Cohen 弱核多线性算子

献给吴从忻教授 85 华诞

黎永锦¹, 刘琪¹, 卜庆营^{2*}

1. 中山大学数学学院, 广州 510275;

2. Department of Mathematics, University of Mississippi, University, MS 38677, USA

E-mail: stslsj@mail.sysu.edu.cn, liuq325@mail2.sysu.edu.cn, qbu@olemiss.edu

收稿日期: 2020-06-08; 接受日期: 2020-08-08; 网络出版日期: 2020-11-17; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971493) 资助项目

摘要 本文介绍并研究 Banach 空间上一类新的多线性算子, 称为 Cohen 弱 p -核多线性算子. 本文为这一类新的多线性算子建立了相应的 Pietsch 控制定理. 作为应用, 本文证明了每个 Cohen 弱 p -核多线性算子都是强 p -可和的并且也是 Cohen 强 p -可和的.

关键词 多线性算子 核算子 p -可和算子

MSC (2010) 主题分类 46G25, 47H60

1 引言

可和线性算子在 Banach 空间理论中起着重要的作用 (参见文献 [1]). 在最近二十年中, 线性算子的可和性以许多不同的方式扩展到多线性算子的可和性. 例如, 将一类绝对 p -可和线性算子扩展到多线性算子的绝对 p -可和、 p -控制和强 p -可和 (参见文献 [2–4]), 以及将一类 Cohen 强 p -可和和 Cohen p -核线性算子分别扩展到 Cohen 强 p -可和和 Cohen p -核多线性算子 (参见文献 [5, 6]). 本文将一类 Cohen p -核线性算子扩展到一类新的多线性算子, 即 Cohen 弱 p -多线性算子, 并证明这种新的多线性算子是算子理想, 介于 Cohen 强 p -可和多线性算子与 Cohen p -核多线性算子之间. 利用 Ky Fan 引理为 Cohen 弱 p -核多线性算子建立了 Pietsch 控制定理, 从而得出每个 Cohen 弱 p -核多线性算子都是强 p -可和的. 每个多线性算子 $T: X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y$ 在乘积空间上具有投影张量积的线性化 $\tilde{T} = X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$. 在本文的最后, 分别针对多线性算子的 p -控制、强 p -可和、Cohen 强 p -可和、Cohen p -核和 Cohen 弱 p -核, 总结了 T 的可和性与其线性化 $\tilde{T}$ 的可和性之间的关系.

英文引用格式: Li Y J, Liu Q, Bu Q Y. On Cohen weakly nuclear multilinear operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1783–1792, doi: 10.1360/SSM-2020-0177

2 预备知识

对于 Banach 空间 X , 令 X^* 表示其拓扑对偶, 而 B_X 表示其闭单位球. 对于 Banach 空间 X 和 Y 以及连续线性算子 $u: X \rightarrow Y$, 令 $u^*: Y^* \rightarrow X^*$ 表示 u 的伴随算子. 对于 $1 \leq p < \infty$, 令 q 表示其共轭, 即 $1/p + 1/q = 1$. 令 $(e_n)_n$ 表示 ℓ_p 的单位向量基, 即对于每一个 $n \in \mathbb{N}$, $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, 0, \dots)$. 给定一个 Banach 空间 X 和 $1 \leq p < \infty$, X 中的序列 $(x_n)_n$ 称为 (i) 绝对 p -可和的, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$; (ii) 弱 p -可和的, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p < \infty$ 对于每一个 $x^* \in X^*$ 成立; (iii) 强 p -可和的, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x_n)| < \infty$ 对于 X^* 中的每一个弱 q -可和序列 $(x_n^*)_n$ 成立. 如果 $(x_n)_n$ 是 X 中的一个弱 p -可和序列, 那么 $\|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} := \sup\{(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\} < \infty$.

