中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 3 期: 457～482

SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

二维 Prandtl 方程单调剪切流在 Sobolev 空间中的整体稳定性

献给姜礼尚教授 90 华诞

刘宁[1], 张平[1,2*]

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;
2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: liuning16@mails.ucas.ac.cn, zp@amss.ac.cn

收稿日期: 2023-01-13; 接受日期: 2023-03-31; 网络出版日期: 2023-06-09; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1000800) 和国家自然科学基金 (批准号: 12288201 和 12031006) 资助项目

摘要 考虑初值是某个关于 y 变量单调且长时间衰减得充分快的剪切流附近的小扰动, 本文证明二维 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中的整体适定性. 本文证明的主要思路是将 Masmoudi 和 Wong (2015) 指出的非线性对消性质与 Paicu 和 Zhang (2021) 引入的能够证明解有更快长时间衰减估计的好函数结合起来. 本文中需要在剪切流满足的方程中添加一个外力项, 否则可以证明不存在长时间衰减足够快的单调剪切流.

关键词 Prandtl 方程 适定性 Sobolev 空间 能量方法

MSC (2020) 主题分类 35Q35, 76D10

1 引言

本文研究如下上半平面 $\mathbb{R}^2_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y): x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}_+\}$ 中带有一个可控外力项 $f_1(t,x,y)$ 的二维 Prandtl 系统:

$$\begin{cases}\partial_t u_1 - \partial_y^2 u_1 + u_1\partial_x u_1 + u_2\partial_y u_1 + \partial_x p = f_1,\\ \partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0,\\ u_1|_{y=0} = u_2|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u_1 = U,\\ u_1|_{t=0} = u_{1,0},\end{cases} \tag{1.1}$$

英文引用格式: Liu N, Zhang P. Global stability of monotone shear flows for the 2-D Prandtl system in Sobolev spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 457–482, doi: 10.1360/SSM-2023-0011

其中, (u_1, u_2) 表示边界层流体的速度, $(U, p)(t, x)$ 分别是切向速度的迹与边界上外流的压力. 假设外力项 f_1 有极限

$$F(t, x) = \lim_{y \to +\infty} f_1(t, x, y),$$

则 (U, p) 满足 Bernoulli 法则:

$$\partial_t U + U \partial_x U + \partial_x p = F. \tag{1.2}$$

1904 年, Prandtl[14] 为了解释理想流体与小黏度的黏性流体之间边界条件的区别, 形式上推导出了方程 (1.1). 注意到 (1.1) 中 u_1 的方程没有水平方向的扩散, 而非线性项 $u_2 \partial_y u_1$ (其与 $-y \partial_x u_1 \partial_y u_1$ 大致相当) 在能量估计中会损失一阶水平导数, 因此给定一般初值的 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中是否适定至今仍是公开问题.

Sammartino 和 Caflisch[15] 证明了解析初值条件下方程 (1.1) 的局部适定性 (也可参见文献 [9]). Gérard-Varet 和 Masmoudi[6] 证明了方程 (1.1) 对于某个 Gevrey 类中初值的局部适定性. Dietert 和 Gérard-Varet[4] 证明了对于 Gevrey 指标为 2 的初值, 方程 (1.1) 是局部适定的, 且文献 [5] 指出这是临界的 Gevrey 指标. 更多的相关细节可以参见文献 [4] 及其参考文献.

当要求初值关于 y 变量是单调的情形下, Oleinik[11] 首次引入了 Crocco 变换, 并且证明了不带外力项的方程 (1.1) 在 Sobolev 空间中是局部适定的. 如果压力额外满足一个 "顺利的" 条件, Xin 和 Zhang[17] 证明了这个方程存在整体弱解. 最近, Masmoudi 和 Wong[10] 利用了该方程非线性项中的一些精巧的对消性质, 通过能量积分方法证明了与文献 [11] 等同的结果. 几乎同时, 文献 [1] 也独立发现了类似的对消性质. 最近, Xu 和 Zhang[18] 研究了初值是某个单调剪切流的小扰动时, 方程 (1.1) 在 Sobolev 空间中的长时间适定性.

另一方面, Oleinik 和 Samokhin 在文献 [12, 第 500 页] 中提出了以下的公开问题 (见公开问题 4): "It has been shown in Chapter 4 that under certain assumptions the system of non-stationary two-dimensional boundary layer admits one and only one solution in the domain $D = \{0 < t < T, 0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ either for small enough T and any $X > 0$ or small enough X and any $T > 0$. What are the conditions ensuring the existence and uniqueness of solution of the non-stationary Prandtl system in the domain D with arbitrary X and T?"

文献 [19] 首次证明了小解析初值情形下方程 (1.1) 存在长时间的解, 该结果被 Ignatova 和 Vicol[7] 改进为几乎整体解的存在性. Paicu 和 Zhang[13] 第一次证明了关于 x 变量解析的小初值情况下, 方程 (1.1) 存在整体解并证明了此解关于时间的衰减估计. 对 Gevrey 类 2 中的小初值, 也可以证明类似的结果 (参见文献 [16]).

类似文献 [18], 本文将 (1.1) 的解看作是某个单调剪切流的扰动. 通过利用文献 [1,10] 中发现的对消性质, 能够得到一个封闭的能量估计. 可是, 这个能量估计不足以提供足够快的长时间衰减估计, 从而不能保证该问题的整体适定性. 为了推导出解更快的长时间衰减估计, 引入文献 [13] 中的关键量 G. 但是, G 的长时间衰减估计依赖于剪切流的衰减估计, 而如果没有外力项, 剪切流那样的衰减性质是不可能的 (参见注 A.1). 这也是在 Prandtl 方程 (1.1) 中添加一个可控外力项的原因.

