

高速铁路接触网模态简化计算的多体方法

弓永哲, 杨蔡进, 赵煜, 刘开忠

(西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 四川 成都 610031)

摘要: 针对绝对节点坐标描述的接触网结构振动模态计算复杂的问题, 文章基于先进的多柔性动力学理论, 采用等效弹簧模型简化约束条件, 将接触网复杂约束动力学转化为经典结构振动问题, 并得到简化后系统的质量矩阵和刚度矩阵, 再运用MATLAB特征值计算函数Eig, 计算出柔性接触网结构振动模态, 实现了一种结构模态快速计算方法。该方法首先应用于经典的简支梁振动问题, 计算结果与对应理论解的比较表明, 该方法可精确计算简支梁的模态频率和振型。此外, 还进一步分析了等效弹簧刚度系数对计算结果的影响。最后, 该方法应用于两种接触网的模态分析均能准确计算出结果的特征模态频率, 为后续精确分析弓网动力学提供理论支撑。

关键词: 高速铁路; 接触网; 有限元方法; 绝对节点坐标; 动力学模型; 模态分析

中图分类号: U225.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-128X(2022)04-0146-05

Simplified multibody method for computing the modal characteristics of high-speed railway catenary

GONG Yongzhe, YANG Caijin, ZHAO Yu, LIU Kaizhong

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract: To simplify the computing process for the structural vibration modal properties of railway catenary based on absolute nodal coordinates, this paper proposed a fast computational method based on the advanced flexible multibody dynamics. By establishing an equivalent spring model to simplify the constraint conditions, the complicated constrained dynamics of catenary was transformed to the classical structural vibration solution, and the quality matrix and rigidity matrix were generated for the simplified system. The structural vibration modal of the flexible catenary was computed by using the MATLAB characteristic value computation function Eig. The proposed method was first applied to vibration of the classical simply supported beam. According to comparison between the computed results and corresponding theoretical solutions, the proposed method could accurately compute modal frequencies and vibration shapes of the simply supported beam. Moreover, the effect of the equivalent spring stiffness coefficient on the calculation results was analyzed. The results show the characteristic modal frequency can be computed accurately in the modal analysis of two kinds of catenaries. The proposal method provides a theoretical basis for further study on pantograph-catenary interaction dynamics.

Keywords: high-speed railway; catenary; finite element method; absolute nodal coordinate; dynamic model; modal analysis

收稿日期: 2022-03-07; 修回日期: 2022-07-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(12072293)

通信作者: 杨蔡进 (1978—), 男, 博士, 副研究员, 硕士生导师, 主要从事载运系统动力学方面的研究;

E-mail: ycj78_2012@163.com

0 引言

现代高速列车由安装在车顶上的受电弓从轨旁接触网攫取电能, 然后输送给牵引系统产生行驶动力。随着列车运行速度的不断提高, 弓网之间耦合振动显著增强, 直接影响弓网受流质量, 严重危害列车运行安全。围绕弓网耦合动力学问题, 国内外学者们从不同方面开展了研究, 提出各种模型和方法^[1-5]。在现有研究中, 柔性接触网结构的模态分析是一项重要研究内容, 也是弓网动力学研究的理论基础。

高速铁路接触网是由多根柔性索和刚性组件构成的复杂结构。文献[6]采用经典有限单元方法分析了8跨 RE250 接触网模态。研究表明: 接触网结构的固有频率低且密频; 结构变形和受电弓的刚体位移通过接触弹性相耦合, 形成复杂刚柔耦合动力学问题。因此, 采用传统有限单元法获得高精度系统响应存在一定的困难。基于绝对节点坐标有限单元法的索理论^[7]可以精确方便地描述接触网大变形^[8]、弓网耦合振动^[9]以及复杂的边界条件, 逐渐成为研究高速列车动力学的全新有效方法。从力学建模角度而言, 由绝对节点坐标索理论描述的高速铁路接触网是一个复杂约束多体系统, 其动力学方程为含有代数约束方程的微分方程组。虽然文献[10-11]可以用于约束多体模态计算分析, 但算法往往过于复杂或者难以得到满意结果。