给定 Banach 空间 X 和 Y , 线性算子 $u: X \rightarrow Y$ 被称作 (i) 绝对 p -可和的 ($1 \leq p < \infty$), 如果 u 将 X 中的弱 p -可和序列作用为 Y 中的绝对 p -可和序列, 即存在正常数 K 对于任意有限序列 $x_1, \dots, x_n \in X$ 使得 $(\sum_{i=1}^n \|ux_i\|^p)^{1/p} \leq K \| (x_i)_1^n \|_{\ell_p^w(X)}$, 令 $\Pi_p(X; Y)$ 表示从 X 到 Y 上所有绝对 p -可和算子组成的空间; (ii) Cohen 强 p -可和的 ($1 < p < \infty$) (参见文献 [7]), 如果 u 将 X 中的绝对 p -可和序列作用为 Y 中的强 p -可和序列, 即存在正常数 K 对于任意有限序列 $x_1, \dots, x_n \in X$ 和 $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ 使得 $\sum_{i=1}^n |\langle ux_i, y_i^* \rangle| \leq K (\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p)^{1/p} \| (y_i^*)_1^n \|_{\ell_q(Y^*)}$, 令 $\mathcal{D}_p(X; Y)$ 表示从 X 到 Y 上所有 Cohen 强 p -可和算子组成的空间; (iii) Cohen p -核的 ($1 < p < \infty$) (参见文献 [7]), 如果 u 将 X 中的弱 p -可和序列作用为 Y 中的强 p -可和序列, 即存在正常数 K 对于任意有限序列 $x_1, \dots, x_n \in X$ 和 $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ 使得 $\sum_{i=1}^n |\langle ux_i, y_i^* \rangle| \leq K \| (x_i)_1^n \|_{\ell_p^w(X)} \| (y_i^*)_1^n \|_{\ell_q(Y^*)}$, 令 $\mathcal{N}_p(X; Y)$ 表示从 X 到 Y 上所有 Cohen p -核算子组成的空间. 我们知道 $u \in \mathcal{D}_p(X; Y)$ 当且仅当 $u^* \in \Pi_q(Y^*; X^*)$, $u \in \mathcal{N}_p(X; Y)$ 当且仅当 $u^* \in \mathcal{N}_q(Y^*; X^*)$. 另外, $u \in \mathcal{N}_p(X; Y)$ 当且仅当存在 Banach 空间 Z , $v \in \Pi_p(X; Z)$ 和 $w \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$ 使得 $u = w \circ v$ (参见文献 [1]).

对于 Banach 空间 $X_1, \dots, X_m$ 和 Y , 令 $\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上的所有连续 m -线性算子组成的空间, 其范数定义为 $\|T\| = \sup\{\|T(x_1, \dots, x_m)\| : \|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_m\| \leq 1\}$. 令 $X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m$ 定义为 $X_1, \dots, X_m$ 的投影张量积, 那么对于 $T \in \mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 有唯一的线性化 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m; Y)$ 使得 $T = \tilde{T} \circ \otimes$, 其中 $\otimes: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m$ 由 $\otimes(x^1, \dots, x^m) = x^1 \otimes \dots \otimes x^m$ 给出, 这里 $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$. 另外, $\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 是与 $\mathcal{L}(X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m; Y)$ 等距同构的. 特别地,

$$\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m) := \mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m; \mathbb{R}) = (X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} X_m)^*.$$

m -线性算子 $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ 被称作:

(i) 绝对 p -可和的 ($1 \leq p < \infty$) (参见文献 [2]), 如果存在一个正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$), 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{1/p} \leq K \prod_{j=1}^m \| (x_i^j)_{i=1}^n \|_{\ell_p^w(X_j)}.$$

令 $\mathcal{L}_{as,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有绝对 p -可和 m -线性算子组成的空间. 显然, $\mathcal{L}_{as,p}^1(X; Y) = \Pi_p(X; Y)$.

(ii) p -控制的 ($1 \leq p < \infty$) (参见文献 [3]), 如果存在一个正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$), 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^{p/m} \right)^{m/p} \leq K \prod_{j=1}^m \| (x_i^j)_{i=1}^n \|_{\ell_p^w(X_j)}.$$

令 $\mathcal{L}_{d,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有 p - 控制 m - 线性算子组成的空间. 显然, $\mathcal{L}_{d,p}^1(X; Y) = \Pi_p(X; Y)$.

(iii) 强 p - 可和的 ($1 \leq p < \infty$) (参见文献 [4]), 如果存在一个正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$), 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1, \dots, x_i^m)\|^p \right)^{1/p} \leq K \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p}.$$

令 $\mathcal{L}_{ss,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有强 p - 可和 m - 线性算子组成的空间. 显然, $\mathcal{L}_{ss,p}^1(X; Y) = \Pi_p(X; Y)$.

(iv) Cohen 强 p - 可和的 ($1 < p < \infty$) (参见文献 [5]), 如果存在一个正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$) 和 $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, 有

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq K \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p \right)^{1/p} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(Y^*)}.$$

令 $\mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有 Cohen 强 p - 可和 m - 线性算子组成的空间. 显然, $\mathcal{D}_p^1(X; Y) = \mathcal{D}_p(X; Y)$.

(v) Cohen p - 核的 ($1 < p < \infty$) (参见文献 [6]), 如果存在一个正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$) 和 $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, 有

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq K \left(\sup_{x^{j*} \in B_{X_j^*}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m |\langle x_i^j, x^{j*} \rangle|^p \right)^{1/p} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(Y^*)}.$$

令 $\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有 Cohen p - 核 m - 线性算子组成的空间. 显然, $\mathcal{N}_p^1(X; Y) = \mathcal{N}_p(X; Y)$.

