

文章编号: 1002-0268 (2007) 09-0112-04

随机路网的最短路径问题研究

范巍巍, 程琳

(东南大学 交通学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 主要研究随机路网中的最短路径问题, 首先给出随机路网的定义, 建立了随机路网的模型, 假定路段的费用是满足正态分布的随机变量, 并给出从历史数据中得到此变量的均值和方差的统计学方法; 然后得出路径出行费用的均值及方差的递推公式, 将费用的方差当作一个限制条件, 从而在 Dijkstra 算法的基础上, 提出了带单一限制条件的最短路径算法, 同时给出了算法的具体流程; 最后用一个简单例子演示了算法的具体步骤, 并在南京路网中验证了此算法的实用性。

关键词: 交通工程; 最短路径问题; 限制条件; 随机路网; 期望; 方差

中图分类号: U491

文献标识码: A

The Study on Shortest Path Problems in Stochastic Traffic Network

FAN Wei-wei; CHENGLin

(School of Transportation, Southeast University, Jiangsu Nanjing 210096 China)

Abstract: The shortest path problem in the stochastic traffic network is studied. First, the definition of stochastic traffic network is given and the stochastic network model is built. Assuming the link cost is the normally distributed random variable, a statistic method is proposed to get this random variable from historical data. Then the formulas to acquire the mean and variance of path cost is proposed. An algorithm of shortest path based on Dijkstra with single restriction (variance of link cost) is proposed. Finally, an example is given to show the algorithm.

Key words: traffic engineering; shortest path problem; restriction; stochastic traffic network; mean; variance

在确定性网络中, 最短路径问题 (Shortest Path Problem, SPP) 已经被深入地研究, 并被证明有广泛的用途, 如电力线网的架设和公路网的设计等。在这些网络中, 网络中所有弧的长度都是常数, 目标是寻找一条路, 使其经过的弧的费用之和最小。对此, 许多学者提出了大量的算法, 其中 Dijkstra^[1] 提出的一个时间复杂度为 $O(n^2)$ 的多项式算法被誉为经典算法, 成为其他一些算法的基础。

然而随着实践的发展, 越来越多的应用领域提出了弧权是随机变量的最短路径问题, 比如智能运输系统 (ITS) 中的路径诱导系统 (RGS) 涉及到的出行路径选择问题。在现实世界中, 交通网络各个路段的旅行时间不是固定不变的。由于交通流量的差异和交通拥挤效应, 在同一时段, 观测相同路段的旅行时间可

能是不同的值, 这就是旅行时间的随机性。这一特性给最短路径研究带来了困难, 但又因为出行者的出行路径选择将直接影响交通网络上交通流的分配, 这就使得很多学者不得不对这一领域进行研究。因此, 虽然随机网络的最短路径问题比较复杂, 但是由于它的用途广泛, 仍然有越来越多的科学家致力于对这个问题的研究。

Frank^[2] 和 Mirchandani^[3] 将交通网络上的路段运行时间看作一个随机变量, 考虑了最短路径的概率分布问题。董振宁^[4] 等对随机网络的最短路径问题进行了研究, 并给出了一个启发式算法。柳亚玲^[5] 等研究了随机时间依赖网络, 并基于标号修正算法, 提出了求所有节点到单一终点的最短路径的算法, 以及该路径实现的概率。

收稿日期: 2006-05-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50578037)

作者简介: 范巍巍 (1983 -), 男, 江苏海门人, 博士研究生, 研究方向为交通规划与管理. (fww1983@126.com)

本文研究了随机路网的最短路径问题,假定路段上的旅行时间是满足正态分布的随机变量,并将旅行时间的方差看作一个限制条件,给出了一个基于 Dijkstra 算法的、带单一限制条件的算法。

1 随机路网模型

对于本文所研究的道路交通网络,我们用包含有限个节点和路段的有向图来表示,网络中每一路段都有一个费用,它可以是出行时间、直接费用和出行距离的组合。在本文中,我们使用旅行时间 (Travel Time) 来表示路段费用。