为简单起见, 本文研究 (1.1) 中的 U 和 f_1 都不依赖 x 变量这一情形, 从而由 (1.2) 推导出

$$\partial_x p(t) = F(t) - U'(t).$$

令 $u^s(t, y)$ 满足方程

$$\begin{cases}\partial_t u^s - \partial_y^2 u^s = U'(t) + f(t,y),\\ u^s|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u^s = U(t),\\ u^s|_{t=0} = u_0^s, \quad u_0^s(0) = 0,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $f \stackrel{\text{def}}{=} f_1 - F$ 满足 $\lim_{y\to+\infty} f(t,y) = 0$.

考虑方程 (1.1) 的解是剪切流 $(u^s, 0)$ 的扰动, 并记 $(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u^s + u, v)$. 从而, 由 (1.1) 和 (1.3) 推导出

$$\begin{cases}\partial_t u - \partial_y^2 u + (u^s + u)\partial_x u + v\partial_y(u^s + u) = 0,\\ \partial_x u + \partial_y v = 0,\\ u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u = 0,\\ u|_{t=0} = u_0,\end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $u_0 \stackrel{\text{def}}{=} u_{1,0} - u_0^s$.

同时, 由于 $\partial_x u + \partial_y v = 0$, 所以存在势函数 φ 满足 $u = \partial_y\varphi$ 且 $v = -\partial_x\varphi$. 事实上, 观察到 $\varphi(t,x,y) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_y^\infty u(t,x,y')dy'$, 通过在区间 $[y,\infty)$ 上对 (1.4) 积分, 可得到

$$\begin{cases}\partial_t\varphi - \partial_y^2\varphi + (u^s + u)\partial_x\varphi + 2\displaystyle\int_y^\infty \partial_y(u^s + u)\partial_x\varphi dz = 0,\\ \varphi|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} \varphi = 0,\\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\displaystyle\int_y^\infty u_0 dy'.\end{cases} \tag{1.5}$$

为了推导出 (1.4) 解的长时间衰减估计, 需要如下 Paicu 和 Zhang [13] 引入的关键量:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} u + \frac{y}{2\langle t\rangle}\varphi, \tag{1.6}$$

其中 $\langle t\rangle = 1 + t$. 从而, 利用 (1.4) 和 (1.5), 发现 G (参见文献 [13]) 满足方程

$$\begin{cases}\partial_t G - \partial_y^2 G + \dfrac{1}{\langle t\rangle}G + (u^s + u)\partial_x G + v\partial_y(u + u^s) + \dfrac{y}{\langle t\rangle}\displaystyle\int_y^\infty \partial_y(u^s + u)\partial_x\varphi dz = 0,\\ G|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} G = 0,\\ G|_{t=0} = G_0 \stackrel{\text{def}}{=} u_0 + \dfrac{y}{2}\varphi_0.\end{cases} \tag{1.7}$$

接下来陈述将用到的各向异性 Sobolev 范数:

定义 1.1 对于任意非负整数 a 和 b, 定义函数 f 的 $H^{a,b}$ 范数如下:

$$\|f\|_{H^{a,b}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant a\\ 0\leqslant \ell\leqslant b}} \|\partial_x^j\partial_y^\ell f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}. \tag{1.8}$$

从现在开始, 记

$$\Psi(t,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y^2}{8\langle t\rangle}. \tag{1.9}$$

本文的主要结果如下:

定理 1.1 设 $\gamma_0\in(0,1)$, $\kappa\in(0,\frac{1}{2})$, 假设由方程 (1.3) 确定的剪切流 u^s 满足

$$\partial_y u^s(t,y)\geqslant c_0\langle t\rangle^{-2+\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}},\quad \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}}\partial_y^2 u_0^s\|_{L_v^\infty}\leqslant M,\tag{1.10}$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\|\langle t\rangle^{2-\kappa}\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}\partial_y^2 u^s(t)\|_{L_v^\infty}^2dt+\int_0^\infty\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}\partial_y f(t)\|_{L^2}^2dt+\|\langle t\rangle^{\frac{11}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}\partial_y f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)}^2\\&\leqslant M,\end{aligned}\tag{1.11}$$

其中 c_0 和 M 为正的常数. 假设 (1.4) 的初值 u_0 满足相容性条件: $u_0(x,0)=0$ 和 $\int_0^\infty u_0dy=0$, 则存在充分小的常数 $\varepsilon>0$ 以及只依赖于 κ 的正整数 k_0, 使得当 $k\geqslant k_0$ 时, 如果成立

$$\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}}\partial_y^2 u_0\|_{H^{k,0}}\leqslant\varepsilon,\tag{1.12}$$

则方程 (1.4) 有唯一的整体解 u 使得对于任意 $\gamma\in[\gamma_0,1)$, 成立

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,\infty)}(\|\langle t\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\Psi}G(t)\|_{H^{5,0}}^2+\|\langle t\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y u(t)\|_{H^{4,0}}^2+\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 u(t)\|_{H^{3,0}}^2)\\&\quad+\int_0^\infty(\|\langle t\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y G(t)\|_{H^{5,0}}^2+\|\langle t\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 u(t)\|_{H^{4,0}}^2+\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^3 u(t)\|_{H^{3,0}}^2)dt\\&\quad\leqslant C\varepsilon^2.\end{aligned}\tag{1.13}$$

注 1.1 (1) 事实上, 可以详细计算出常数 k_0, 它可取任何比 $7+\frac{7}{1-2\kappa}$ 大的整数.