3 Cohen 弱 p - 核算子

定义 3.1 m - 线性算子 $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ 被称作 Cohen 弱 p - 核的 ($1 < p < \infty$), 如果存在正常数 K 使得对于任意 $x_1^j, \dots, x_n^j \in X_j$ ($j = 1, \dots, m$) 和 $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, 有下式成立:

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| \leq K \cdot \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p} \cdot \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(Y^*)}. \quad (3.1)$$

令 $\mathcal{N}_{w,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 定义为从 $X_1 \times \dots \times X_m$ 到 Y 上所有 Cohen 弱 p - 核 m - 线性算子组成的空间, 并且在范数 $n_{w,p}^m(T)$ 下是 Banach 空间, 其中 $n_{w,p}^m(T)$ 是使得 (3.1) 成立的最小常数 K . 显然, $\mathcal{N}_{w,p}^1(X; Y) = \mathcal{N}_p(X; Y)$.

对于 Cohen 弱 p - 核多线性算子, 可以得到以下性质.

命题 3.1 如果 $T \in \mathcal{N}_{w,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$, 其中 $j = 1, \dots, m$, $v \in L(Y; Z)$, 那么 $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{N}_{w,p}^m(E_1, \dots, E_m; Z)$.

注意到 $\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m) = (X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m)^*$. 如果 $(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m)_i$ 是 $X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m$ 中的一个弱 p - 可和序列, 那么对于每一个 $\phi \in \mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)$, 有 $\sum_{i=1}^\infty |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p = \sum_{i=1}^\infty |\tilde{\phi}(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m)|^p < \infty$. 从定义可知 $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ 是 Cohen 弱 p - 核的当且仅当 $(x_i^1 \otimes \dots \otimes x_i^m)_i$ 是

$X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m$ 中的一个弱 p -可和序列时 $(\tilde{T}(x_i^1 \otimes \cdots \otimes x_i^m))_i$ 是 Y 中的一个强 p -可和序列. 然而, 我们不知道如果 T 是 Cohen 弱 p -核的能否得到 $\tilde{T}$ 是 Cohen p -核的.

注意到对于任意 $\phi \in \mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)$, $|\phi(x^1, \dots, x^m)| \leq \|\phi\| \|x^1\| \cdots \|x^m\|$. 对于 $x^{j*} \in B_{X_j^*}$ ($1 \leq j \leq m$), 令 $\phi_1 = x^{1*} \otimes \cdots \otimes x^{m*}$. 那么 $\phi_1 \in B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)}$ 和 $\phi_1(x^1, \dots, x^m) = \prod_{j=1}^m \langle x^j, x^{j*} \rangle$. 因此, 以下结果可以直接从定义得到.

命题 3.2 令 $1 < p < \infty$, 则

$$\mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{N}_{w,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y).$$

每个 $T \in \mathcal{N}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 是弱紧算子 (参见文献 [6]), 并且 $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 是弱紧的 (参见文献 [8]). 因此 $T \in \mathcal{N}_{w,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y)$ 也是弱紧的.

定理 3.1 m -线性算子 $T: X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y$ 是 Cohen 弱 p -核的当且仅当存在正常数 K 及 $(B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)}, w^*)$ 上的正则概率测度 μ 和 $(B_{Y^{**}}, w^*)$ 上的 λ 使得对于任意 $x^j \in X_j$ ($1 \leq j \leq m$) 和 $y^* \in Y^*$, 有

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &\leq K \left(\int_{B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)}} |\phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^q d\lambda(y^{**}) \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

证明 在这里令 $\mathcal{L}^m := \mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m)$. 为了证明充分性, 假设 (3.2) 成立, 对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq m$, 取任意的 $x_i^j \in X_j, y_i^* \in Y^*$. 根据 (3.2) 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| &\leq K \left(\int_{B_{\mathcal{L}^m}} \sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_{B_{Y^{**}}} \sum_{i=1}^n |y^{**}(y_i^*)|^q d\lambda(y^{**}) \right)^{1/q} \\ &\leq K \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}^m}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p} \| (y_i^*)_{i=1}^n \|_{\ell_q^w(Y^*)}, \end{aligned}$$

因此, T 是 Cohen 弱 p -核的.