在所研究的道路交通网络中,我们定义一个变量 T_i 表示节点 i 的到达时间,在这里假设节点没有等待时间,则 T_i 也等于节点 i 的离开时间,即等于进入路段 (i, j) 的进入时间。再定义随机变量 t_{ij} 表示路段 (i, j) 上的旅行时间,如图 1 所示。则节点 j 的到达时间 T_j 可以由下式求得:

$$T_j = T_i + t_{ij} \quad (1)$$

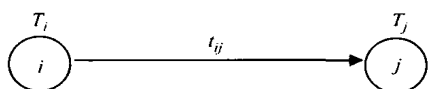


图1 一个路段

Fig.1 A simple link

在实际的道路交通网络中,我们可以通过设在路段上或交叉口处的探测器、来往于路段上的试验车辆甚至是交通模型等多种数据源,来获得路段旅行时间的历史数据。由于交通需求内在的波动、路段上道路交通条件的影响及数据源测量的误差,即使在相似2天的相同时段,得到的路段旅行时间也可能是不相同的。这些测得的历史数据表现在图上,则是一系列离散的数据点,如图2所示。为了能将这离散的数据应用于求解最短路径的算法中,必须首先用函数将其拟合出来。

在这里,假设路段旅行时间是服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量,则接下来所要解决的问题是如何通过测得的历史数据,求出参数 μ 和 σ^2 。我们把实际的路段旅行时间 X 称作母体,则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中参数 μ 和 σ^2 未知,称测得的一系列历史数据 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为来自母体 X 的一个样本,接下来运用数理统计^[6]的极大似然估计法和无偏估计的知识,求得参数 μ 和 σ^2 的无偏估计值分别为 $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

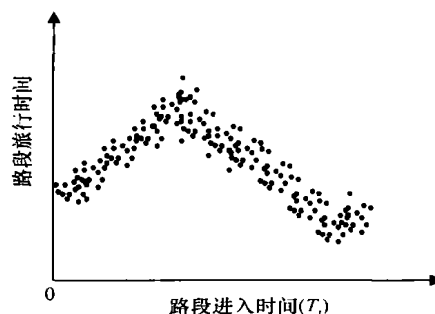


图2 路段旅行时间数据图

Fig.2 Link travel time data

综上,我们给出本文所讨论的随机路网的定义。本文中所讨论的随机路网,是指路网中每一路段的实际费用是一个随机变量,我们不知道它的准确值,只知道它的期望值和方差,分别用参数 μ 和 σ^2 来表示。在进入每一路段之前,我们并不知道该路段的实际费用,只有通过该路段,才知道其实际费用。换句话说,在出行路径没有被选定之前,所有弧的实际费用都不知道。

2 算法的提出

根据上面提出的随机路网模型,进一步假设每个路段之间的旅行时间是相互独立的。则由公式(1)可得:

$$E[T_j] = E[T_i] + E[t_{ij}], \quad (2)$$

$$\text{Var}[T_j] = \text{Var}[T_i] + \text{Var}[t_{ij}]. \quad (3)$$

公式(2)求的是节点 j 的到达时间的期望值,而公式(3)求的是节点 j 的到达时间的方差。通过这两个递推公式就可以求出任意一条路径的旅行时间的期望值和方差。在这里,将旅行时间的方差看作是一个限制条件,这样问题就转化为传统确定性网络中带单一限制条件的最短路径问题。

所谓带单一限制条件的最短路径问题^[7],有如下定义:设在确定性网络中,每条弧上都有两个权值 w_1 和 w_2 ,设路径 p 是从起点 1 到终点 N 的一条路径,若对于该路径上所有弧上的权 w_2 ,满足 $\sum w_2 \leq l$,其中 l 为一给定的正常数,则称路径 p 为满足对权 w_2 限制的路径,设所有满足对权 w_2 限制的路径组成路径集合 P ,集合 P 中 $\sum w_1$ 的值最小的路径称为从起点 1 到终点 N 满足对权 w_2 限制的最短路径。