本文在多体动力学框架下, 提出一种简化的接触网模态分析方法。首先, 建立约束的等效力学模型, 将含有约束条件的模态分析问题转化为常规结构模态问题; 其次, 采用经典模态计算方法直接分析等效结构的模态特征值; 最后, 将上述方法应用到两个算例中, 通过与理论解或其他方法获得数值解比较, 论证了本文方法的有效性。

1 接触网绝对节点坐标模型

绝对节点坐标有限单元法能精确描述刚柔耦合系统的大范围运动、转动和大变形, 以及复杂边界条件, 广泛应用于航空航天、车辆和机械工程等领域研究中。高速铁路接触网是由接触线、承力索、吊弦、紧固件和支撑等组成。在绝对节点坐标有限单元方法体系中, 接触线、承力索和吊弦等柔性组件被离散成多段索单元, 并通过约束和载荷实现各单元间及单元与结构支撑等动力关联, 如图1所示。通常索单元具有两个节点, 且每个节点有6个自由度, 包括节点的绝对位置矢量和单元轴线在节点处的梯度矢量。利用上述节点坐标, 基于非线性有限元插值技术, 可建立索单元的二阶可导连续位移场和变形条件下的精确曲率模型; 根据连续介质力学理论得到单元的动能和势能计算表达

式, 同时利用带约束乘子的第一类拉格朗日方程建立索单元的动力学模型如下:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{Q}_e - \boldsymbol{\Phi}_{eq}^T \boldsymbol{\lambda}_e \\ \boldsymbol{\Phi}_e(\mathbf{q}_e) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{q}_e$ 为索单元节点广义坐标列阵; $\mathbf{M}_e$ 和 $\mathbf{K}_e$ 分别为索单元的质量矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{Q}_e$ 为作用在单元上外力的广义力阵; $\boldsymbol{\Phi}_e$ 为单元相关的约束方程; $\boldsymbol{\lambda}_e$ 为未知的拉格朗日乘子。

在经典索单元理论中, $\mathbf{M}_e$ 为常数矩阵, 且表示为

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_0^L \mathbf{S}^T \mathbf{S} dl \quad (2)$$

式中: ρ 为索单元的密度; A 为索单元截面面积; L 为单元长度; $\mathbf{S}$ 为单元形函数矩阵, 且可定义如式(3)。

$$\mathbf{S} = [N_1 \mathbf{I}, N_3 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, N_4 \mathbf{I}] \quad (3)$$

式中: $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; N_1, N_2, N_3, N_4 为关于弧长 l 的立方非线性函数。

类似地, 索单元的刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 可表示为

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L EA \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}_e} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{q}_e} dl + \int_0^L EJ \left(\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \mathbf{q}_e} \right)^T \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial \mathbf{q}_e} dl \quad (4)$$

式中: E 为索单元的弹性模量, J 为索单元截面惯性矩。

根据有限元插值理论, 单元轴向应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和弯曲曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ 分别表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = |\mathbf{r}'| - 1, \boldsymbol{\kappa} = |\mathbf{r}''| \quad (5)$$

式中: $\mathbf{r}$ 为单元轴线上任意点的位置矢量, $\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{q}_e$; $\mathbf{r}'$ 和 $\mathbf{r}''$ 分别为位置矢量 $\mathbf{r}$ 关于弧长坐标的一次和二次偏导数。

一般情况下, 由式(4)定义的单元刚度矩阵不是常数矩阵, 而与单元构型相关, 单元构型可以用单元节点坐标列阵 $\mathbf{q}_e$ 来表征。根据索单元理论, 利用 $\mathbf{q}_e$ 可确定索单元任意点轴向力 $N(l)$:

$$N(l) = EA \boldsymbol{\varepsilon} = EA \left(\sqrt{\mathbf{q}_e^T \mathbf{S}'^T \mathbf{S}' \mathbf{q}_e} - 1 \right) \quad (6)$$

式中: $\mathbf{S}'$ 为单元形函数矩阵 $\mathbf{S}$ 对弧长 l 的一阶偏导。

式(6)说明了当结构处于静平衡时, 接触线和承力索的张力等于设计值, 并以节点坐标 $\mathbf{q}_e$ 的初值条件形式被考虑在分析模型中。

接触网结构模型可由上述离散索单元通过有限单元技术组装获得。考虑如图1所示的单元间及单元与结构支撑的约束关系, 遵循有限元节点编号原则对各单元进行封装, 得到接触网的动力学模型如下:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}_q - \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为结构质量矩阵, $\mathbf{K}$ 为结构刚度矩阵; 其他符号和变量定义同上。

