论文

三体量子系统中 $AB \rightarrow C$ 导引的探测

刘洁, 杨莹, 肖书, 曹怀信*

陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119

*联系人, E-mail: caohx@snnu.edu.cn

收稿日期: 2019-07-22; 接受日期: 2019-08-21; 网络出版日期: 2019-11-07

国家自然科学基金(编号: 11871318, 11771009, 11571211)、中央高校基本科研业务费专项资金(编号: GK201703010, GK201801011)和陕西省青年科技新星项目(编号: 2018KJXX-054)资助

摘要 本文基于三体量子系统中量子导引方案的概念与已有的等价刻画, 研究 $AB \rightarrow C$ 导引的探测问题. 首先, 揭示了三体量子态 ρ^{ABC} 的 $AB \rightarrow C$ 可导引性与其约化态 ρ^{AC} 的 $A \rightarrow C$ 可导引性及约化态 ρ^{BC} 的 $B \rightarrow C$ 可导引性之间的关系; 其次, 通过推导出 $AB \rightarrow C$ 不可导引态必须满足的一个不等式(称为导引不等式), 得到了量子态为 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的必要条件. 基于导引不等式, 我们引入了量子态 ρ 的导引半径 $S(\rho)$, 并且证明, 当 ρ 是 $AB \rightarrow C$ 不可导引态时, $S(\rho) \leq 1$; 当 $S(\rho) > 1$ 时, ρ 与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态 η 的凸组合 $t\rho + (1-t)\eta$ 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 其中 $t_0 := \frac{2}{S(\rho)+1} < t \leq 1$. 最后, 作为导引不等式的应用, 证明了三体GHZ态、广义GHZ态及W-态与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的“部分凸组合”的 $AB \rightarrow C$ 可导引性.

关键词 三体量子系统, 量子测量, 量子导引, 导引不等式**PACS:** 03.65.Ca, 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.75.Gg

1 引言

作为量子力学、计算机科学和通信工程的交叉学科, 量子信息科学是将经典信息扩展, 直接利用量子态来表达信息、传输和存储信息. 量子信息科学的发展突破了许多经典技术的物理局限, 实现了电子信息技术无法实现的新信息功能, 如量子网络^[1-6]、量子密钥分发^[7,8]、量子编码和量子通信^[9-11]等. 在量子信息中, 广义的“量子关联”是指复合量子系统的子系统之间的关联, 包括量子非局域

性、量子导引、量子纠缠和量子失谐.

1935年, Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)为证明量子力学的不完备性提出了一个佯谬^[12], 通过研究这个佯谬, Schrödinger^[13]发现了EPR导引. 文献^[14]用非简并参量放大对EPR悖论进行了解释. EPR导引是Bell非局域性到量子纠缠的桥梁, 描述了测量一个粒子会影响另一个粒子状态的能力, 使得测量结果不能用局部隐态(LHS)模型来解释. Werner^[15]首先给出了量子纠缠的严格数学定义, 通过构造Werner态, 指出量子纠缠和Bell

引用格式: 刘洁, 杨莹, 肖书, 等. 三体量子系统中 $AB \rightarrow C$ 导引的探测. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 120301Liu J, Yang Y, Xiao S, et al. Detecting $AB \rightarrow C$ steering in tripartite quantum systems (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 120301, doi: 10.1360/SSPMA-2019-0261

非局域是两个不同的概念, 因为某些量子纠缠态总是可以用局部隐变量(LHV)模型来描述. Wiseman等人^[16]给出了EPR导引的定义, 指出Bell非局域性是量子非局域性中最强的类型^[17-19]. EPR导引是纠缠和Bell非局域之间的一种量子非局域性. 与Bell非局域性和纠缠不同, 量子导引具有非对称性^[20]. 例如, Alice和Bob共享了一个量子态, 对于纠缠, 如果Alice和Bob纠缠, 那么Bob也和Alice纠缠; 对于量子导引, 有可能Alice可以导引Bob, 但是Bob不能导引Alice. 这就是导引的非对称现象. Saunders等人^[21]用Bell局部态对EPR导引进行了实验. Cavalcanti等人^[22]将文献^[16]中的概念扩展到多体情形, 并推导出检验量子非局域性的不等式. Sun等人^[23]通过实验证明了2-比特导引性的不对称, 并为EPR导引的判定提供了一个充分必要条件. 文献^[24]中给出了由EPR导引态构造Bell非局域态, 通过违反导引不等式来判定Bell非局域性. 最近, Cao与Guo在文献^[25]中, 概括了前人的物理思想与研究思路, 给出了两体系统中Bell非局域性和EPR导引的严格数学定义, 揭示了这两种量子特性的数学内涵, 并建立了相应的等价刻画及充分条件. 文献^[26]引入并研究了广义的量子鲁棒性. 文献^[27]给出了两体系统中, EPR导引的一些充分条件和必要条件, 并建立了EPR导引不等式. Yang与Cao对文献^[28]中的EPR导引不等式进行了推广. 肖书等人^[29]提出了三体量子系统中的两种量子导引方案, 称为“单边设备独立导引方案”与“双边设备独立导引方案”. 根据局域隐态的可分性与局域隐变量的独立性, 每个导引方案又包括两个不级别的导引情景. 在描述物理思想的基础上, 给出了各种导引方案的数学定义, 建立了各种导引方案可行的充要条件及充分条件.

本文在文献^[29]的基础上, 进一步研究三体量子系统 ABC 中EPR导引的判定问题. 首先, 回顾 $AB \rightarrow C$ 导引方案的概念并给出相关性质; 然后通过推导 $AB \rightarrow C$ 不可导引态必须满足的一个不等式(称为导引不等式), 得到量子态为 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的必要条件. 这一不等式的违背说明相应量子态必然是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 最后, 作为所得结果的应用, 证明几种纠缠态的可导引性.

