q, Wang B, et al. On super-weakly compact sets and uniformly convexifiable sets. Studia Math, 2010, 199: 145–169
14 Beauzamy B. Opérateurs uniformément convexifiants. Studia Math, 1976, 57: 103–139
15 Heinrich S. Finite representability and super-ideals of operators. Dissertationes Math (Rozprawy Mat), 1980, 172: 37 pp
16 Tacon D G. Nonstandard extensions of transformations between Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1980, 260: 147–158
17 Rosenthal H. On wide-(s) sequences and their applications to certain classes of operators. Pacific J Math, 1999, 189: 311–338
18 Wenzel J. Uniformly convex operators and martingale type. Rev Mat Iberoam, 2002, 18: 211–230
19 Pietsch A. History of Banach Spaces and Linear Operators. Boston: Birkhäuser, 2007
20 Causey R M, Dilworth S J. Metric characterizations of super weakly compact operators. Studia Math, 2017, 239: 175–188
21 Causey R M, Dilworth S J. ξ-asymptotically uniformly smooth, ξ-asymptotically uniformly convex, and (β) operators. J Funct Anal, 2018, 274: 2906–2954
22 Raja M. Finitely dentable functions, operators and sets. J Convex Anal, 2008, 15: 219–233
23 Lancien G. On uniformly convex and uniformly Kadec-Klee renormings. Serdica Math J, 1995, 21: 1–18
24 Fabian M, Montesinos V, Zizler V. Sigma-finite dual dentability indices. J Math Anal Appl, 2009, 350: 498–507
25 Cheng L, Cheng Q, Luo L, et al. On super weak compactness and its equivalences. J Convex Anal, 2018, 25: 899–926
26 Raja M. Super WCG Banach spaces. J Math Anal Appl, 2016, 439: 183–196
27 Lancien G, Raja M. Nonlinear aspects of super weakly compact sets. arXiv:2003.01030, 2020
28 Dacunha-Castelle D, Krivine J. Application des ultraproduits à l'étude des espaces et des algébres de Banach. Studia Math, 1972, 41: 315–334
29 Stern J. Ultrapowers and local properties of Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1978, 240: 231–252
30 Henson C W, Moore L C. Subspaces of the nonstandard hull of a normed space. Trans Amer Math Soc, 1974, 197: 131–143
31 Heinrich S. Ultraproducts in Banach space theory. J Reine Angew Math, 1980, 1980: 72–104
32 James R C. Weak compactness and reflexivity. Israel J Math, 1964, 2: 101–119
33 Fabian M, Habala P, Hájek P, et al. Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry. Canadian Mathematical Society, Books in Mathematic, vol. 8. New York: Springer-Verlag, 2001
34 Banach S, Saks S. Sur la convergence forte dans les champs L^p. Studia Math, 1930, 2: 51–57
35 Szlenk W. Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L. Studia Math, 1965, 25: 337–341
36 Baernstein A. On reflexivity and summability. Studia Math, 1972, 42: 91–94
37 Maurey B, Rosenthal H P. Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence. Studia Math, 1977, 61: 77–98
38 Dodds P G, Semenov E M, Sukochev F A. The Banach-Saks property in rearrangement invariant spaces. Studia Math, 2004, 162: 263–294
39 Astashkin S V, Semenov E M, Sukochev F A. The Banach-Saks p-property. Math Ann, 2005, 332: 879–900
40 Beauzamy B. Banach-Saks properties and spreading models. Math Scand, 1979, 44: 357–384
41 Lopez-Abad J, Ruiz C, Tradacete P. The convex hull of a Banach-Saks set. J Funct Anal, 2014, 266: 2251–2280
42 Mercourakis S. On Cesaro summable sequences of continuous functions. Mathematika, 1995, 42: 87–104
43 Lancien G. A survey on the Szlenk index and some of its applications. Rev Real Acad Cienc Exact Fis Natur Madrid (RACSAM), 2006, 100: 209–235
44 Godefroy G. Renormings of Banach spaces. In: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. I. Amsterdam: North-Holland, 2001, 781–835
45 Boiso M C. Approximation of Lipschitz functions by Δ-convex functions in Banach spaces. Israel J Math, 1998, 106: 269–284
46 Davis W J, Figiel T, Johnson W B, et al. Factoring weakly compact operators. J Funct Anal, 1974, 17: 311–327
47 Elton J, Lin P-K, Odell E, et al. Remarks on the fixed point problem for nonexpansive maps. In: Fixed Points and Nonexpansive Mappings (Cincinnati, Ohio, 1982). Contemporary Mathematics, 18. Providence: Amer Math Soc, 1983, 87–120
48 van Dulst D, Pach A J. On flatness and some ergodic super-properties of Banach spaces. Indag Math (N S), 1981, 84:

153–164
49 Alspach D E. A fixed point free nonexpansive map. Proc Amer Math Soc, 1981, 82: 423–424
50 Cheng L, Cheng Q, Zhang J. On super fixed point property and super weak compactness of convex subsets in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2015, 428: 1209–1224
51 Cheng L, Luo Z, Zhou Y. On super weakly compact convex sets and representation of the dual of the normed semigroup they generate. Canad Math Bull, 2013, 56: 272–282
52 Cheng L X, Zhou Y. On approximation by Δ-convex polyhedron support functions and the dual of $cc(X)$ and $wcc(X)$. J Convex Anal, 2012, 19: 201–212
53 Hoffman J. On the modulus of smoothness and the G_*-conditions in B-spaces. Preprint Series, Aarhus Universitet, Matematisk Inst, 1974
54 Figiel T, Pisier G. Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses (in French). C R Acad Sci Paris Sér A, 1974, 279: 611–614
55 Wenzel J. Strong martingale type and uniform smoothness. J Convex Anal, 2005, 12: 159–171
56 Amir D, Lindenstrauss J. The structure of weakly compact sets in Banach spaces. Ann of Math (2), 1968, 88: 35–46
57 Lindenstrauss J. Weakly compact sets-their topological properties and the Banach spaces they generate. In: Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1967). Princeton: Princeton University Press, 1967, 235–273
58 Deville R, Godefroy G, Zizler V. Smoothness and renormings in Banach spaces. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1993
59 Zizler V. Nonseparable Banach spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 2003, 1743–1816
60 Fabian M, Godefroy G, Hájek P, et al. Hilbert-generated spaces. J Funct Anal, 2003, 200: 301–323
61 Rosenthal H P. The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces. Compos Math, 1974, 28: 83–111
62 Corson H H, Lindenstrauss J. On weakly compact subsets of Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1966, 17: 407–412
63 Wang R. Characterizations of super weakly compact generated spaces and its subspaces. Master Thesis. Xiamen: Xiamen University, 2020 [王如霞. 超弱紧生成空间及其子空间的刻画. 硕士学位论文. 厦门: 厦门大学, 2020]
64 Troyanski S L. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces. Studia Math, 1970/71, 37: 173–180
65 Isbell J R. On finite-dimensional uniform spaces. Pacific J Math, 1959, 9: 107–121
66 Isbell J R. Uniform neighborhood retracts. Pacific J Math, 1961, 11: 609–648
67 Lindenstrauss J. On nonlinear projections in Banach spaces. Michigan Math J, 1964, 11: 263–287
68 Kalton N J. Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications. Collect Math, 2004, 55: 171–217
69 Cheng L, Cheng Q, Wang J. A note on absolute uniform retracts, uniform approximation property and super weakly compact sets of Banach spaces. Acta Math Sin Engl Ser, 2020, in press
70 Kalton N J. The uniform structure of Banach spaces. Math Ann, 2012, 354: 1247–1288
71 Bourgain J. The metrical interpretation of superreflexivity in Banach spaces. Israel J Math, 1986, 56: 222–230
72 Johnson W B, Schechtman G. Diamond graphs and super-reflexivity. J Topol Anal, 2009, 1: 177–189
73 Baudier F. Metrical characterization of super-reflexivity and linear type of Banach spaces. Arch Math (Basel), 2007, 89: 419–429
74 Benyamini Y, Starbird T. Embedding weakly compact sets into Hilbert space. Israel J Math, 1976, 23: 137–141
75 Argyros S, Farmaki V. On the structure of weakly compact subsets of Hilbert spaces and applications to the geometry of Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1985, 289: 409–427
76 Fabian M, Godefroy G, Zizler V. The structure of uniformly Gâteaux smooth Banach spaces. Israel J Math, 2001, 124: 243–252
77 Yang Z T, Lu Y F, Cheng Q J. Super weak compactness and uniform Eberlein compacta. Acta Math Sin Engl Ser, 2017, 33: 545–553
78 Fabian M, Godefroy G, Montesinos V, et al. Inner characterizations of weakly compactly generated Banach spaces and their relatives. J Math Anal Appl, 2004, 297: 419–455
79 Godefroy G, Kalton N J. Lipschitz-free Banach spaces. Studia Math, 2003, 159: 121–141
80 Benyamini Y, Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1. American Mathematical Society Colloquium Publications, 48. Providence: Amer Math Soc, 2000
81 Kalton N J. Coarse and uniform embeddings into reflexive spaces. Q J Math, 2007, 58: 393–414

82 Kalton N J. The nonlinear geometry of Banach spaces. Rev Mat Complut, 2008, 21: 7–60

Super weakly compact subsets of Banach spaces

Qingjin Cheng

Abstract The notion of super weakly compact sets is a localized setting of super reflexive Banach spaces. In this paper, we present a brief review of the research area of super weakly compact sets of Banach spaces and some new results about this topic are included.

Keywords Banach space, super weakly compact set, uniform Eberlein compact

MSC(2010) 46B20

doi: 10.1360/SSM-2020-0168