与经典理论方法相比, 绝对节点坐标有限单元法采用了更多节点坐标来描述结构单元的运动和变形, 并采用代数/微分方程定义单元间复杂连接条件和边界

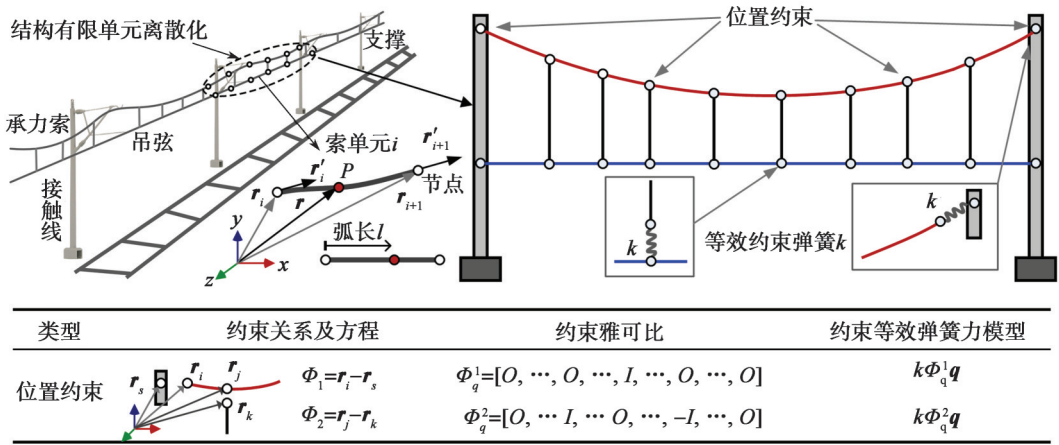


图1 铁路接触网中连接作用等效模型示意图
Fig. 1 Schematic diagram of equivalent model of structural connections in railway catenary

问题，因此可以得到接触网精细动力学模型。

2 结构模态计算与简化过程

在经典模态理论中，接触网结构的固有振动特性可通过求解方程(1)退化无阻尼自由振动系统的特征值分析获得。式(7)右端项的广义力 Q_q 一般与广义坐标 q 无关，在模态分析中可设其为零，而式(7)右端第二项与约束相关且含有未知变量 λ 。通常，约束方程 Φ 是关于广义坐标 q 的非线性函数，因此该项对结构刚度矩阵有贡献，不能简单处理为零。由于式(7)是典型指标为3的非线性微分代数系统，难以采用经典方法直接进行模态分析，一般可通过缩并法将式(7)转化为二阶常微分系统，再进行特征值问题求解，但上述过程需要编写复杂的缩并程序代码；另外也可通过增广法分析，与缩并法相反，该方法将未知变量 λ 和节点坐标 q 统一处理成广义振动坐标，并对增广系统进行特征值计算。采用该方法得到增广系统的模态信息后，需对求解结果进一步处理，以剔除结构振动模态中关于变量 λ 的成分，但该方法的分析过程难以理解和实施。此外，文献[13-14]也提出一些方法求解特征值，这些方法的本质都是对结构方程进行复杂处理后，再进行模态分析，一般不易掌握。

本文针对上述问题提出了一种简化计算方法，该方法在保证绝对节点坐标有限单元法的优势前提下，通过对约束关系等效，实现结构方程的简化并直接进行模态分析。具体简化过程如下：在绝对节点坐标有限单元法体系中，式(7)右端第二项 $\Phi_q^T \lambda$ 表示由约束提供的等效作用力。通过等效约束力作用，不同构件之间相关运动被消除，实现结构上的机械连接。换言之，等效的约束作用力也可以用弹簧力来表征。在构件相对运动方向设置弹簧，当构件间出现相对运动时，弹簧将提供约束反力作用，从而限制构件间进一步相对运动，达到平衡状态。基于上述等效思路，可将接触