2 $AB \rightarrow C$ 导引的概念与性质

首先, 介绍一些要用到的数学符号与概念. 用 $\mathcal{H}_S$ 表示量子系统 S 的状态空间, 它是一个 d_S 维复Hilbert空间, I_S 表示 $\mathcal{H}_S$ 上的恒等算子, $\mathcal{D}_S$ 为系统 S 的所有量子态(空间 $\mathcal{H}_S$ 上迹为1的正算子)之集, 用 $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^\dagger Y)$ 表示算子 X 与 Y 的Hilbert-Schmidt内积. 量子系统 ABC 的状态空间记为 $\mathcal{H}_{ABC} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A &= \left\{ \{M_{a|x}\}_{a=1}^{o_A} : x = 1, 2, \dots, m_A \right\} \equiv \{M_{a|x}\}_{a,x}, \\ \mathcal{N}_B &= \left\{ \{N_{b|y}\}_{b=1}^{o_B} : y = 1, 2, \dots, m_B \right\} \equiv \{N_{b|y}\}_{b,y}, \end{aligned}$$

分别表示 A 系统与 B 系统的正算子值测量组合.

三体系统 ABC 中的双边设备独立导引方案的目的是: 系统的三个远距离观测者之二(比如Alice与Bob, 简称 AB)通过在他们的系统上的测量来操控另一观测者(比如Charlie, 简称 C)的状态. 简称 AB 导引(操控) C , 记为 $AB \rightarrow C$ 导引. 如果Alice用一组测量 $\mathcal{M}_A$ 、同时Bob用一组测量 $\mathcal{N}_B$ 来测量各自的系统, 且测量前系统处于状态 ρ^{ABC} , 那么测量后就得到Charlie的一组拟态(称为“拟态组合”):

$$\rho_{ab|xy}^C = \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C)\rho^{ABC}].$$

进而分析他们为Charlie准备的这些状态. 如果得到的拟态组合没有“局域隐态-隐变量”模型, 那么Alice与Bob就可用他们的这组测量来导引(操控)Charlie的状态. 否则, 他们就必须寻找其他测量组合实现对Charlie的状态的导引(操控). 我们称这种导引情景为 $AB \rightarrow C$ 导引方案. 参见图1.

定义2.1^[29] 对于量子态 ρ^{ABC} 及 A 系统与 B 系统的测量组合 $\mathcal{M}_A$ 与 $\mathcal{N}_B$, 若存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_a$, $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 以及系统 C 的量子态 $\{\rho_{\lambda, \mu}^C\}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得 $\forall x, a, y, b$, 有

$$\rho_{ab|xy}^C = \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|y, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C, \quad (1)$$

图 1 (网络版彩图) $AB \rightarrow C$ 导引方案: Alice (A) 和 Bob (B) 分别与 Charlie (C) 共享经典信息 λ 和 μ , 他们希望通过各自的测量选择 x 和 y (相应的测量输出为 a 和 b), 来导引 Charlie 的状态

Figure 1 (Color online) $AB \rightarrow C$ steering scheme, in which Alice (A) and Bob (B) want to steer Charlie's (C) state through their local measurements labeled by x and y with outcomes a and b , respectively, when they share classical information λ and μ with Charlie, respectively.

则称 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 否则, 称 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

如果 ρ^{ABC} 在任意测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下都是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的, 那么称它是 $AB \rightarrow C$ 不可导引的. 如果 ρ^{ABC} 在某个测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 那么称它是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

用记号 $\mathcal{US}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下, 全体 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集, $\mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 表示全体 $AB \rightarrow C$ 不可导引态之集, 则

$$\mathcal{US}^{AB \rightarrow C} = \bigcap_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B).$$

用记号 $\mathcal{S}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 表示在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下, 全体 $AB \rightarrow C$ 可导引态之集, $\mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$ 表示全体 $AB \rightarrow C$ 可导引态之集, 则

$$\mathcal{S}^{AB \rightarrow C} = \bigcup_{\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B} \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B).$$

注 2.1 文献[29]说明了集合 $\mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 是全体量子态之集 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的紧凸集, 即两个 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的凸组合与一系列 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的极限都是 $AB \rightarrow C$ 不可导引态. 进而, 集合 $\mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$ 是 $\mathcal{D}_{ABC}$ 中的开集, 即 $AB \rightarrow C$ 可导引态的附近都是 $AB \rightarrow C$ 可导引态.

定理 2.1 若 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 则 $\rho^{AC} \in \mathcal{US}^{A \rightarrow C}$ 且 $\rho^{BC} \in \mathcal{US}^{B \rightarrow C}$, 其中

$$\rho^{AC} = \text{tr}_B \rho^{ABC}, \rho^{BC} = \text{tr}_A \rho^{ABC}.$$

证明 设 $\mathcal{M}_A$ 为系统 A 的任意测量组合, 记 $\mathcal{N}_B = \{P_B, I - P_B\} := \{N_1, N_2\}$, 其中 P_B 为空间 $\mathcal{H}_B$ 的任意正交投影, 则得到系统 AB 的测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$. 因为 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 所以由定义 2.1 知, 存在概率分布 $\{\pi(\lambda, \mu)\}_{\lambda, \mu}$, $\{P_A(a|x, \lambda)\}_{a=1}^{o_A}$, $\{P_B(b|1, \mu)\}_{b=1}^2$ 以及系统 C 的量子态 $\{\rho_{\lambda, \mu}^C\}_{\lambda, \mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得 $\forall x, a, b$, 有

$$\begin{aligned} & \text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|1} \otimes I_C) \rho^{ABC}] \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(a|x, \lambda) P_B(b|1, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C. \end{aligned}$$

两边对 b 求和得到

$$\text{tr}_A[(M_{a|x} \otimes I_C) \rho^{AC}] = \sum_{\lambda} P_A(a|x, \lambda) \tau_{\lambda}^C, \quad \forall x, a,$$

其中, $\tau_{\lambda}^C = \sum_{\mu} \pi(\lambda, \mu) \rho_{\lambda, \mu}^C$ 为系统 $\mathcal{H}_C$ 上的一组正算子. 根据文献[27]中的定理 2.1 知, $\rho^{AC} \in \mathcal{US}^{A \rightarrow C}$. 类似可证, $\rho^{BC} \in \mathcal{US}^{B \rightarrow C}$. 证毕.