通过上述分析,本文的目标就是在随机路网中选择一条路径,在其路径旅行时间的方差满足限制条件 l 的情况下,使得其路径旅行时间的期望值最小。

下面在 Dijkstra 算法的基础上,给出带单一限制条

件的最短路径算法。

准备工作:定义一个邻接链表 $G[n]$ 来存储随机路网的拓扑数据;定义一个一维数组 $Dist[n]$ 来存储各节点到起点的最小旅行时间;定义一个一维数组 $Limit[n]$, 用来存储各节点到起点的旅行时间的方差之和;定义一个一维数组 $Path[n]$ 来存储已求得最短路径的节点的前驱点, 以便最终求得最短路径;定义一个双向链表 L , 用来存储正在参与比较的节点, 使用双向链表的目的是在删除节点时降低时间复杂度。

算法步骤:

(1) 给出路径旅行时间方差的限制条件 l 的值, 将与起点直接相连的节点 i 的 $Dist[i]$ 初始化为其旅行时间的期望值, 其余的置为 ∞ ; $Limit[i]$ 初始化为其旅行时间的方差; $Path[i]$ 的前驱置为起点。

(2) 将与起点直接相连, 且满足 $Limit[i] \leq l$ 的节点 i 加入到双向链表 L 中。

(3) 在双向链表 L 中找到 $Dist[i]$ 最小的节点 m , 若 m 即为所求的终点, 则结束。

(4) 在与 m 直接相连的各节点 j 中, 若 $Limit[m] + \sigma_{mj}^2 \leq l$, 且 $Dist[j] = \infty$, 则将其加入到双向链表 L 中, 且令 $Dist[j] = Dist[m] + \mu_{mj}$, $Limit[j] = Limit[m] + \sigma_{mj}^2$, $Path[j] = m$, 然后在 L 中删除节点 m , 如果剩余节点数为 0, 则结束。

(5) 修改最短路径: 在与 m 直接相连的各节点 j 中, 若 $Dist[j] \neq \infty$, 且 $Dist[m] + \mu_{mj} < Dist[j]$, 并且 $Limit[m] + \sigma_{mj}^2 \leq l$, 则令 $Dist[j] = Dist[m] + \mu_{mj}$, $Limit[j] = Limit[m] + \sigma_{mj}^2$, 且 $Path[j] = m$, 转步骤(3)。

此带单一限制条件的最短路径算法的空间复杂度和时间复杂度均为 $O(n^2)$, 消除了大量的冗余存储和冗余计算, 非常实用。

3 算例

假设有一简单的随机路网, 如图 3 所示, 路段上的数值分别表示该路段旅行时间的期望值和方差。下面运用本文提出的算法, 求从起点 1 到终点 6 满足对旅行时间的方差的限制 $l=3$ 的最短路径。

运用本文提出的算法, 求解步骤具体如下:

(1) 与起点 1 直接相连的节点有 2, 4, 则令 $Dist[2] = 3$, $Limit[2] = 1$, $Path[2] = 1$; $Dist[4] = 2$, $Limit[4] = 0.5$, $Path[4] = 1$, 其余 $Dist[i] = \infty (i=3, 5, 6)$ 。

(2) 因为 $Limit[2] = 1 < 3$, $Limit[4] = 0.5 < 3$, 所以将节点 2, 4 加入链表 L 中, 则 $L = \{2, 4\}$ 。

(3) 链表 L 中 $Dist[4] = 2$ 最小, 令节点 4 为 m 。

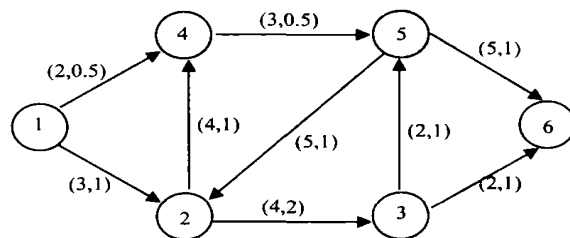


图3 算例的随机路网

Fig. 3 An example of a simple stochastic network

(4) 与节点 4 直接相连的是节点 5, 则 $Limit[5] = 0.5 + 0.5 = 1 < 3$, 且 $Dist[5] = \infty$, 则将节点 5 加入链表 L 中, 且 $Dist[5] = 2 + 3 = 5$, $Path[5] = 4$; 在链表 L 中将节点 4 删除, 则 $L = \{2, 5\}$ 。