网中约束关系用线性弹性力来描述，如图1所示。引入约束相关刚度矩阵 K_c ，该矩阵与结构广义坐标 q 的乘积近似接触网结构中的约束作用力，则式(7)可简化如下：

$$M\ddot{q} + Kq = Q_q - K_c q \tag{8}$$

考虑式(8)的退化自由振动系统，则结构振动模态特征值方程表示如下：

$$(K + K_c - \omega^2 M)A = 0 \tag{9}$$

式中： ω 为结构的特征模态频率； A 为模态振型。

式(9)中特征值问题可用MATLAB特征值计算函数Eig直接进行求解，约束刚度矩阵 K_c 可采用如下方法确定：矩阵 K_c 中大多数元素均为零，少量非零元素取决于约束方程的雅可比矩阵 Φ_q 。假设 Ψ 与 Φ_q 同为维度的矩阵，矩阵 Ψ 中非零元素可参照如下规则进行赋值：如果 Φ_q 中某非零元素大于零，则 Ψ 中相对应位置的元素可赋值为 k ，反之，该位置上元素赋值为 $-k$ 。这里 k 为描述约束关系的等效弹簧刚度系数。假设 O 表示零矩阵，则附加约束刚度矩阵 K_c 可表示如下：

$$K_c = [\Psi^T, O]^T \tag{10}$$

3 算例分析

3.1 验证算例——简支梁

本节以一段长10 m，线密度为1.35 kg/m，抗弯刚度为195 Nm²的简支梁模型为例，采用20个绝对节点坐标索单元^[12]建立简支梁的动力学模型。假设等效边界条件的弹簧刚度为1 000 MN/m，基于本文方法可计算得到简支梁的120多阶模态，其中前5阶弯曲模态频率与对应的理论解如表1所示，相对应的模态振型结果如图2所示。图2中符号“□”为本文方法的计算结果，蓝色实曲线为理论解。由表1和图2可知该方法可精确计算简支梁的前五阶频率和振型。

为进一步分析弹簧刚度选取对模态计算结果的影响，本文计算了不同刚度下简支梁的前三阶模态频率变化情况，如图3所示。以一阶模态为例，弹簧刚度选

表1 两种方法计算得到简支梁前五阶弯曲模态频率比较

Table 1 Comparison of the first five orders of bending modal frequencies of simply supported beam computed by two methods
rad/s

模态阶数	理论解	本文方法
1	1.186 2	1.186 2
2	4.744 7	4.744 7
3	10.675 6	10.676 0
4	18.978 9	18.980 9
5	29.654 5	29.662 2

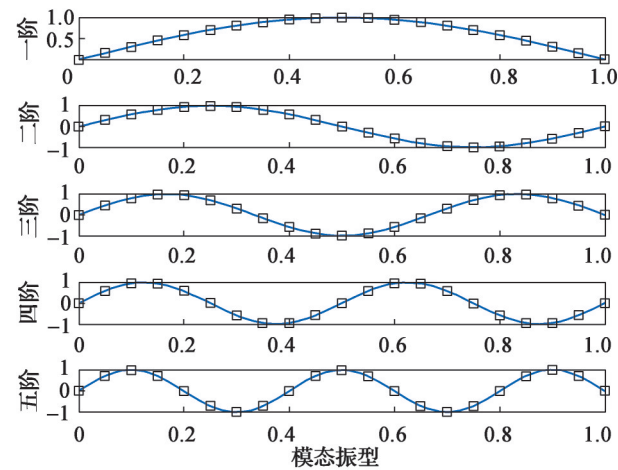


图2 两种方法得到简支梁前五阶模态振型结果比较

Fig. 2 Comparison of the first five orders of modal shapes of simply supported beam computed by the two methods

取存在临界值, 约为 10^2 N/m (图中A点)。当弹簧刚度取值高于该临界值, 采用本文方法均能准确地计算得到简支梁结构一阶模态频率; 当刚度系数低于该临界值时, 计算结果与理论解不再吻合。特别地, 当弹簧刚度为 1 N/m 时, 一阶模态计算结果约为 0.5 rad/s (图中D点), 低于理论解 $1.186 2 \text{ rad/s}$ 。上述结果差异性是由简支梁边界属性改变造成的, 即由刚性连接变为弹性连接。此时, 简支梁结构呈现出机械振动特性, 不