作为定理 2.1 的逆否命题, 有

推论 2.1 若 $\rho^{AC} := \text{tr}_B \rho^{ABC} \in \mathcal{S}^{A \rightarrow C}$, 或者 $\rho^{BC} := \text{tr}_A \rho^{ABC} \in \mathcal{S}^{B \rightarrow C}$, 则 $\rho^{ABC} \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$.

这一推论给出了构造 $AB \rightarrow C$ 可导引态的一种方法. 例如, 当 $|\psi^{BC}\rangle$ 为系统 $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 中的纠缠纯态时, 它必然是 $B \rightarrow C$ 可导引的 [25] (定理 4.3). 从而, 由推论 2.1 知, 对任意量子态 ρ^A , $\rho^{ABC} := \rho^A \otimes |\psi^{BC}\rangle \langle \psi^{BC}|$ 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 更一般地, 我们有

推论 2.2 若 $\rho^{ABC} = \rho^A \otimes \rho^{BC}$ 为乘积态, 则 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 当且仅当 $\rho^{BC} \in \mathcal{US}^{B \rightarrow C}$. 等价地, $\rho^{ABC} \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$ 当且仅当 $\rho^{BC} \in \mathcal{S}^{B \rightarrow C}$.

证明 必要性由定理 2.1 知, 下证充分性. 为此, 设 $\rho^{BC} \in \mathcal{US}^{B \rightarrow C}$, 则对系统 AB 的测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$, 存在概率分布 $\{q_{\mu}\}_{\mu}$ 及量子态 $\{\rho_{\mu}^C\}_{\mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得

$$\text{tr}_B[(N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{BC}] = \sum_{\mu} q_{\mu} P_B(b|y, \mu) \rho_{\mu}^C, \quad \forall y, b,$$

其中 $\{P_B(b|y, \mu)\}_b$ 为概率分布. 设 $\rho^A = \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda}^A\rangle \langle \psi_{\lambda}^A|$ 为 ρ^A 的谱分解, 则对任意的 x, a, y, b , 有

$$\text{tr}_{AB}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes I_C) \rho^{ABC}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr}[M_{a|x}\rho^A]\text{tr}_B[(N_{b|y} \otimes I_C)\rho^{BC}] \\
 &= \sum_{\lambda,\mu} \pi(\lambda,\mu)P_A(a|x,\lambda)P_B(b|y,\mu)\rho_{\lambda,\mu}^C,
 \end{aligned}$$

其中, $\pi(\lambda,\mu) = p_{\lambda}q_{\mu}, \rho_{\lambda,\mu}^C = \rho_{\mu}^C$, 且

$$P_A(a|x,\lambda) = \text{tr}[M_{a|x}|\psi_{\lambda}^A\rangle\langle\psi_{\lambda}^A|] = \langle\psi_{\lambda}^A|M_{a|x}|\psi_{\lambda}^A\rangle.$$

由定义2.1知, $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$. 证毕.

由充分性的证明可知, 当 $\rho^{BC} \in \mathcal{US}^{B \rightarrow C}$ 时, $\pi(\lambda,\mu) = p_{\lambda}q_{\mu}$, 从而 ρ^{ABC} 是强 $AB \rightarrow C$ 不可导引的^[29](定义3.2, 例3.2).

文献[29]还证明了以下结果, 它将算子等式(1)简化为数量等式(2).

引理2.1^[29] $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 当且仅当存在概率分布

$$\{\pi(\lambda,\mu)\}_{\lambda,\mu}, \{P_A(a|x,\lambda)\}_a, \{P_B(b|y,\mu)\}_b$$

以及系统 C 的量子态 $\{\rho_{\lambda,\mu}^C\}_{\lambda,\mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得对 C 系统的任何正算子值测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_c}$ 及任意的 x, a, y, b, c , 都有

$$\begin{aligned}
 &\text{tr}[(M_{a|x} \otimes N_{b|y} \otimes K_c)\rho^{ABC}] \\
 &= \sum_{\lambda,\mu} \pi(\lambda,\mu)P_A(a|x,\lambda)P_B(b|y,\mu)\text{tr}(K_c\rho_{\lambda,\mu}^C). \quad (2)
 \end{aligned}$$

3 EPR导引不等式

用 $B_{\text{her}}(X)$ 表示有限维 Hilbert 空间 X 上所有自伴算子构成的实线性空间, 则它关于 Hilbert-Schmidt 内积:

$$\langle T, S \rangle_{HS} = \text{tr}(TS)$$

构成一个实 Hilbert 空间.

以下定理给出了三体态在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下 $AB \rightarrow C$ 不可导引的一个必要条件.

定理3.1 设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_A), \mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_B), C = \{C_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_C)$, 记

$$M_C = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\text{tr}(C_i T)|^2 : T \in \mathcal{D}_C \right\}, \quad (3)$$

则对任意的 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$\sum_{i=1}^n |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho^{ABC}}|$$

$$\leq \sqrt{M_C} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2 (r(B_i))^2}, \quad (4)$$

其中, $r(T)$ 表示算子 T 的谱半径, 即 T 的特征值的模的最大值:

$$r(T) = \max \{|\lambda| : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

证明 因为 $A_i \in B_{\text{her}}(\mathcal{H}_A), B_i \in B_{\text{her}}(\mathcal{H}_B), C_i \in B_{\text{her}}(\mathcal{H}_C)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 所以它们分别有以下的谱分解:

$$A_i = \sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(i)} P_j^{(i)}, B_i = \sum_{k=1}^{m_2} \mu_k^{(i)} Q_k^{(i)}, C_i = \sum_{c=1}^{m_3} \gamma_c^{(i)} K_c^{(i)}.$$