为了证明必要性, 根据文献 [5, 6] 中的方法并且结合 Ky Fan 引理 (参见文献 [1]). 假设 $T: X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y$ 是 Cohen 弱 p -核的. 令 $\Omega_1 = (B_{\mathcal{L}^m}, w^*)$ 和 $\Omega_2 = (B_{Y^{**}}, w^*)$, 则 $E := (C(\Omega_1)^*, w^*) \times (C(\Omega_2)^*, w^*)$ 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间且 $\mathcal{C} := B_{C(\Omega_1)^*} \times B_{C(\Omega_2)^*}$ 是 E 中的紧凸子集. 令 M 为 $\mathcal{C}$ 上的所有实值函数且具有下面形式:

$$\begin{aligned} f(\mu, \lambda) &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{K}{p} \sum_{i=1}^n \int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p d\mu(\phi) \\ &\quad - \frac{K}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y_i^*)|^q d\lambda(y^{**}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq m$, 其中 $x_i^j \in X_j, y_i^* \in Y^*$. 很明显, 这样的函数是凸的且连续的. 对于任意的 $0 \leq \alpha \leq 1$ 和具有 (3.3) 形式的函数 f 和 g , 容易得到 $\alpha f + (1 - \alpha)g$ 也具有 (3.3) 这样的形式 (参

见文献 [5]). 因而, M 是一个凸集. 注意到 $C(\Omega_1)$ 和 $C(\Omega_2)$ 中的每一个元素是范数可达的. 对于具有 (3.3) 形式的函数, 存在 $\phi_0 \in B_{\mathcal{L}^m}$ 和 $y_0^{**} \in B_{Y^{**}}$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n |\phi_0(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p} = \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}^m}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p}$$

和

$$\left(\sum_{i=1}^n |y_0^{**}(y_i^*)|^q \right)^{1/q} = \sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |y^{**}(y_i^*)|^q \right)^{1/q} = \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(Y^*)}.$$

在下面基本等式中:

$$ab = \inf_{\epsilon > 0} \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{a}{\epsilon} \right)^p + \frac{1}{q} (\epsilon b)^q \right\}, \quad \forall a, b > 0, \quad (3.4)$$

令

$$a = \left(\sum_{i=1}^n |\phi_0(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p}, \quad b = \left(\sum_{i=1}^n |y_0^{**}(y_i^*)|^q \right)^{1/q}.$$

令 $\delta_{y_0^{**}}$ 和 δ_{ϕ_0} 表示 Dirac 测度, 那么应用 (3.4), 其中 $\epsilon = 1$, 有

$$\begin{aligned} f(\delta_{\phi_0}, \delta_{y_0^{**}}) &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - \frac{K}{p} \sum_{i=1}^n |\phi_0(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p - \frac{K}{q} \sum_{i=1}^n |y_0^{**}(y_i^*)|^q \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - Kab \\ &= \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i^1, \dots, x_i^m), y_i^* \rangle| - K \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}^m}} \left(\sum_{i=1}^n |\phi(x_i^1, \dots, x_i^m)|^p \right)^{1/p} \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(Y^*)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

根据 Ky Fan 引理, 对于任意 $f \in M$, 存在 $(\mu, \lambda) \in \mathcal{C}$ 使得 $f(\mu, \lambda) \leq 0$. 如果 f 是由单元素 $(x^1, \dots, x^m) \in X_1 \times \dots \times X_m$ 生成, 另外有单元素 $y^* \in Y^*$, 那么根据 (3.3) 有

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq \frac{K}{p} \int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\phi) + \frac{K}{q} \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^q d\lambda(y^{**}).$$

再次使用基本等式并令

$$a = \left(\int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p}, \quad b = \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^q d\lambda(y^{**}) \right)^{1/q},$$

那么对于任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &= |\langle T(\epsilon^{-1/m} x^1, \dots, \epsilon^{-1/m} x^m), \epsilon y^* \rangle| \\ &\leq \frac{K}{p} \int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\phi(\epsilon^{-1/m} x^1, \dots, \epsilon^{-1/m} x^m)|^p d\mu(\phi) \\ &\quad + \frac{K}{q} \int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(\epsilon y^*)|^q d\lambda(y^{**}) \\ &= \frac{K}{p} \left(\frac{a}{\epsilon} \right)^p + \frac{K}{q} (\epsilon b)^q. \end{aligned}$$

在 (3.4) 中对所有的 $\epsilon > 0$ 取下确界, 那么有

$$|\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| \leq K \left(\int_{B_{\mathcal{L}^m}} |\phi(x^1, \dots, x^m)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^q d\lambda(y^{**}) \right)^{1/q},$$

因此 (3.2) 成立. 证明完毕. $\square$

对于强可和多线性算子, 将定理 3.1 与 Pietsch 控制定理相结合 (参见文献 [4]), 有以下结果.

命题 3.3 令 $1 < p < \infty$, 则

$$\mathcal{N}_{w,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_{ss,p}^m(X_1, \dots, X_m; Y).$$

Achour 和 Alouani [6] 给出了 Cohen p -核多线性算子的因式分解. 现在, 将因式分解重新写为以下形式.