(5) 链表 L 中 $Dist[2] = 3$ 最小, 令节点 2 为 m 。

(6) 与节点 2 直接相连的是节点 3, 4, 则 $Limit[3] = 1 + 2 = 3 \leq 3$, 且 $Dist[3] = \infty$, 则将节点 3 加入链表 L 中, 且 $Dist[3] = 3 + 4 = 7$, $Path[3] = 2$; 虽然 $Dist[4] = 2 \neq \infty$, 但 $Dist[2] + \mu_{24} = 3 + 4 = 7 > Dist[4]$, 所以不用修改最短路径; 在链表 L 中将节点 2 删除, 则 $L = \{3, 5\}$ 。

(7) 链表 L 中 $Dist[5] = 5$ 最小, 令节点 5 为 m 。

(8) 与节点 5 直接相连的是节点 2, 6, 则 $Limit[6] = 1 + 1 = 2 < 3$, 且 $Dist[6] = \infty$, 则将节点 6 加入链表 L 中, 且 $Dist[6] = 5 + 5 = 10$, $Path[6] = 5$; 虽然 $Dist[2] = 3 \neq \infty$, 但 $Dist[5] + \mu_{52} = 5 + 5 = 10 > Dist[2]$, 所以不用修改最短路径; 在链表 L 中将节点 5 删除, 则 $L = \{3, 6\}$ 。

(9) 链表 L 中 $Dist[3] = 7$ 最小, 令节点 3 为 m 。

(10) 与节点 3 直接相连的是节点 5, 6, 虽然 $Dist[5] = 5 \neq \infty$, 但 $Dist[3] + \mu_{35} = 7 + 2 = 9 > Dist[5]$, 所以不用修改最短路径; 虽然 $Dist[6] = 10 \neq \infty$, 且 $Dist[3] + \mu_{36} = 7 + 2 = 9 < Dist[6]$, 但 $Limit[3] + \sigma_{36}^2 = 3 + 1 = 4 > 3$, 所以也不用修改最短路径; 在链表 L 中将节点 3 删除, 则 $L = \{6\}$ 。

(11) 链表 L 中 $Dist[6] = 10$ 最小, 且节点 6 就是所求终点, 结束。

(12) 反向追踪的最短路径为 (1, 4, 5, 6), 最小旅行时间的期望值为 10, 方差为 2。

从图 3 中可以看出, 若不考虑路段旅行时间的随机性, 则路径 (1, 2, 3, 6) 就是传统意义上的最短路径, 具有最小的旅行时间 9; 但若考虑随机性, 路径 (1, 2, 3, 6) 的方差为 4, 大于限制条件 3, 所以不是所要求的最短路径, 而路径 (1, 4, 5, 6) 才是所要求的最短路径。

图 4 为南京市的道路网络图, 共有节点 1 625 个,



图4 南京市道路网

Fig.4 The road network of Nanjing

路段 2 782 条。假设路段的旅行时间与路段的长度成正比,得到各路段的旅行时间,各路段旅行时间的方差则假设一数值。用 Visual C++ 编制本文提出的算法程序,求解节点 1 到节点 1 625 满足对旅行时间的方差的限制 $l = 50$ 的最短路径,得到满足上述条件的最短路径为 (1, 2, 4, 6, 8, 20, 1603, 19, 22, 25, 53, 59, 60, 152, 155, 151, 150, 145, 144, 187, 191, 194, 1 088, 1 086, 1 087, 1 089, 1 625), 路径的旅行时间为 434, 路径旅行时间的方差为 44。而最小旅行时间为 410, 但此路径旅行时间的方差为 53, 不满足限制条件。