(2) 运用 (1.13) 与后文的引理 2.1, 可以得到如下 u 的长时间衰减估计:

$$\|\langle t\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;H^{5,0})}^2+\int_0^\infty\|\langle t\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y u(t)\|_{H^{5,0}}^2dt\leqslant C\varepsilon^2.$$

(3) 与文献 [18] 中的相同, 如果 $u_0(x,y)$ 在 $y=0$ 处满足高阶的相容性条件, 则可以证明定理 1.1 中找到的解会传播关于 y 变量的正则性.

(4) 像之前指出的那样, 考虑带外力项的 Prandtl 方程的原因在于, 如果没有外力项, 则不存在同时满足 (1.10) 和 (1.11) 的剪切流 (参见注 A.1). 相反地, 给定 (1.3) 的单调初值和有着充分快长时间衰减的远场速度 $U(t)$, 可以先构造满足假设 (1.10) 和 (1.11) 的函数 u^s, 再令可控外力项 f 为

$$f(t,y)=\partial_t u^s-\partial_y^2 u^s-U'(t).$$

注 1.2 (1.11) 中关于 $\int_0^\infty\|\langle t\rangle^{2-\kappa}\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}\partial_y^2 u^s(t)\|_{L_v^\infty}^2dt$ 有限的假设比如下自然的点态控制要强:

$$|\partial_y^2 u^s(t,y)|\leqslant\langle t\rangle^{-\frac{5}{2}+\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}.\tag{1.14}$$

需要这样的可积性估计的原因在于, g_k 满足的方程 (3.5) 中有一项线性项 $2\partial_y(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w})g_k$, 它的逐点行为类似于 $\langle t\rangle^{-1}g_k$, 其不能被类似 Gronwall 不等式的方法吸收. 如果能够找到别的方式处理这一项, 则能够将 (1.11) 中 $\partial_y^2u^s$ 可积性的要求替代为 (1.14), 从而如下的剪切流可以被处理:

$$u^s(t,y)=\frac{U(t)}{U(0)}u_0^s\bigg(\frac{y}{\sqrt{\langle t\rangle}}\bigg),$$

其中 $\int_0^y u_0^s(z)dz\approx\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{8}}$ 且 $U(t)\approx\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\kappa}$.

本文余下内容结构如下. 第 2 节回顾之前相关工作中得到的一些不等式. 第 3 节在单调性的假设下, 引入与文献 [10] 中类似的量 g_k, 并给出关于 g_k 封闭的能量估计, 以克服方程 (1.4) 的解 u 在 x 方向的导数损失. 第 4 节对 G、$\partial_y u$ 和 $\partial_y^2 u$ 作能量估计. 最后, 第 5 节运用第 3 和 4 节中得到的估计式证明定理 1.1. 附录 A 给出一些关于满足方程 (1.3) 的剪切流的注解, 附录 B 推导出 g_k 满足的方程.

作为引言的结束, 下面引入本文所用的记号: $a \lesssim b$ 表示存在一个一致常数 C (它可能逐行都不同) 使得 $a \leqslant Cb$. 记 $[\mathcal{A};\mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ 为算子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的交换子.

$$(a \mid b)_{H^{k,0}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell \leqslant k} \int_{\mathbb{R}_+^2} \partial_x^\ell a(x,y) \partial_x^\ell b(x,y) dxdy$$

表示 a 和 b 在 $\mathbb{R}_+^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 上的 $H^{k,0}$ 内积, 并且 $L^p = L^p(\mathbb{R}_+^2)$ 是 $\mathbb{R}_+^2$ 上的 L^p 空间. 对于 Banach 空间 X 与 $\mathbb{R}$ 上的区间 I, 记 $L^q(I;X)$ 是定义在 I 上而取值于 X 中的可测函数, 使得 $t \mapsto \|f(t)\|_X$ 属于 $L^q(I)$. 特别地, 记 $L_T^p(L_h^q(L_v^r))$ (相应地, L_h^q 和 L_v^r) 为空间 $L^p([0,T];L^q(\mathbb{R}_x;L^r(\mathbb{R}_y^+)))$ (相应地, $L^q(\mathbb{R}_x)$ 和 $L^r(\mathbb{R}_y^+)$).

2 准备工作与一些技术性引理

本节收集了之前相关工作中已经得到的一些不等式. 首先, 回顾文献 [8] 中的 Poincaré 型不等式:

引理 2.1 (参见文献 [8, 引理 2.3]) 对于 (1.9) 给出的 Ψ, 如果 f 是 $\mathbb{R}_+^2$ 上充分光滑的函数, 并且在 y 趋于无穷时充分快地衰减到零, 则对于任意 $\gamma \in [0,1]$, 成立

$$\|e^{\gamma\Psi}\partial_y f\|_{L^2}^2 \geqslant \frac{\gamma}{2\langle t\rangle}\|e^{\gamma\Psi} f\|_{L^2}^2, \tag{2.1a}$$

$$\|e^{\gamma\Psi}\partial_y f\|_{L^2}^2 \geqslant \frac{\gamma}{4\langle t\rangle}\|e^{\gamma\Psi} f\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma^2}{16\langle t\rangle^2}\|e^{\gamma\Psi} yf\|_{L^2}^2. \tag{2.1b}$$

特别地, 当 $\gamma = 1$ 时, (2.1a) 就是文献 [13] 中的 (3.1) 式.