命题 3.4 设 $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ 是 m -线性算子且 $1 < p < \infty$, 则 T 是 Cohen p -核的当且仅当存在 Banach 空间 Z 、 p -控制 m -线性算子 $S: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$ 和 Cohen 强 p -可和线性算子 $u: Z \rightarrow Y$ 使得 $T = u \circ S$, 即 $\mathcal{N}_p^m = D_p \circ \mathcal{L}_{d,p}^m$.

证明 充分性. 选取任意的 $x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m$ 和任意的 $y^* \in Y^*$. 根据 Cohen 强 p -可和算子和 p -控制算子的 Pietsch 控制定理 (参见文献 [5]), 有

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &= \langle u(S(x^1, \dots, x^m)), y^* \rangle \\ &\leq K_1 \|S(x^1, \dots, x^m)\|_Z \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)} \\ &\leq K_1 K_2 \prod_{j=1}^m \|x^j\|_{L_p(B_{X_j^*}, \mu_j)} \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)}, \end{aligned}$$

那么根据文献 [6, 定理 2.5] 可以得到 T 是 Cohen p -核的.

必要性. 根据文献 [6, 定理 3.1], 存在 Banach 空间 $G_1, \dots, G_m$ 、绝对 p -可和线性算子 $u_j: X_j \rightarrow G_j$ ($1 \leq j \leq m$) 和 Cohen 强 p -可和 m -线性算子 $R: G_1 \times \dots \times G_m \rightarrow Y$ 使得 $T = R \circ (u_1, \dots, u_m)$. 令 $S = \otimes \circ (u_1, \dots, u_m)$ 和 $u = \tilde{R}$, 那么有下面的关系:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ (u_1, \dots, u_m) \downarrow & \searrow S & \uparrow u \\ G_1 \times \dots \times G_m & \xrightarrow[\otimes]{} G_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi G_m & \end{array}$$

于是可得 u 是 Cohen 强 p -可和的 (参见文献 [8,9]) 并且 S 是 p -控制的 (参见文献 [5,8]). 综上, 证明完毕. $\square$

下面的问题是有趣的, 即是否可以通过强 p -可和多线性算子和 Cohen 强 p -可和线性算子来分解每个 Cohen 弱 p -核多线性算子, 这是一个未解决的问题. 但是, 对于相反的情形, 我们有以下结果.

定理 3.2 设 $T: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ 是 m -线性算子且 $1 < p < \infty$.

(i) T 是 Cohen p -核的;

(ii) T 是 Cohen 弱 p -核的;

(iii) $\tilde{T}: X_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$ 是 Cohen p -核的;

(iv) 存在 Banach 空间 Z 、强 p -可和 m -线性算子 $S: X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$ 和 Cohen 强 p -可和线性算子 $u: Z \rightarrow Y$ 使得 $T = u \circ S$.

那么 (i) $\Rightarrow$ (iv) $\nRightarrow$ (i) 并且 (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii).

证明 (i) $\Rightarrow$ (iv) 因为 p - 控制 m - 线性算子是强 p - 可和的, (iv) 可由命题 3.4 得到.

(iv) $\nRightarrow$ (i) 参阅下面例 3.1 中的情形 1.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 因为 $\tilde{T}$ 是 Cohen p - 核的, 存在 Banach 空间 Z 、绝对 p - 可和线性算子 $v: X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Z$ 和 Cohen 强 p - 可和线性算子 $u: Z \rightarrow Y$ 使得 $\tilde{T} = u \circ v$. 令 $S = v \circ \otimes$, 则 $T = \tilde{T} \circ \otimes = u \circ v \circ \otimes = u \circ S$ 并有下面的关系:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ \otimes \downarrow & \searrow S & \uparrow u \\ X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_m & \xrightarrow{v} & Z \end{array}$$

因为 $\tilde{S} = v$, 所以可得 S 是强 p - 可和的 (参见文献 [4]). 因此, 可得 (iv) 成立.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) 选取任意的 $x^1 \in X_1, \dots, x^m \in X_m$ 和任意的 $y^* \in Y^*$. 对于 Cohen 强 p - 可和算子和强 p - 可和算子, 根据 Pietsch 控制定理, 有

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, \dots, x^m), y^* \rangle| &= \langle u(S(x^1, \dots, x^m)), y^* \rangle \\ &\leq K_1 \|S(x^1, \dots, x^m)\|_Z \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)} \\ &\leq K_1 K_2 \|(x^1, \dots, x^m)\|_{L_p(B_{\mathcal{L}^m(X_1, \dots, X_m), \mu})} \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)}, \end{aligned}$$

根据定理 3.1 可得 T 是 Cohen 弱 p - 可和的. 综上, 证明完毕. $\square$

公开问题 在定理 3.2 条件下, 是否有 (i) $\Rightarrow$ (iii) 成立?