于是, 得到 A 系统上的 n 个投影测量: $M^i = \{P_j^{(i)}, j = 1, 2, \dots, m_1\}$, B 系统上的 n 个投影测量: $N^i = \{Q_k^{(i)}, k = 1, 2, \dots, m_2\}$, 以及 C 系统上的 n 个投影测量 $O^i = \{K_c^{(i)}, c = 1, 2, \dots, m_3\}$. 从而得到 A, B, C 系统上的一个测量组合:

$$\mathcal{M}_A = \{M^1, M^2, \dots, M^n\},$$

$$\mathcal{N}_B = \{N^1, N^2, \dots, N^n\},$$

$$\mathcal{O}_C = \{O^1, O^2, \dots, O^n\}.$$

设 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 则由定义2.1知, $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$. 从而, 由引理2.1知, 存在概率分布 $\{\pi(\lambda,\mu)\}_{\lambda,\mu}, \{P_A(a|x,\lambda)\}_a, \{P_B(b|y,\mu)\}_b$ 以及量子态 $\{\rho_{\lambda,\mu}^C\}_{\lambda,\mu} \subset \mathcal{D}_C$ 使得方程(2)对 C 系统的任何正算子值测量 $\{K_c\}_{c=1}^{o_c}$ 及任意的 x, a, y, b, c 都成立. 从而, 对任意的 i, j, k 及任意的 c , 都有

$$\begin{aligned}
 &\text{tr}[(P_j^{(i)} \otimes Q_k^{(i)} \otimes K_c^{(i)})\rho^{ABC}] \\
 &= \sum_{\lambda,\mu} \pi(\lambda,\mu)P_A(j|i,\lambda)P_B(k|y,\mu)\text{tr}(K_c\rho_{\lambda,\mu}^C). \quad (5)
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 &\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho^{ABC}} \\
 &= \text{tr}[(A_i \otimes B_i \otimes C_i)\rho^{ABC}] \\
 &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} \sum_{c=1}^{m_3} \lambda_j^{(i)} \mu_k^{(i)} \gamma_c^{(i)} \langle P_j^{(i)} \otimes Q_k^{(i)} \otimes K_c^{(i)} \rangle_{\rho^{ABC}} \\
 &= \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} \sum_{c=1}^{m_3} \lambda_j^{(i)} \mu_k^{(i)} \gamma_c^{(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) P_A(j|i, \lambda) P_B(k|i, \mu) \text{tr}(K_c^{(i)} \rho_{\lambda, \mu}^C) \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) L_i(\lambda, \mu), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L_i(\lambda, \mu) &= \left(\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(i)} P_A(j|i, \lambda) \right) \left(\sum_{k=1}^{m_2} \mu_k^{(i)} P_B(k|i, \mu) \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{c=1}^{m_3} \gamma_c^{(i)} \text{tr}(K_c^{(i)} \rho_{\lambda, \mu}^C) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(i)} P_A(j|i, \lambda) \right) \left(\sum_{k=1}^{m_2} \mu_k^{(i)} P_B(k|i, \mu) \right) \cdot (\text{tr}(C_i \rho_{\lambda, \mu}^C)). \end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |L_i(\lambda, \mu)| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_1} \lambda_j^{(i)} P_A(j|i, \lambda) \sum_{k=1}^{m_2} \mu_k^{(i)} P_B(k|i, \mu) \right)^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{tr}(C_i \rho_{\lambda, \mu}^C))^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2 (r(B_i))^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{tr}(C_i \rho_{\lambda, \mu}^C))^2} \\ &\leq \sqrt{M_C} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2 (r(B_i))^2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho^{ABC}}| &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) L_i(\lambda, \mu) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) |L_i(\lambda, \mu)| \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \pi(\lambda, \mu) \sum_{i=1}^n |L_i(\lambda, \mu)| \\ &\leq \sqrt{M_C} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2 (r(B_i))^2}. \end{aligned}$$

证毕.

由定理3.1可知, 当量子态 ρ^{ABC} 是 $AB \rightarrow C$ 不可导引时, 对任意的自伴算子组 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$, 不等式(4)都成立. 因此, 如果存在自伴算子组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 使得不等式(4)不成立, 那么 ρ^{ABC} 在测量组合 $(\mathcal{M}_A, \mathcal{N}_B)$ 下, 必然是 $AB \rightarrow C$ 可导引的(参见定理3.1的证明), 其中

$$\mathcal{M}_A = P(\mathcal{A}) := \{P(A_i)\}_{i=1}^n, \mathcal{N}_B = P(\mathcal{B}) := \{P(B_i)\}_{i=1}^n,$$

这里 $P(T_i)$ 表示空间 $\mathcal{H}_S$ 上的自伴算子 T_i 的谱投影 $\{E_j^{(i)} : j = 1, 2, \dots, o_S\}$ 构成的投影测量. 所以, 我们把不等式(4)叫做一个导引不等式.

文献[28]中证明, 当两体态 ρ^{AB} 为 $A \rightarrow B$ 不可引时, 对任意的自伴算子组 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_A)$, $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_B)$, 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle A_i \otimes B_i \rangle_{\rho} \right| \leq \sqrt{M_{\mathcal{B}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2}, \quad (6)$$

其中 $M_{\mathcal{B}} = \sup \{ \sum_{i=1}^n |\text{tr}(B_i T)|^2 : T \in \mathcal{D}_B \}$.

下面, 我们应用导引不等式(4)推导一个两体导引不等式. 设两体态 ρ^{AB} 为 $A \rightarrow B$ 不可导引的[25](定义2.1). 记 $\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^2$, $\rho^{CAB} = \frac{1}{2} I_2 \otimes \rho^{AB}$. 易见, 三体态 ρ^{CAB} 为 $CA \rightarrow B$ 不可导引的(按照定义2.1). 于是, 由定理3.1知, 对任意的自伴算子组 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_A)$, $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_B)$, 有

$$\sum_{i=1}^n |\langle C_i \otimes A_i \otimes B_i \rangle_{\rho^{CAB}}| \leq \sqrt{M_{\mathcal{B}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(C_i))^2 (r(A_i))^2},$$

其中 $C_i = I_2 (i = 1, 2, \dots, n)$, 故

$$\sum_{i=1}^n |\langle A_i \otimes B_i \rangle_{\rho^{AB}}| \leq \sqrt{M_{\mathcal{B}}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r(A_i))^2}. \quad (7)$$

显然, 这一不等式加强了导引不等式(6).