如下引理描述了 u 与 G 之间的关系:

引理 2.2 设 u 和 φ 分别是 (1.4) 和 (1.5) 的充分光滑的解. 令 G 和 Ψ 分别由 (1.6) 和 (1.9) 定义. 则对于任意 $\gamma \in (0,1)$ 和 $w \stackrel{\text{def}}{=} \partial_y u$, 成立

$$\|e^{\gamma\Psi}\varphi\|_{L^2} \leqslant C\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|e^{\Psi} G\|_{L^2}, \tag{2.2a}$$

$$\|e^{\gamma\Psi} u\|_{L^2} \leqslant C\|e^{\Psi} G\|_{L^2}, \tag{2.2b}$$

$$\|e^{\gamma\Psi} w\|_{L^2} \leqslant C\|e^{\Psi}\partial_y G\|_{L^2}. \tag{2.2c}$$

证明 由 (1.6) 知 $\partial_y\varphi + \frac{y}{2\langle t\rangle}\varphi = G$, 再运用边值条件 $\varphi|_{y=0} = 0$, 推导出 $\varphi = e^{-2\Psi}\int_0^y e^{2\Psi(y')}G(y')dy'$, 从而,

$$\begin{aligned} u &= G - \frac{y}{2\langle t\rangle}\varphi = G - \frac{y}{2\langle t\rangle}e^{-2\Psi}\int_0^y e^{2\Psi(y')}G(y')dy', \\ w &= \partial_y u = \partial_y\bigg(G - \frac{y}{2\langle t\rangle}e^{-2\Psi}\int_0^y e^{2\Psi(y')}G(y')dy'\bigg) \\ &= \partial_y G - \frac{y}{2\langle t\rangle}G + \frac{1}{2\langle t\rangle}\bigg(\frac{y^2}{2\langle t\rangle} - 1\bigg)e^{-2\Psi}\int_0^y e^{2\Psi(y')}G(y')dy'. \end{aligned}$$

然后, 估计 (2.2) 可以沿着文献 [13] 中同样的方式得到. □

特别地, 由引理 2.2 的证明和定义 1.1 可推导出如下推论:

推论 2.1 在引理 2.2 的假设条件下, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\varphi\|_{H^{k,0}} \leqslant C\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{k,0}}, \tag{2.3a}$$

$$\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}u\|_{H^{k,0}} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{k,0}}, \tag{2.3b}$$

$$\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{k,0}} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y G\|_{H^{k,0}}. \tag{2.3c}$$

接下来, 回顾线性热方程的加权能量估计:

引理 2.3 (参见文献 [8, 引理 3.2]) 如果 f 是 $\mathbb{R}^2_+$ 上充分光滑的函数, 满足 $f\partial_y f|_{y=0} = 0$, 并且在 y 趋于无穷时充分快地衰减到零, 则对于任意 $\gamma \in [0,1]$, 成立

$$(\partial_t f - \partial_y^2 f \mid \mathrm{e}^{2\gamma\Psi} f)_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}f\|_{L^2}^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y f\|_{L^2}^2. \tag{2.4}$$

从定义 1.1 和文献 [8, 引理 3.2] 的证明容易得到如下推论:

推论 2.2 在引理 2.3 的假设条件下, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 成立

$$(\partial_t f - \partial_y^2 f \mid \mathrm{e}^{2\gamma\Psi} f)_{H^{k,0}} \geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}f\|_{H^{k,0}}^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y f\|_{H^{k,0}}^2. \tag{2.5}$$

最后, 为了处理两个函数间的乘积, 回顾如下 Morse 型不等式:

引理 2.4 (1) 对于 $f, g \in H^k(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, 成立

$$\|\partial_x^k(fg)\|_{L^2} \leqslant C_k(\|f\|_{L^\infty}\|\partial_x^k g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty}\|\partial_x^k f\|_{L^2}); \tag{2.6}$$

(2) 对于 $f \in H^k(\mathbb{R})$ 且 $\partial_x f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in H^{k-1}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, 成立

$$\|[\partial_x^k; f]g\|_{L^2} \leqslant C_k(\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|\partial_x^{k-1}g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty}\|\partial_x^k f\|_{L^2}). \tag{2.7}$$

这两个 Morse 型不等式是 Hölder 不等式与如下 Gagliardo-Nirenberg (G-N) 不等式的直接推论:

$$\|\partial_x^\ell f\|_{L^{\frac{2k}{\ell}}} \leqslant C_k\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{\ell}{k}}\|\partial_x^k f\|_{L^2}^{\frac{\ell}{k}}, \quad \forall\, 0 \leqslant \ell \leqslant k, \tag{2.8}$$

此 G-N 不等式可以通过高低频分解的方法证明 (参见文献 [2]).

3 g_k 的能量估计

在定理 1.1 的条件下, 由文献 [18, 定理 1.1] 的证明推知, 方程 (1.4) 在 $[0, T^*)$ 上存在唯一解, 其中 T^* 为其生命区间. 本节直接对方程 (1.4) 在 $[0, T^*)$ 上充分光滑的解作先验估计.