Achour 和 Alouani^[6] 构造了多线性算子, 它是 Cohen p - 核的, 因此也是 Cohen 弱 p - 核的. 在下面的例 3.1 情形 1 中, 将构造多线性算子, 其为 Cohen 弱 p - 核而不是 Cohen p - 核的. 接下来证明对于特殊的 Banach 空间, Cohen p - 核多线性算子与 Cohen 弱 p - 核多线性算子的一致性.

命题 3.5 如果 X_1 和 X_2 是 $\mathcal{L}_\infty$ - 空间, Y 是任意的 Banach 空间, 那么对于任意的 $p \geq 2$, 有 $\mathcal{N}_p^2(X_1, X_2; Y) = \mathcal{N}_{w,p}^2(X_1, X_2; Y)$.

证明 假设 X_1 和 X_2 分别是 $\mathcal{L}_{\infty, \sigma_1}$ - 空间和 $\mathcal{L}_{\infty, \sigma_2}$ - 空间. 根据文献 [10, 推论 4.4] 可知, 每一个双线性形式 $\phi: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 2- 控制的, 因此, 对于 $p \geq 2$ 也是 p - 控制的, 且有 $\|\phi\|_{d,p} \leq \|\phi\|_{d,2} \leq \sigma_1 \sigma_2 K_G \|\phi\|$, 其中 K_G 是 Grothendieck 常数. 选取任意的 $T \in \mathcal{N}_{w,p}^2(X_1, X_2; Y)$, $x^1 \in X_1$, $x^2 \in X_2$, $y^* \in Y^*$. 对于控制多线性算子, 根据 Pietsch 控制定理 (参见文献 [5]), 有

$$\begin{aligned} |\phi(x^1, x^2)| &\leq \|\phi\|_{d,p} \cdot \|x^1\|_{L_p(B_{X_1^*}, \mu_1)} \cdot \|x^2\|_{L_p(B_{X_2^*}, \mu_2)} \\ &\leq \sigma_1 \sigma_2 K_G \|\phi\| \cdot \|x^1\|_{L_p(B_{X_1^*}, \mu_1)} \cdot \|x^2\|_{L_p(B_{X_2^*}, \mu_2)}. \end{aligned}$$

根据定理 3.1 有

$$\begin{aligned} |\langle T(x^1, x^2), y^* \rangle| &\leq K \left(\int_{B_{\mathcal{L}^2(X_1, X_2)}} |\phi(x^1, x^2)|^p d\mu(\phi) \right)^{1/p} \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)} \\ &\leq \sigma_1 \sigma_2 K K_G \|x^1\|_{L_p(B_{X_1^*}, \mu_1)} \cdot \|x^2\|_{L_p(B_{X_2^*}, \mu_2)} \cdot \|y^*\|_{L_q(B_{Y^{**}}, \lambda)}, \end{aligned}$$

那么对于 Cohen 核多线性算子, 根据 Pietsch 控制定理 (参见文献 [6]), 可得 $T \in \mathcal{N}_p^2(X_1, X_2; Y)$. $\square$

例 3.1 定义 $T_1: \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \ell_1$ 为 $T_1(x, y) = (x_k y_k)_k$, 其中 $x = (x_k)_k, y = (y_k)_k \in \ell_2$, 那么 $T_1 \in \mathcal{L}^2(\ell_2, \ell_2; \ell_1)$. 令 $I_1: \ell_1 \hookrightarrow \ell_2$ 是典范包含映射且 $T_2 = I_1 \circ T_1: \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \ell_2$; 对于任意的 $p \geq 1$, T_2

是强 p -可和的 (参见文献 [10]). 令 $I_2: \ell_2 \hookrightarrow \ell_\infty$ 是典态包含映射且 $T_3 = I_2 \circ T_2: \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \ell_\infty$. 因为对于任意 $p \geq 1$, I_1 是绝对 p -可和的, $I_2 = I_1^*$; 对于任意的 $p > 1$, I_2 是 Cohen 强 p -可和的. 因此, T_3 满足定理 3.2(iv), 所以对于任意 $p > 1$, T_3 是 Cohen 弱 p -核的.

情形 1 对于任意的 $p > 1$, T_3 不是 Cohen p -核的.