当算子组 $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_C)$ 满足“正交性条件”:

$$\text{tr}(C_i C_j) = d_C \delta_{i,j} \quad (8)$$

时, 算子组

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{d_C}} C_i : i = 0, 1, 2, \dots, n \right\} (C_0 = I_C)$$

是Hilbert空间 $(B_{\text{her}}(\mathcal{H}_C), \langle \cdot, \cdot \rangle_{HS})$ 中的正规正交集. 因此, 根据贝塞尔不等式得到

$$\frac{1}{d_C} \left(|\langle I, \eta \rangle_{HS}|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle C_i, \eta \rangle_{HS}|^2 \right) \leq \text{tr}(\eta^2) \leq 1, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}_C.$$

所以,

$$\sum_{i=1}^n |\text{tr}(C_i \eta)|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle C_i, \eta \rangle_{HS}|^2 \leq d_C - 1, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}_C.$$

因此, $M_C \leq d_C - 1$. 进而, 由定理3.1可得下面的推论.

推论3.1 设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_A)$, $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_B)$ 满足条件:

$$r(A_i)r(B_i) \leq 1 (i = 1, 2, \dots, n),$$

以及自伴算子组 $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^n \subset B_{\text{her}}(\mathcal{H}_C)$ 满足正交性条件(8), 则对任意的 $\rho^{ABC} \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$|F_n|(\rho^{ABC}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho^{ABC}}| \leq \sqrt{d_C - 1}. \quad (9)$$

推论3.2 如果存在满足推论3.1中条件的自伴算子组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 使得 $|F_n|(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq m > \sqrt{d_C - 1}$, 那么当 $t_0 := \frac{2\sqrt{d_C-1}}{m+\sqrt{d_C-1}} < t \leq 1$ 时, 对任何 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$\rho(\eta, t) := t\rho + (1-t)\eta \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))}.$$

参见图2.

证明 当 $\frac{2\sqrt{d_C-1}}{m+\sqrt{d_C-1}} < t \leq 1$ 时, 对任何 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 有

$$\begin{aligned} |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho(\eta, t)}| &= |t\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho} + (1-t)\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\eta}| \\ &\geq t|\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho}| - (1-t)|\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\eta}|. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |F_n|(\rho(\eta, t), \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) &\geq t|F_n|(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) - (1-t)|F_n|(\eta, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

由不等式(9)知, $|F_n|(\eta, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \leq \sqrt{d_C - 1}$, 进而,

$$|F_n|(\rho(\eta, t), \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq tm - (1-t)\sqrt{d_C - 1} > \sqrt{d_C - 1}.$$

图2 (网络版彩图)探测到的 $AB \rightarrow C$ 可导引态: 当 $t_0 < t \leq 1$ 时, 量子态 ρ 与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态 η 和 μ 的凸组合 $\rho(\eta, t)$ 和 $\rho(\mu, t)$ 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 其中 $t_0 = \frac{2\sqrt{d_C-1}}{m+\sqrt{d_C-1}}$, 但 $\rho(\eta, t_0)$ 不必是 $AB \rightarrow C$ 可导引

Figure 2 (Color online) Detected $AB \rightarrow C$ steerable states: When $t_0 < t \leq 1$, convex combinations $\rho(\eta, t)$ and $\rho(\mu, t)$ of ρ with any $AB \rightarrow C$ unsteerable states η and μ are always $AB \rightarrow C$ steerable, where $t_0 = \frac{2\sqrt{d_C-1}}{m+\sqrt{d_C-1}}$, but the state $\rho(\eta, t_0)$ is not necessarily $AB \rightarrow C$ steerable.

所以, 根据推论3.1知 $\rho(\eta, t) \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$. 证毕.

特别地, 当 $H_A = H_B = H_C = \mathbb{C}^2$ 时, 取

$$A_i = \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} = a_i^1 \sigma_x + a_i^2 \sigma_y + a_i^3 \sigma_z,$$

$$B_i = \mathbf{b}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} = b_i^1 \sigma_x + b_i^2 \sigma_y + b_i^3 \sigma_z,$$

$$C_i = \mathbf{c}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} = c_i^1 \sigma_x + c_i^2 \sigma_y + c_i^3 \sigma_z,$$

其中

$$\mathbf{a}_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3)^T, \mathbf{b}_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3)^T, \mathbf{c}_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)^T$$

均为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量, 且 $\mathbf{c}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 相互正交. 则 A_i 与 B_i 都是自伴西算子, 它们的特征值为 $-1, 1$. 于是, $r(A_i) = r(B_i) = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$. 由于 $\mathbf{c}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的正交单位向量且 $\text{tr}(C_i C_j) = 2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j$, 所以算子组 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 满足正交性条件(8). 因此, 由推论3.1知, $\forall \rho \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 有

$$|F_n|(\rho^{ABC}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_{\rho}| \leq 1. \quad (10)$$

从而, 这一不等式的违背证明, 量子态 ρ^{ABC} 在测量组合 $(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

进一步, 由推论3.2知,

推论3.3 当 $d_C = 2$ 时, 如果存在满足推论3.1的条件的算子组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 使得 $|F_n|(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq m > 1$, 那么当 $\frac{2}{m+1} < t \leq 1$ 时, 对任何 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$\rho(\eta, t) := t\rho + (1-t)\eta \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))}.$$

特别, $\rho = \rho(\eta, 1) \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$. 参见图2.

对于满足推论3.1中条件的自伴算子组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, 我们称三元组 $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ 为一个 $AB \rightarrow C$ 导引探测仪(SDI). 用 $SDI(AB \rightarrow C)$ 表示全体 $AB \rightarrow C$ 导引探测仪之集. 记

$$S(\rho) = \frac{1}{\sqrt{d_C - 1}} \sup_{\mathcal{D} \in SDI(AB \rightarrow C)} |F_n(\rho, \mathcal{D})|, \quad (11)$$

并称其为量子态 ρ 的导引半径.