3.1 g_k 的定义与满足的方程

记 $w^s \overset{\text{def}}{=} \partial_y u^s$ 和 $w \overset{\text{def}}{=} \partial_y u$. 对方程 (1.4) 作用 ∂_y, 得到

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_y^2 w + (u^s + u)\partial_x w + v\partial_y(w^s + w) = 0, \\ u = -\displaystyle\int_y^\infty w dy', \quad v = \displaystyle\int_y^\infty \partial_x u dy', \\ \partial_y w|_{y=0} = 0, \quad \displaystyle\lim_{y\to+\infty} w = 0, \\ w|_{t=0} = w_0 \overset{\text{def}}{=} \partial_y u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

由于在 (1.4) 和 (3.1) 中都没有关于 x 变量的扩散, 所以 (1.4) 中的项 $v(w^s+w)$ 和 (3.1) 中的项 $v\partial_y(w^s+w)$ 会导致在能量估计过程中 x 方向的一阶导数损失. 文献 [1,10] 的一个关键观察在于: 他们引入了一个新的量, 其在能量估计的过程中不会损失导数. 具体而言, 为了对 w 作 $H^{k,0}$ 能量估计, 首先对 (1.4) 和 (3.1) 分别作用 ∂_x^k, 得到 (此处运用了 u^s 与 x 变量无关的事实)

$$\begin{cases}\partial_t\partial_x^k u-\partial_y^2\partial_x^k u+(u^s+u)\partial_x^{k+1}u+(w^s+w)\partial_x^k v=[u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v,\\ \partial_t\partial_x^k w-\partial_y^2\partial_x^k w+(u^s+u)\partial_x^{k+1}w+\partial_y(w^s+w)\partial_x^k v=[u;\partial_x^k]\partial_x w+[\partial_y w;\partial_x^k]v,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中较差 (损失导数) 的项是 $(w^s+w)\partial_x^k v$ 和 $\partial_y(w^s+w)\partial_x^k v$. 为了摆脱这两项, 回顾文献 [10] 引入的好量

$$g_k \overset{\text{def}}{=} \partial_x^k w-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\partial_x^k u=(w^s+w)\partial_y\Big(\frac{\partial_x^k u}{w^s+w}\Big). \tag{3.3}$$

为了对 g_k 作出合理的估计, 需要 w^s+w 具有正的下界. 为此, 引入 $T^\#$ 为

$$T^\# \overset{\text{def}}{=} \sup\Big\{T\in[0,T^*[:\ (w^s+w)(t,y)\geqslant\frac{c_0}{2}\langle t\rangle^{-2+\kappa}\mathrm{e}^{-\gamma_0\Psi},\forall\, t\in[0,T]\Big\}, \tag{3.4}$$

此处的常数 c_0、κ 和 γ_0 都是定理 1.1 中给出的. 这个定义是受 (1.10) 启发的. 由于 u 的初值是 u_0^s 的小扰动, 通过连续性的讨论, 必有 $T^\#>0$. 利用 (3.2) 和 (3.3), g_k 满足的方程为

$$\begin{cases}\partial_t g_k-\partial_y^2 g_k+(u^s+u)\partial_x g_k=\Big(\partial_x w+\partial_y\Big(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\Big)\Big)\partial_x^k u+2\partial_y\Big(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\Big)g_k\\ \qquad\qquad +(w^s+w)\partial_y\Big(\frac{[u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v}{w^s+w}\Big)-\partial_y\Big(\frac{\partial_y f}{w^s+w}\Big)\partial_x^k u,\\ \partial_y g_k|_{y=0}=0,\quad \lim\limits_{y\to+\infty}g_k=0,\\ g_k|_{t=0}=g_{k,0}\overset{\text{def}}{=}\partial_x^k w_0-\frac{\partial_y(w_0^s+w_0)}{w_0^s+w_0}\partial_x^k u_0.\end{cases} \tag{3.5}$$

附录 B 给出 g_k 方程的推导过程.

3.2　$\partial_x^k w$ 与 g_k 的估计之间的关系

g_k 的范数与 $\partial_x^k w$ 的范数在以下意义上是几乎等价的:

引理 3.1　对于 (1.9) 给出的 Ψ 和 (3.3) 定义的 g_k, 对于任意 $t\leqslant T^\#$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k(t)\|_{L^2}\leqslant C(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w(t)\|_{L^2}, \tag{3.6}$$

以及对于任意 $\gamma\in]0,1[$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_x^k w(t)\|_{L^2}\leqslant C_{\gamma,\gamma_0}(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k(t)\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

证明　由 (3.4) 可知, 对于 $t\leqslant T^\#$, 总有 $|\frac{1}{w^s+w}|\lesssim\langle t\rangle^{2-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}$, 由上式、(2.1a) 和 (3.3), 得到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}&\lesssim\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}+\langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k u\|_{L^2}\\&\lesssim(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

从而 (3.6) 成立. 为证明不等式 (3.7), 从 (3.3) 观察到

$$\begin{aligned}\partial_x^k u&=(w^s+w)\partial_y^{-1}\Big(\frac{g_k}{w^s+w}\Big),\\ \partial_x^k w&=\partial_y\partial_x^k u=g_k+\partial_y(w^s+w)\partial_y^{-1}\Big(\frac{g_k}{w^s+w}\Big),\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $\partial_y^{-1}f(y)=-\int_y^\infty f(y')dy'$. 因此, 由 (3.4) 推导出, 对于 $t\leqslant T^\#$, 成立