假设 $T_3 \in \mathcal{N}_p^2(\ell_2, \ell_2; \ell_\infty)$, 则对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在正常数 K , 使得

$$\sum_{i=1}^n |\langle T_3(e_i, e_i), e_i \rangle| \leq K \left(\sup_{\phi^1, \phi^2 \in B_{\ell_2}} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 |\langle e_i, \phi^j \rangle|^p \right)^{1/p} \cdot \|(e_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(\ell_\infty)}.$$

注意到 (参见文献 [11]) 如果 $(x_i^*)_i$ 是 X^* 中弱 q -可和序列, 则

$$\|(x_i^*)_i\|_{\ell_q^w(X^*)} = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x)|^q \right)^{1/q} : x \in B_X \right\}.$$

因此,

$$\|(e_i)_{i=1}^n\|_{\ell_q^w(\ell_\infty)} = \sup_{\phi \in B_{\ell_1}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle e_i, \phi \rangle|^q \right)^{1/q} \leq \sup_{\phi \in B_{\ell_1}} \|\phi\|_{\ell_q} \leq \sup_{\phi \in B_{\ell_1}} \|\phi\|_{\ell_1} \leq 1.$$

于是对于任意的 $\phi^1, \phi^2 \in B_{\ell_2}$, 有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^2 |\langle e_i, \phi^j \rangle|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^n |\phi_i^1 \phi_i^2|^p \right)^{1/p} \leq \sum_{i=1}^n |\phi_i^1 \phi_i^2| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |\phi_i^1|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |\phi_i^2|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\phi^1\|_{\ell_2} \cdot \|\phi^2\|_{\ell_2} \leq 1. \end{aligned}$$

但是 $\sum_{i=1}^n |\langle T_3(e_i, e_i), e_i \rangle| = n$. 所以导出矛盾, 即得 $T_3 \notin \mathcal{N}_p^2(\ell_2, \ell_2; \ell_\infty)$.

情形 2 对于任意的 $p \geq 2$, T_2 不是 p -控制的.

假设 $T_2 \in \mathcal{L}_{d,p}^2(\ell_2, \ell_2; \ell_2)$, 则对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在正常数 K , 使得

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i, e_i)\|^{p/2} \right)^{2/p} \leq K \|(e_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^w(\ell_2)}^2.$$

注意到

$$\|(e_i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^w(\ell_2)}^2 = \sup_{\phi \in B_{\ell_2}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle e_i, \phi \rangle|^p \right)^{2/p} \leq \sup_{\phi \in B_{\ell_2}} \sum_{i=1}^n |\langle e_i, \phi \rangle|^2 \leq 1,$$

但是 $(\sum_{i=1}^n \|T(e_i, e_i)\|^{p/2})^{2/p} = n^{2/p}$, 所以导出矛盾, 即得 $T_2 \notin \mathcal{L}_{d,p}^2(\ell_2, \ell_2; \ell_2)$.

例 3.2 定义 $T_4: \ell_1 \times \ell_1 \rightarrow \ell_1$ 为 $T_1(x, y) = (x_k y_k)_k$, 其中 $x = (x_k)_k, y = (y_k)_k \in \ell_1$, 则对于任意 $p \geq 1$, T_4 是强 p -可和的, 但是 T_4 不是弱紧的 (参见文献 [10]).

情形 3 对于任意 $p \geq 2$, T_4 是 p -控制的.

选取 $x^i = (x_k^i)_k, y^i = (y_k^i)_k \in \ell_1$, 其中 $i = 1, \dots, n$. 根据 Khinchin 不等式 (参见文献 [1]), 可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x^i, y^i)\|^{p/2} \right)^{2/p} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^i y_k^i| \right)^{p/2} \right)^{2/p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^i|^2 \right)^{p/4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^i|^2 \right)^{p/4} \right)^{2/p} \\
&\leq \frac{1}{A_p^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) x_k^i \right|^p dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) y_k^i \right|^p dt \right)^{1/2} \right)^{2/p} \\
&\leq \frac{1}{A_p^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) x_k^i \right|^p dt \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) y_k^i \right|^p dt \right)^{1/2} \right)^{2/p} \\
&= \frac{1}{A_p^2} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n |\langle x^i, (r_k(t))_k \rangle|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n |\langle y^i, (r_k(t))_k \rangle|^p dt \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{A_p^2} \|(x^i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^w(\ell_1)} \cdot \|(y^i)_{i=1}^n\|_{\ell_p^w(\ell_1)},
\end{aligned}$$

其中 A_p 是 Khinchin 不等式中的常数, $r_k(t)$ 是 Rademacher 函数. 因此, 对于任意 $p \geq 2$,

$$T_4 \in \mathcal{L}_{d,p}^2(\ell_1, \ell_1; \ell_1).$$

令 $T: X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow Y$ 是 m -线性算子, $\tilde{T}: X_1 \hat{\otimes}_{\pi} \cdots \hat{\otimes}_{\pi} X_m \rightarrow Y$ 是它的线性化. 关于 T 的可和性与 $\tilde{T}$ 的可和性关系, 我们列出下面一些事实.