根据推论3.1可知, 对任意的 $\rho \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有 $S(\rho) \leq 1$; 从而, 当 $S(\rho) > 1$ 时, 必有 $\rho \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}$. 进一步, 我们有

推论3.4 当 $S(\rho) > 1$ 时, 对任何 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$\rho(\eta, t) := t\rho + (1-t)\eta \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C} (t_0 < t \leq 1),$$

其中 $t_0 = \frac{2}{S(\rho)+1}$, 参见图3.

证明 设 $t_0 < t \leq 1$, 则 $S(\rho) > \frac{2}{t} - 1$, 从而由 $S(\rho)$ 的定义知, 存在导引探测仪 $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ 使得 $|F_n(\rho, \mathcal{D})| > \left(\frac{2}{t} - 1\right) \sqrt{d_C - 1}$. 于是, 由推论3.1知, 对任何 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 都有

$$\begin{aligned} |F_n(\rho(\eta, t), \mathcal{D})| &\geq t|F_n(\rho, \mathcal{D})| - (1-t)|F_n(\eta, \mathcal{D})| \\ &> t\left(\frac{2}{t} - 1\right) \sqrt{d_C - 1} - (1-t)\sqrt{d_C - 1} \\ &= \sqrt{d_C - 1}. \end{aligned}$$

因此, 由推论3.1及其证明知, $\rho(\eta, t) \in \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$. 证毕.

下面给出这一结论的几个应用.

文献[29]中, 已经证明了三粒子GHZ态是 $AB \rightarrow C$ 可导引的(例3.3). 下面, 我们运用导引不等式(10)讨论它与任一不可导引态的凸组合的可导引性.

例子3.1 对于三粒子GHZ态 $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$, 有

$$\begin{aligned} \rho &:= |GHZ\rangle\langle GHZ| \\ &= \frac{1}{2}(|000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 111| \\ &\quad + |111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|). \end{aligned}$$

对任一 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 及参数 $0 \leq t \leq 1$, 讨论混合态 $\rho(\eta, t) = t\rho + (1-t)\eta$ 的 $AB \rightarrow C$ 可导引性.

图3 (网络版彩图)“导引扇形”. 当量子态 ρ 的导引半径 $S(\rho) > 1$ 时, 它与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态 η 的凸组合 $\rho(\eta, t) (t_0 < t \leq 1)$ 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 其中 $t_0 = \frac{2}{S(\rho)+1}$.

Figure 3 (Color online) “Steerable state sector”. When the steering radius $S(\rho) > 1$, a convex combination $\rho(\eta, t) (t_0 < t \leq 1)$ of ρ with any $AB \rightarrow C$ unsteerable state η is always $AB \rightarrow C$ steerable, where $t_0 = \frac{2}{S(\rho)+1}$.

对于所有实单位向量: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T, \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)^T, \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)^T$ 和 Pauli 算子向量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ = \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} a_i b_j c_k \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k, \end{aligned} \quad (12)$$

且

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle_\rho &= 1, \langle \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle_\rho = -1, \\ \langle \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \rangle_\rho &= -1, \langle \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \rangle_\rho = -1. \end{aligned}$$

其余的 $\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k \rangle_\rho = 0$, 因此, 由(12)式得

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_\rho \\ = a_x b_x c_x - a_x b_y c_y - a_y b_x c_y - a_y b_y c_x. \end{aligned} \quad (13)$$

特别地, 当 $n = 2$ 时, 取

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_x, B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y, C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y, \\ A_2 &= -\sigma_y, B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y, C_2 = \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_y, \end{aligned}$$

则算子组 $\{C_1, C_2\}$ 满足正交性条件(8), 且

$$\begin{aligned} \langle A_1 \otimes B_1 \otimes C_1 \rangle &= a_x b_x c_x - a_x b_y c_y = 1, \\ \langle A_2 \otimes B_2 \otimes C_2 \rangle &= -a_y b_x c_y - a_y b_y c_x = 1. \end{aligned}$$

由(13)式得, $|F_2(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})| = \sqrt{2} > 1$. 于是, 由推论3.3知, 当 $\frac{2}{\sqrt{2}+1} < t \leq 1$ 时, $\rho(\eta, t)$ 在测量组

合 $(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 特别, $|GHZ\rangle\langle GHZ|$ 是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

此例说明: 当 $\frac{2}{\sqrt{2}+1} < t \leq 1$ 时, 有

$$t|GHZ\rangle\langle GHZ| + (1-t)\mathcal{US}^{AB \rightarrow C} \subset \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}.$$

例子3.2 考虑广义GHZ态 $|\psi_{r_0, r_1}\rangle = r_0|000\rangle + r_1|111\rangle$, 其中 $|r_0 r_1| > \frac{\sqrt{2}}{4} (r_0 r_1 \in \mathbb{R})$. 通过计算有

$$\begin{aligned} \rho(r_0, r_1) &:= |\psi_{r_0, r_1}\rangle\langle\psi_{r_0, r_1}| \\ &= r_0^2|000\rangle\langle 000| + r_0 r_1|000\rangle\langle 111| \\ &\quad + r_0 r_1|111\rangle\langle 000| + r_1^2|111\rangle\langle 111|. \end{aligned}$$

对任一 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$ 及参数 $0 \leq t \leq 1$, 讨论混合态

$$\rho(\eta, t) = t\rho(r_0, r_1) + (1-t)\eta$$

的 $AB \rightarrow C$ 可导引性.