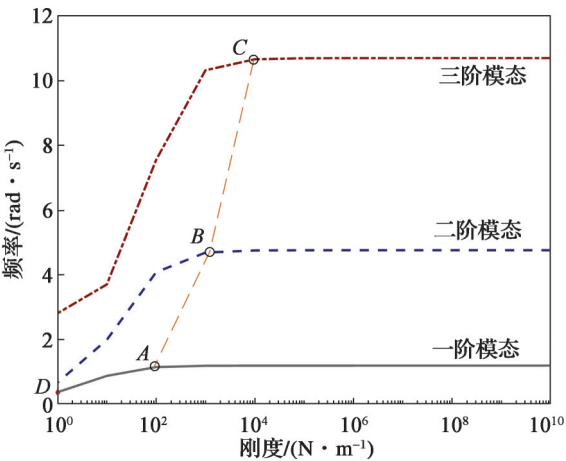


图3 刚度选取对前三阶弯曲模态频率计算的影响

Fig. 3 Effect of spring stiffness on the first three orders of bending modal frequencies computed

再是弯曲振动特性。类似地, 对于第二、第三阶模态, 弹簧刚度选取也存在相应的临界值, 分别对应图3中B点和C点。表2为采用不同刚度系数对简支梁第12阶模态频率计算结果的影响。由表2可知, 对应第12阶模态的弹簧刚度临界值约为 10^6 N/m 。由图3和表2可知, 随着模态阶数增加, 弹簧刚度临界值将变大。

表2 不同弹簧刚度系数对简支梁第12阶模态频率计算结果影响

Table 2 Effect of spring stiffness coefficient on 12-order modal frequency of simply supported beam computed

弹簧刚度/($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)	理论解/ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	本文方法/ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	相对误差/ %
1.0×10^{10}	170.809 8	172.166 2	7.941
1.0×10^9	170.809 8	172.166 1	7.941
1.0×10^8	170.809 8	172.165 3	7.936
1.0×10^7	170.809 8	172.156 6	7.885
1.0×10^6	170.809 8	172.069 6	7.376
1.0×10^5	170.809 8	143.646 2	159.028

3.2 应用算例——接触网

本节将研究两种接触网结构: 简单链型悬挂接触网^[15]和弹性链型悬挂接触网^[16]。简单链型悬挂接触网每跨长度为 65 m , 由7根吊弦组成, 其中接触线和承力索的预张力均为 15 kN , 接触线和承力索的线密度分别为 0.925 kg/m 和 0.615 kg/m 。首先基于绝对节点坐标的有限单元法建立该结构的动力学方程, 得到接触网结构的质量矩阵和刚度矩阵; 进一步采用弹簧力等效接触网结构中所有连接作用关系, 简化为结构等效近似刚度矩阵; 最后, 采用MATLAB特征值分析函数, 得到接触网结构的模态信息, 采用本文方法计算简支梁的前五阶结构频率与文献[15]结果比较如表3所示。文献[16]利用ANSYS分析了莫喀高铁弹性链型悬挂接触网的振动模态, 其结构参数在文献[16]中已给出, 不再赘述; 同样采用本文方法得到前五阶频率如表3所示。由表3可知该方法可准确计算工程上常见接触网结构频率, 并与文献中结果比较, 最大相对误差不超过2%。在上述分析过程中, 等效弹簧刚度取为 10^5 MN/m , 由于弹簧刚度选取对高频模态的计算正确性有一定影响, 采用预

表3 两种接触网不同计算方法得到的前五阶结构频率比较

Table 3 Comparison of the first five orders of structural frequencies computed by different methods in two considered catenaries Hz

类型	方法	1阶 频率	2阶 频率	3阶 频率	4阶 频率	5阶 频率
简单悬挂	文献[15]	1.480	1.490	2.120	2.520	2.560
接触网	本文	1.470	1.500	2.140	2.530	2.610
弹性悬挂	文献[16]	1.096	1.107	1.126	1.152	1.185
接触网	本文	1.101	1.109	1.128	1.156	1.187