事实 3.1 $T \in \mathcal{D}_p^m \Leftrightarrow \tilde{T} \in \mathcal{D}_p^1 = \mathcal{D}_p$ (参见文献 [8, 9]).

事实 3.2 $\tilde{T} \in \mathcal{L}_{ss,p}^1 = \Pi_p \Rightarrow T \in \mathcal{L}_{ss,p}^m$, 但是 $T \in \mathcal{L}_{ss,p}^m \not\Rightarrow \tilde{T} \in \mathcal{L}_{ss,p}^1 = \Pi_p$ (参见文献 [4, 10]).

事实 3.3 $\tilde{T} \in \mathcal{L}_{d,p}^1 = \Pi_p \not\Rightarrow T \in \mathcal{L}_{d,p}^m$ 和 $T \in \mathcal{L}_{d,p}^m \not\Rightarrow \tilde{T} \in \mathcal{L}_{d,p}^1 = \Pi_p$.

根据情形 2, 可得 $T_2 \notin \mathcal{L}_{d,p}^m$. 但是 $\tilde{T}_2 = I_1 \circ \tilde{T}_1 \in \Pi_p$. 由情形 3, $T_4 \in \mathcal{L}_{d,p}^m$. 但是 T_4 不是弱紧的, 因此, $\tilde{T}_4$ 不是弱紧的, 所以, $\tilde{T}_4 \notin \Pi_p$.

事实 3.4 $\tilde{T} \in \mathcal{N}_{w,p}^1 = \mathcal{N}_p \Rightarrow T \in \mathcal{N}_{w,p}^m$ (参见定理 3.2).

事实 3.5 $\tilde{T} \in \mathcal{N}_p^1 = \mathcal{N}_p \not\Rightarrow T \in \mathcal{N}_p^m$.

事实上, 根据情形 1, 可得 $T_3 \notin \mathcal{N}_p^m$. 但是因为 $\tilde{T}_2 \in \Pi_p$, $I_2 \in \mathcal{D}_p$, 所以 $\tilde{T}_3 = I_2 \circ \tilde{T}_2 \in \mathcal{N}_p$.

公开问题 3.1 $T \in \mathcal{N}_{w,p}^m$ 可否推出 $\tilde{T} \in \mathcal{N}_{w,p}^1 = \mathcal{N}_p$? $T \in \mathcal{N}_p^m$ 可否推出 $\tilde{T} \in \mathcal{N}_p^1 = \mathcal{N}_p$?

致谢 感谢吴从炘教授一直以来的关心和支持, 感谢审稿人的建议.

参考文献

- 1 Diestel J, Jarchow H, Tonge A. Absolutely Summing Operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 2 Matos M C. Absolutely summing holomorphic mappings. An Acad Brasil Ciênc, 1996, 68: 1–13
- 3 Meléndez Y, Tonge A. Polynomials and the Pietsch domination theorem. Math Proc R Ir Acad, 1999, 2: 195–212
- 4 Dimant V. Strongly p -summing multilinear operators. J Math Anal Appl, 2003, 278: 182–193
- 5 Achour D, Mezrag L. On the Cohen strongly p -summing multilinear operators. J Math Anal Appl, 2007, 327: 550–563
- 6 Achour D, Alouani A. On multilinear generalizations of the concept of nuclear operators. Colloq Math, 2010, 120: 85–102
- 7 Cohen J S. Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates. Math Ann, 1973, 201: 177–200
- 8 Mezrag L, Saadi K. Inclusion and coincidence properties for Cohen strongly summing multilinear operators. Collect Math, 2013, 64: 395–408
- 9 Bu Q, Shi Z. On Cohen almost summing multilinear operators. J Math Anal Appl, 2013, 401: 174–181
- 10 Carando D, Dimant V. On summability of bilinear operators. Math Nachr, 2003, 259: 3–11
- 11 Bu Q, Buskes G. Schauder decompositions and the Fremlin projective tensor product of Banach lattices. J Math Anal Appl, 2009, 355: 335–351

On Cohen weakly nuclear multilinear operators

Yongjin Li, Qi Liu & Qingying Bu

Abstract In this paper, we introduce and study a new class of multilinear operators on Banach spaces, called Cohen weakly p -nuclear multilinear operators. We establish a Pietsch domination theorem for this new class of multilinear operators. As an application, we show that every Cohen weakly p -nuclear multilinear operator is strongly p -summing and Cohen strongly p -summing.

Keywords multilinear operator, nuclear operator, p -summing operator

MSC(2010) 46G25, 47H60

doi: 10.1360/SSM-2020-0177