对于所有实单位向量: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 和Pauli算子向量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$. 计算可知,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle_\rho &= 2r_0 r_1, \langle \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle_\rho = -2r_0 r_1, \\ \langle \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \rangle_\rho &= -2r_0 r_1, \langle \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \rangle_\rho = -2r_0 r_1, \end{aligned}$$

其余的 $\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k \rangle_\rho = 0$, 因此,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_\rho &= 2r_0 r_1 a_x b_x c_x - 2r_0 r_1 a_x b_y c_y - 2r_0 r_1 a_y b_x c_y \\ &\quad - 2r_0 r_1 a_y b_y c_x. \end{aligned}$$

当 $\frac{2}{2\sqrt{2}|r_0 r_1|+1} < t \leq 1$ 时, 有 $\sqrt{2} \leq \left(\frac{2}{t} - 1\right) \sqrt{2} < 4|r_0 r_1|$. 所以, 任取 r 使得 $\left(\frac{2}{t} - 1\right) \sqrt{2} < r \leq 4|r_0 r_1|$, 并构造自伴算子

$$A_1 = \sigma_x, B_1 = \sigma_x, C_1 = \frac{r}{4r_0 r_1} \sigma_x + \sqrt{1 - \left(\frac{c}{4r_0 r_1}\right)^2} \sigma_y,$$

$$A_2 = \sigma_y, B_2 = \sigma_x, C_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{4r_0 r_1}\right)^2} \sigma_x - \frac{r}{4r_0 r_1} \sigma_y.$$

易见, 算子组 $\{C_1, C_2\}$ 满足正交性条件(8), 且

$$\langle A_1 \otimes B_1 \otimes C_1 \rangle_\rho = 2r_0 r_1 a_x b_x c_x = \frac{r}{2},$$

$$\langle A_2 \otimes B_2 \otimes C_2 \rangle_\rho = -2r_0 r_1 a_y b_x c_y = \frac{r}{2}.$$

进而, $|F_2|(\rho(\eta, t), \mathcal{A}, \mathcal{B}, C) = \frac{r}{\sqrt{2}}$. 因为 $\left(\frac{2}{t} - 1\right) \sqrt{2} < r$, 所以 $\frac{2}{\sqrt{2}+1} < t \leq 1$. 从而根据推论3.3知, $\rho(\eta, t)$ 在测量组合 $(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

此例说明: 当 $t_0 := \frac{2}{2\sqrt{2}|r_0 r_1|+1} < t \leq 1$ 时, 有

$$t|\psi_{r_0, r_1}\rangle\langle\psi_{r_0, r_1}| + (1-t)\mathcal{US}^{AB \rightarrow C} \subset \mathcal{S}^{AB \rightarrow C}.$$

例子3.3 对于三粒子W-态 $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$, 我们有

$$\begin{aligned} \rho &:= |W\rangle\langle W| \\ &= \frac{1}{3}(|100\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 001| \\ &\quad + |010\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| \\ &\quad + |001\rangle\langle 100| + |001\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 001|). \end{aligned}$$

对于所有实单位向量: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 和Pauli算子向量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$, 有(12)成立. 于是, 对任意的 $i, j, k \in \{x, y, z\}$, 除了下面7个:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_z \rangle_\rho &= \frac{2}{3}, \langle \sigma_x \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x \rangle_\rho = \frac{2}{3}, \\ \langle \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_z \rangle_\rho &= \frac{2}{3}, \langle \sigma_y \otimes \sigma_z \otimes \sigma_y \rangle_\rho = \frac{2}{3}, \\ \langle \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \rangle_\rho &= \frac{2}{3}, \langle \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \rangle_\rho = \frac{2}{3}, \\ \langle \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \rangle_\rho &= -1 \end{aligned}$$

之外, 其余的 $\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k \rangle_\rho = 0$. 因此,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_\rho &= \frac{2}{3}(a_x b_x c_z + a_x b_z c_x + a_y b_y c_z \\ &\quad + a_y b_z c_y + a_z b_x c_x + a_z b_y c_y) - a_z b_z c_z. \end{aligned} \quad (14)$$

特别地, 取

$$\begin{aligned} A_1 &= \sigma_z, B_1 = \sigma_z, C_1 = -\sigma_z, \\ A_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_y + \frac{1}{2} \sigma_z, B_2 = \frac{1}{2} \sigma_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_z, C_2 = \sigma_y, \end{aligned}$$

则算子组 $\{C_1, C_2\}$ 满足正交性条件(8). 由(14)式得到

$$\langle A_1 \otimes B_1 \otimes C_1 \rangle_\rho = -a_z b_z c_z = 1,$$

$$\langle A_2 \otimes B_2 \otimes C_2 \rangle_\rho = \frac{2}{3}(a_y b_z c_y + a_z b_y c_y) = \frac{2}{3},$$

所以

$$\begin{aligned} |F_2|(\rho, \mathcal{A}, \mathcal{B}, C) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 |\langle A_i \otimes B_i \otimes C_i \rangle_\rho| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \approx 1.18 > 1. \end{aligned}$$

于是, 由推论3.3知, 当 $\frac{2}{1.18+1} \approx 0.92 < t \leq 1$ 时, 对任一 $\eta \in \mathcal{US}^{AB \rightarrow C}$, 混合态 $\rho(\eta, t) = t\rho + (1-t)\eta$ 在测量组合 $(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$ 下, 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 特别, $\rho = |W\rangle\langle W|$ 在测量组合 $(P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}))$ 下是 $AB \rightarrow C$ 可导引的.

4 结论

本文在文献[29]的基础上, 揭示了三体量子态 ρ^{ABC} 的 $AB \rightarrow C$ 可导引性与其约化态 ρ^{AC} 的 $A \rightarrow$

C 可导引性及约化态 ρ^{BC} 的 $B \rightarrow C$ 可导引性之间的关系; 建立了三体量子系统中的一个导引不等式, 它给出了量子态为 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的一个必要条件. 这一不等式的违背说明相应量子态必然是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 基于导引不等式, 定义了量子态 ρ 的导引半径 $S(\rho)$, 并且证明, 当 ρ 是 $AB \rightarrow C$ 不可导引态时, $S(\rho) \leq 1$; 当 $S(\rho) > 1$ 时, ρ 与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态 η 的“部分凸组合” $t\rho + (1-t)\eta$ ($t_0 < t \leq 1$) 都是 $AB \rightarrow C$ 可导引的, 其中 $t_0 := \frac{2}{S(\rho)+1}$; 特别, ρ 是 $AB \rightarrow C$ 可导引的. 这说明, 我们的导引不等式可以探测更多的可导引态, 它们组成一个以 ρ 为“顶点”的“扇形”区域. 作为所得结果的应用, 证明了三体 GHZ 态、广义 GHZ 态及 W 态与任意 $AB \rightarrow C$ 不可导引态的“部分凸组合”的 $AB \rightarrow C$ 可导引性. 同时, 我们还得到了一个两体导引不等式, 加强了已有不等式.