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}&\lesssim\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}g_k\|_{L^2}+\Big\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(w^s+w)\partial_y^{-1}\Big(\frac{g_k}{w^s+w}\Big)\Big\|_{L^2}\\ &\lesssim\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}+\langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\Big\|\mathrm{e}^{(\gamma-\gamma_0)\Psi}\int_y^\infty\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi(y')}|g_k(y')|dy'\Big\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

注意到

$$\sup_{\xi\geqslant0}\Big(\mathrm{e}^{\xi^2}\int_\xi^\infty\mathrm{e}^{-\eta^2}d\eta\Big)<+\infty,\tag{3.10}$$

从而可以计算出

$$\begin{aligned}\Big\|\mathrm{e}^{(\gamma-\gamma_0)\Psi}\int_y^\infty\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi(y')}|g_k(y')|dy'\Big\|_{L^2}&\leqslant\Big\|\mathrm{e}^{(\gamma-\gamma_0)\Psi}\Big(\int_y^\infty\mathrm{e}^{2(\gamma_0-1)\Psi(y')}dy'\Big)^{\frac12}\Big\|_{L_v^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\leqslant C_{\gamma_0}\langle t\rangle^{\frac14}\|\mathrm{e}^{(\gamma-1)\Psi}\|_{L_v^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\leqslant C_{\gamma_0,\gamma}\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}.\end{aligned}$$

将上式代入 (3.9), 得到 (3.7). 引理 3.1 证毕. □

不等式 (3.7) 因为 L_v^2 可积性的要求损失了 $\mathrm{e}^{(1-\gamma)\Psi}$ 的权重. 如果作如下的 L^∞ 范数的估计, 就可以没有权重的损失:

引理 3.2 对于 (3.3) 中定义的 g_k 以及任意 $t\leqslant T^\#$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k u(t)\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\leqslant C_{\gamma_0}\langle t\rangle^{\frac{11}{4}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k(t)\|_{L^2},\tag{3.11}$$

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w(t)\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\leqslant C_{\gamma_0}\langle t\rangle^{\frac14}(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k(t)\|_{L^2}.\tag{3.12}$$

证明 利用 (3.4) 和 (3.8) 知

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k u(t)\|_{L_h^2(L_v^\infty)}&\leqslant\Big\|\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)\partial_y^{-1}\Big(\frac{g_k}{w^s+w}\Big)\Big\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\\ &\leqslant\langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}\Big\|\mathrm{e}^{(1-\gamma_0)\Psi}\int_y^\infty\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi(y')}|g_k(y')|dy'\Big\|_{L_h^2(L_v^\infty)}.\end{aligned}$$

同时, 由 (3.10) 可推导出

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}&\leqslant\Big\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\int_y^\infty\mathrm{e}^{-\gamma_0\Psi(y')}dy'\Big\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\\ &\leqslant C_{\gamma_0}\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left\|\mathrm{e}^{(1-\gamma_0)\Psi}\int_y^\infty \mathrm{e}^{\gamma_0\Psi(y')}|g_k(y')|dy'\right\|_{L_h^2(L_v^\infty)} &\leqslant \left\|\mathrm{e}^{(1-\gamma_0)\Psi}\left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{2(\gamma_0-1)\Psi(y')}dy'\right)^{\frac12}\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\leqslant C_{\gamma_0}\langle t\rangle^{\frac14}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2},\end{aligned}\tag{3.13}$$

从而, 推导出了 (3.11).

对于不等式 (3.12), 首先由 (3.8) 和 (3.4) 观察到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w\|_{L_h^2(L_v^\infty)} &\lesssim \|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L_h^2(L_v^\infty)} + \left\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y(w^s+w)\partial_y^{-1}\left(\frac{g_k}{w^s+w}\right)\right\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\\ &\lesssim \|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L_h^2(L_v^\infty)} + \langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\\ &\quad\times\left\|\mathrm{e}^{(1-\gamma_0)\Psi}\int_y^\infty \mathrm{e}^{\gamma_0\Psi(y')}|g_k(y')|dy'\right\|_{L_h^2(L_v^\infty)},\end{aligned}$$

由上式和 (3.13) 以及

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L_h^2(L_v^\infty)} \leqslant \left\|\mathrm{e}^{\Psi}\left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-2\Psi(y')}dy'\right)^{\frac12}\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2} \leqslant C\langle t\rangle^{\frac14}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2},$$

得到

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^k w\|_{L_h^2(L_v^\infty)} \lesssim \langle t\rangle^{\frac14}(\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2} + \langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}),$$

再运用 (2.1a), 可推导出 (3.12). 引理 3.2 证毕. □

3.3 g_k 的先验估计

本小节给出 g_k 不损失任何导数的先验估计. 具体如下:

命题 3.1 对于 (3.3) 中定义的 g_k 以及任意 $\delta\in(0,1)$, 存在一个正的常数 C, 使得对于任意 $t\leqslant T^{\#}$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 + \frac12\int_0^t \|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leqslant \mathrm{e}^{C\int_0^t V_1(s)ds}\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}}g_{k,0}\|_{L^2}^2,\tag{3.14}$$

其中函数 $V_1(t)$ 定义为

$$\begin{aligned}V_1(t) \overset{\text{def}}{=} &(\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w(t)\|_{L^\infty} + \langle t\rangle^2\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w(t)\|_{L^\infty}^2)\\ &\times(1+\langle t\rangle^{5-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}^2) + \langle t\rangle^{\frac92-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y f(t)\|_{L_v^2}^2\\ &+\langle t\rangle^{4-2\kappa}(1+\langle t\rangle^{\frac{11}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y f(t)\|_{L_v^2}^2)\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