分析方法可选择合适的等效弹簧刚度,以保证结构频率段内的计算结果具有足够精度。

4 结语

本文通过弹簧力等效模型模拟接触网边界约束条件,极大地简化多体动力学框架下接触网模态分析计算过程。研究表明该方法能够精确计算得到接触网的模态特征。但由于弹簧刚度系数对模态计算精度有较大影响,实际过程中可取较大值,以保证结果的精确性。采用该方法计算得到的接触网模态,可结合模态缩减法直接应用到弓网系统的多体动力学模型中,提高仿真分析效率,具有一定的应用价值。

参考文献:

- [1] ZHANG Weihua, LIU Yi, MEI Guiming. Evaluation of the coupled dynamical response of a pantograph-catenary system: contact force and stresses[J]. Vehicle System Dynamics, 2006, 44(8): 645-658.
- [2] 张卫华. 高速列车耦合大系统动力学研究[J]. 中国工程科学, 2015, 17(4): 42-52.
ZHANG Weihua. Study on dynamics of coupled systems in high-speed trains[J]. Strategic Study of CAE, 2015, 17(4): 42-52.
- [3] 李瑞平, 周宁, 张卫华, 等. 高速列车过隧道对弓网动力学影响分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(6): 33-37.
LI Ruiping, ZHOU Ning, ZHANG Weihua, et al. Influence of high-speed trains passing through tunnel on pantograph-catenary dynamic behaviors[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(6): 33-37.
- [4] 吴孟臻, 刘洋, 许向红. 高速弓网系统动力学参数敏感度分析及优化[J]. 力学学报, 2021, 53(1): 75-83.
WU Mengzhen, LIU Yang, XU Xianghong. Sensitivity analysis and optimization on parameters of high speed pantograph-catenary system[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(1): 75-83.
- [5] 周宁, 张卫华. 双弓作用下弓网动力学性能[J]. 西南交通大学学报, 2009, 44(4): 552-557.
ZHOU Ning, ZHANG Weihua. Dynamic performances of pantograph-catenary system with double pantographs[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2009, 44(4): 552-557.
- [6] 单奇, 翟婉明. 接触导线弯曲时接触网模态分析与频率相关的有限单元法[J]. 西南交通大学学报, 1997(1): 112-117.
- [7] DAN Qi, ZHAI Wanming. Frequency depending finite element method for catenary modal analysis in consideration of bending of contact wires[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1997(1): 112-117.
- [8] SHABANA A A, YAKOUB R Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory [J]. Journal of Mechanical Design, 2001, 123(4): 606-613.
- [9] SEO J H, SUGIYAMA H, SHABANA A A. Three-dimensional large deformation analysis of the multibody pantograph/catenary systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 42(2): 199-215.
- [10] BENET J, CUARTERO N, CUARTERO F, et al. An advanced 3D-model for the study and simulation of the pantograph catenary system[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2013, 36: 138-156.
- [11] 王营, 张兴准. 约束多刚体系统固有频率的计算[J]. 振动工程学报, 1989(2): 65-69.
WANG Ying, ZHANG Xingzhun. The computation of the natural frequency of constrained multibody systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 1989(2): 65-69.
- [12] YANG Cheng, CAO Dazhi, ZHAO Zhihua, et al. A direct eigenanalysis of multibody system in equilibrium[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012, 2012: 638546.
- [13] YANG C J, ZHANG W H, ZHANG J, et al. Static form-finding analysis of a railway catenary using a dynamic equilibrium method based on flexible multibody system formulation with absolute nodal coordinates and controls[J]. Multibody System Dynamics, 2017, 39(3): 221-247.
- [14] SUN Dongyang, CHEN Guoping, SUN Rujie. Model reduction of a multibody system including a very flexible beam element[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2014, 28(8): 2963-2969.
- [15] KOBAYASHI N, WAGO T, SUGAWARA Y. Reduction of system matrices of planar beam in ANCF by component mode synthesis method[J]. Multibody System Dynamics, 2011, 26(3): 265-281.
- [16] 汪媛. 弓网系统动态仿真研究[D]. 南昌: 华东交通大学, 2014.
WANG Yuan. The simulation research of pantograph-catenary's dynamic characteristic[D]. Nanchang: East China Jiaotong University, 2014.
- [17] 孙智. 受电弓/接触网参数的动力学研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
SUN Zhi. The parameters dynamic study of pantograph/catenary[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2017.