参考文献

- 1 Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing locally and conclusively a nonlocal qudit Toffoli gate: Designing and optimizing (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 110301 [陈立冰, 路洪. 确定性地实现非局域高维量子 Toffoli 门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 110301]
- 2 Blok M S, Kalb N, Reiserer A, et al. Towards quantum networks of single spins: Analysis of a quantum memory with an optical interface in diamond. *Faraday Discuss*, 2015, 184: 173–182
- 3 Deng D L, Li X, Das Sarma S. Quantum entanglement in neural network states. *Phys Rev X*, 2017, 7: 021021
- 4 Chen L B, Lu H. Quantum networks for implementing efficiently a nonlocal N-qubit controlled unitary gate via non-symmetric quantum channels: Designing and optimizing (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2017, 47: 120301 [陈立冰, 路洪. 基于非对称量子信道的非局域 N-qubit 受控幺正门的网络设计与优化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2017, 47: 120301]
- 5 Chiribella G, D'Ariano G M, Perinotti P. Theoretical framework for quantum networks. *Phys Rev A*, 2009, 80: 022339
- 6 Wang W H, Cao H X, Chen Z L, et al. Quantitative conditions for time evolution in terms of the von Neumann equation. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 070312
- 7 Branciard C, Cavalcanti E G, Walborn S P, et al. One-sided device-independent quantum key distribution: Security, feasibility, and the connection with steering. *Phys Rev A*, 2012, 85: 010301
- 8 Long G L, Liu X S. Theoretically efficient high-capacity quantum-key-distribution scheme. *Phys Rev A*, 2002, 65: 032302
- 9 Wang C, Deng F G, Li Y S, et al. Quantum secure direct communication with high-dimension quantum superdense coding. *Phys Rev A*, 2005, 71: 44305
- 10 Domínguez-Serna F, Rojas F. Quantum control using genetic algorithms in quantum communication: superdense coding. *J Phys-Conf Ser*, 2015, 624: 012009
- 11 Arrazola J M, Scarani V. Covert quantum communication. *Phys Rev Lett*, 2016, 117: 250503
- 12 Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can Quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys Rev*, 1935, 47: 777–780
- 13 Schrödinger E. Discussion of probability relations between separated systems. *Math Proc Camb Phil Soc*, 1935, 31: 555–563
- 14 Reid M D. Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification. *Phys Rev A*, 1989, 40: 913–923
- 15 Werner R F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys Rev A*, 1989, 40: 4277–4281

- 16 Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C. Steering, entanglement, nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Phys Rev Lett*, 2007, 98: 140402
- 17 Stapp H P. Bell's theorem and world process. *Nuovo Cim B*, 1975, 29: 270–276
- 18 Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Phys Rev Lett*, 1991, 67: 661–663
- 19 Pironio S, Acín A, Massar S, et al. Random numbers certified by Bell's theorem. *Nature*, 2010, 464: 1021–1024
- 20 Bowles J, Vértesi T, Quintino M T, et al. One-way Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 200402
- 21 Saunders D J, Jones S J, Wiseman H M, et al. Experimental EPR-steering using Bell-local states. *Nat Phys*, 2010, 6: 845–849
- 22 Cavalcanti E G, He Q Y, Reid M D, et al. Unified criteria for multipartite quantum nonlocality. *Phys Rev A*, 2011, 84: 032115
- 23 Sun K, Ye X J, Xu J S, et al. Experimental Quantification of asymmetric Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 160404
- 24 Chen J L, Ren C, Chen C, et al. Bell's nonlocality can be detected by the violation of Einstein-Podolsky-Rosen steering inequality. *Sci Rep*, 2016, 6: 39063
- 25 Cao H X, Guo Z H. Characterizing Bell nonlocality and EPR steering. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2019, 62: 030311
- 26 Zheng C, Guo Z, Cao H. Generalized steering robustness of bipartite quantum states. *Int J Theor Phys*, 2018, 57: 1787–1801
- 27 Li Z W, Guo Z H, Cao H X. Some characterizations of EPR steering. *Int J Theor Phys*, 2018, 57: 3285–3295
- 28 Yang Y, Cao H. Einstein-Podolsky-Rosen steering inequalities and applications. *Entropy*, 2018, 20: 683
- 29 Xiao S, Guo Z H, Cao H X. Quantum steering in tripartite quantum systems (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 010301 [肖书, 郭志华, 曹怀信. 三体量子系统的量子导引方案. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 010301]

Detecting $AB \rightarrow C$ steering in tripartite quantum systems

LIU Jie, YANG Ying, XIAO Shu & CAO HuaiXin*

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China

In this paper, the detection problem of $AB \rightarrow C$ steering is discussed. Firstly, we give some relationships between the $AB \rightarrow C$ steering of ρ^{ABC} and $A \rightarrow C$ steering of the reduced state ρ^{AC} as well as $B \rightarrow C$ steering of the reduced state ρ^{BC} based on their definitions. Secondly, by deducing an inequality (called an steering inequality) for $AB \rightarrow C$ unsteerable states, a necessary condition for a quantum state to be $AB \rightarrow C$ unsteerable is obtained. Furthermore, the steering radius $S(\rho)$ of a state ρ is defined and it is proved that when ρ is $AB \rightarrow C$ unsteerable, $S(\rho) \leq 1$ and that when $S(\rho) > 1$, $t\rho + (1-t)\eta$ is $AB \rightarrow C$ steerable for each $t_0 < t \leq 1$ and for each $AB \rightarrow C$ unsteerable state η where $t_0 = \frac{2}{S(\rho)+1}$. Finally, $AB \rightarrow C$ steerability of the “partial convex combinations” of the GHZ state, generalized GHZ state and the W-state with a $AB \rightarrow C$ unsteerable state are detected, respectively by using the obtained steering inequality.

tripartite quantum system, quantum measurement, quantum steering, steering inequality

PACS: 03.65.Ca, 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.75.Gg

doi: 10.1360/SSPMA-2019-0261