4 结论

通过实例的分析可以看出,本文所提出的带单一限制条件的算法能够有效的解决随机路网的最短路径问题,该算法是以 Dijkstra 算法为基础的,因此具有 Dijkstra 算法的计算简便,容易掌握的特点,同时又便于编制程序,提高解决问题的效率。

(上接第 111 页)

算法为 0.35 s。该算法对合理动态分配交通流,解决交通拥塞问题具有重要意义。

参考文献:

- [1] 李威武,王慧,钱积新.智能交通系统中路径诱导算法研究进展[J].浙江大学学报(工学版),2005,39(6):820-825.
- [2] 倪安宁,隗志才,高林杰.交通网络最短路径并行算法研究综述[J].公路交通科技,2006,23(12):128-132.
- [3] BONSALL P W, PARRY G. Driver's requirements for route guidance [C] // Proc. Third Int. Conf. on Road Traffic Control. IEEE, 2005: 1-5.
- [4] SAITO T, SHIMA J, KANEMITSU H, et al. Automobile navigation

另外,本文将旅行时间的方差看作一个限制条件,这样处理的好处是符合人们的出行习惯,因为人们出行一般都会选择可靠性高的路径,而路径旅行时间的方差可以反映该路径的可靠性。如果某一路径旅行时间的期望值较小,但其方差较大,则说明选择此路径以该旅行时间的期望值到达目的地的可能性较小,即此路径的可靠性不大。

参考文献:

- [1] DIJKSTRA E W. A note on two problems in connection with graphs [J]. Numerical Mathematics, 1959, 1: 269-271.
- [2] H FRANK. Shortest paths in probabilistic graphs [J]. Operations Research, 1969, 17: 583-599.
- [3] MIRCHANDANI P B. Shortest distance and reliability of probabilistic networks [J]. Computer and Operations Research, 1976, 3: 347-676.
- [4] 董振宁,张召生.随机网络的最短路径问题[J].山东大学学报(理学版),2003,38(3):6-9.
- [5] 柳亚玲,邹伟松.随机时间依赖网络的最短路径[C]//全国软件技术研讨会.2001:271-273.
- [6] 曹振华,赵平,胡跃清.概率论与数理统计[M].南京:东南大学出版社,2001.
- [7] 冯德民,谢娟英.带单一限制条件的单源双权最短路径算法及其实现[J].西南师范大学学报(自然科学版),2000,25(3):242-246.
- [8] 戴树贵,等.带限制条件的多权最短路径近似算法[J].计算机工程,2003,29(7):88-91.
- [9] 余冬梅,等.Dijkstra 算法的优化[J].计算机工程,2004,30(22):145-146.
- [10] 夏春林,等.道路网络中最短路径的算法与实现[J].辽宁工程科技大学学报,2003,22(2):180-181.
- [11] 潘福全,等.基于道路网络数据库的最短路径搜寻[J].公路交通科技,2005,22(3):105-107.
- [12] 刘名龙,黄德镛,徐天泽.城市道路网最短路径启发算法研究[J].公路交通科技,2006,23(8):136-138.

system using beacon information [C] // Proc. 1st International Conf. on Vehicle Navigation & Information Systems (VNIS). Toronto, Canada: 2004: 139-144.

- [5] 潘福全,王丰元,邹旭东,等.基于道路网络数据库的最短路径搜寻[J].公路交通科技,2005,22(3):105-107.
- [6] LEE C K. A multiple path routing strategy for vehicle route guidance systems [J]. Transportation Research, 1994, 2C(3): 185-195.
- [7] FU L, RILETT L R. Expected shortest path in dynamic and stochastic traffic networks [J]. Transportation Research Part B, 1998, 32(7): 449-511.
- [8] PARK D. Multiple Path based vehicle routing in dynamic and stochastic transportation networks [M]. Texas A&M University, 1998.
- [9] SHIER R D. On algorithms for finding the K shortest paths in a network [J]. Networks, 1979, 9(9): 195-214.