证明 首先, 对方程 (3.5) 与 $\mathrm{e}^{2\Psi}g_k$ 作 L^2 内积, 得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{e}^{\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)g_k \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2} + (\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x g_k \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2}\\ &\quad= \left(\mathrm{e}^{\Psi}\left(\partial_x w + \partial_y\left(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\right)\right)\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2} + 2\left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\right)g_k\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\\ &\qquad+\left(\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)\partial_y\left(\frac{[u;\partial_x^k]\partial_x u + [w;\partial_x^k]v}{w^s+w}\right)\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2} - \left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y f}{w^s+w}\right)\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

接下来, 逐项估计上式中的每一项, 注意总是要求 $t \leqslant T^{\#}$. 首先运用引理 2.3, 得到

$$(\mathrm{e}^{\Psi}(\partial_t - \partial_y^2)g_k \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2.$$

对第二项分部积分, 得到

$$|(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x g_k \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2}| = \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}_+^2}\partial_x u|\mathrm{e}^{\Psi}g_k|^2 dxdy\right| \leqslant \|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.$$

注意到对于任意 $a>0$, 运用 (3.10) 可得

$$\|\mathrm{e}^{a\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty} \leqslant \|\mathrm{e}^{a\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\left\|\mathrm{e}^{a\Psi(y)}\int_y^\infty \mathrm{e}^{-a\Psi(y')}dy'\right\|_{L_v^\infty} \leqslant C_a\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{a\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}, \tag{3.17}$$

$$\|\mathrm{e}^{a\Psi}v\|_{L^\infty} \leqslant C_a\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{a\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty} \leqslant C_a\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{a\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}. \tag{3.18}$$

因此, 利用 (3.17), 得到

$$|(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x g_k \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2}| \leqslant C_\delta\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.$$

应用 (2.1a) 和 (3.7), 得到

$$\begin{aligned}|(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x w\partial_x^k u \mid \mathrm{e}^{\Psi}g_k)_{L^2}| &\leqslant \|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k u\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\leqslant C_\delta\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\leqslant C_\delta\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

同时, 对 y 方向运用分部积分, 再结合 (2.1b) 和 (3.4), 可推导出

$$\begin{aligned}&\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\right)\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right|\\ &\quad\leqslant\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\partial_x^k w\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| + \left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\right)_{L^2}\right|\\ &\qquad+\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\frac{y}{2\langle t\rangle}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right|\\ &\quad\leqslant C\langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}v\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}\\ &\qquad+\frac{1}{16}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2 + C\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}v\|_{L^\infty}^2\left\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\partial_x^k u\right\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

但是由 (3.3) 知,

$$\left\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\partial_x^k u\right\|_{L^2}^2 \lesssim \|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}g_k\|_{L^2}^2 + \|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2}^2.$$

因此, 再运用 (3.18) 和 (3.7), 得到

$$\begin{aligned}\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}v\right)\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| &\leqslant \frac{1}{16}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2 + C_\delta(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty} + \langle t\rangle^2\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}^2)\\ &\quad\times(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^2\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

沿用与 (3.19) 相同的推导方式, 得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)\partial_y\left(\frac{[u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v}{w^s+w}\right)\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| \\
&\quad\lesssim \|\mathrm{e}^{\Psi}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2} \\
&\qquad+\left\|\mathrm{e}^{\Psi}\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\right\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2} \\
&\quad\leqslant \frac{1}{16}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2+C\|\mathrm{e}^{\Psi}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\|_{L^2}^2 \\
&\qquad+C\langle t\rangle^{2-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

注意到 (2.1a) 和 $\partial_x u+\partial_y v=0$, 直接推知

$$
\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^{k-1}v\|_{L^2}\lesssim\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^{k-1}\partial_y v\|_{L^2}\lesssim\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k u\|_{L^2}\lesssim\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2},
$$

从而运用引理 2.4、(3.7)、(3.17) 和 (3.18), 得出

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{e}^{\Psi}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\|_{L^2} \\
&\quad\lesssim \|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k u\|_{L^2}+\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^{k-1}v\|_{L^2}+\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}v\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k w\|_{L^2} \\
&\quad\leqslant C_\delta\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)\partial_y\left(\frac{[u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v}{w^s+w}\right)\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| \\
&\quad\leqslant \frac{1}{16}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2+C_\delta(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty} \\
&\qquad+\langle t\rangle^2\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}^2)(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^2\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

(3.16) 中余下的两项, 实际上行为近似于线性项, 故而不能像如上的非线性项那样处理. 先作分部积分, 再运用 (2.1b) 和 (3.4) 可知

$$
\begin{aligned}
&2\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\right)g_k\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| \\
&\quad\leqslant 4\left\|\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\right\|_{L^\infty}(\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}+2\langle t\rangle^{-1}\|\mathrm{e}^{\Psi}yg_k\|_{L^2})\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2} \\
&\quad\leqslant 12\left\|\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\right\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2} \\
&\quad\leqslant \frac{1}{16}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2+C\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

运用同样的办法, 得到

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y f}{w^s+w}\right)\partial_x^k u\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right| \\
&\quad\lesssim \left\|\mathrm{e}^{\Psi}\frac{\partial_y f}{w^s+w}\partial_x^k u\right\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}+\left\|\mathrm{e}^{\Psi}\frac{\partial_y f}{w^s+w}\partial_x^k w\right\|_{L^2}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \langle t\rangle^{2-\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y f\|_{L_v^2}(\|e^{\Psi}\partial_x^k u\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\|e^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}+\|e^{\Psi}\partial_x^k w\|_{L_h^2(L_v^\infty)}\|e^{\Psi}g_k\|_{L^2}).$$

最后, 利用 (3.11) 和 (3.12), 可得

$$\begin{aligned}&\left|\left(e^{\Psi}\partial_y\left(\frac{\partial_y f}{w^s+w}\right)\partial_x^k u\,\middle|\, e^{\Psi}g_k\right)_{L^2}\right|\\&\leqslant C\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y f\|_{L_v^2}\|e^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}\|e^{\Psi}g_k\|_{L^2}(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})\\&\leqslant \frac{1}{16}\|e^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2+C\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y f\|_{L_v^2}^2(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^2\|e^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

至此, 将如上全部估计代入 (3.16), 得到

$$\frac{d}{dt}\|e^{\Psi}g_k(t)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|e^{\Psi}\partial_y g_k\|_{L^2}^2\leqslant C_\delta V_1(t)\|e^{\Psi}g_k\|_{L^2}^2,$$

其中 $V_1(t)$ 就是 (3.15) 中定义的函数. 再运用 Gronwall 不等式, 即可推导出 (3.14). 命题 3.1 证毕. □

4 G、w 和 $\partial_y w$ 的能量估计

4.1 G 的能量估计

本小节的目标是推导出由 (1.6) 定义的好函数 G 满足的长时间衰减估计. 利用上一节得到的 g_k 能量估计以及插值的方法来克服导数损失.

命题 4.1 设 G 由 (1.6) 所定义, 则对于任意正数 $\kappa\in(0,\frac{1}{2})$ 和 $\delta\in(0,1)$, 以及充分大的整数 $k\geqslant 7$, 存在正常数 C, 使得对于任意 $t\leqslant T^{\#}$, 成立

$$\begin{aligned}&\|\langle\tau\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}e^{\Psi}G\|_{L_t^\infty(H^{5,0})}^2+\kappa\int_0^t\langle\tau\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|e^{\Psi}\partial_y G(\tau)\|_{H^{5,0}}^2d\tau\\&\leqslant e^{C\int_0^t V_2(\tau)d\tau}\left(\|e^{\frac{y^2}{8}}G_0\|_{H^{5,0}}^2+\int_0^t\|e^{\Psi}\partial_y g_k(\tau)\|_{L^2}^2d\tau\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $V_2(t)$ 定义为

$$\begin{aligned}V_2(t)\overset{\text{def}}{=}&\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|e^{2\delta\Psi}(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|e^{2\delta\Psi}\partial_x w(t)\|_{L^\infty}+\|e^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi(t)\|_{L^\infty}^2\\&+\langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2k-11}}(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|e^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)(t)\|_{L^\infty})^{\frac{2}{2k-11}}\|e^{2\delta\Psi}(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}^{1+\frac{1}{2k-11}}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

证明 首先, 对方程 (1.7) 与 $e^{2\Psi}G$ 作 $H^{5,0}$ 内积, 得到

$$\begin{aligned}&(e^{\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)G\mid e^{\Psi}G)_{H^{5,0}}+\frac{1}{\langle t\rangle}(e^{\Psi}G\mid e^{\Psi}G)_{H^{5,0}}+(e^{\Psi}(u^s+u)\partial_x G\mid e^{\Psi}G)_{H^{5,0}}\\&+(e^{\Psi}v(w^s+w)\mid e^{\Psi}G)_{H^{5,0}}+\left(e^{\Psi}\frac{y}{\langle t\rangle}\int_y^\infty\partial_x\varphi(w^s+w)dy'\,\middle|\, e^{\Psi}G\right)_{H^{5,0}}\\&=0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

下面逐项处理上式中的每一项, 并且总假设 $t\leqslant T^{\#}$. 首先运用引理 2.3 得到

$$(e^{\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)G\mid e^{\Psi}G)_{H^{5,0}}=\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(e^{\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)\partial_x^j G\mid e^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G(t)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j\partial_y G\|_{L^2}^2\\
&\geqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\Psi}G(t)\|_{H^{5,0}}^2+\frac{1}{2}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y G\|_{H^{5,0}}^2.
\end{aligned}
$$

对于 (4.3) 中包含传输项的项, 先将它们改写成

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x G\mid \mathrm{e}^{\Psi}G)_{H^{5,0}}&=\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j((u^s+u)\partial_x G)\mid \mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}\\
&=\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x^{j+1}G\mid \mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}+\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(\mathrm{e}^{\Psi}[u;\partial_x^j]\partial_x G\mid \mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}.
\end{aligned}
$$

运用分部积分, 得到

$$
\bigg|\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x^{j+1}G\mid \mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}\bigg|\leqslant\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2.
$$

同时, 由引理 2.4 和 (2.3b) 推导出

$$
\begin{aligned}
\bigg|\sum_{0\leqslant j\leqslant 5}(\mathrm{e}^{\Psi}[u;\partial_x^j]\partial_x G\mid \mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^j G)_{L^2}\bigg|&\lesssim(\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}+\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x G\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}u\|_{H^{5,0}})\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}\\
&\lesssim(\|\partial_x u\|_{L^\infty}+\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x G\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2.
\end{aligned}
$$

再由 (1.6) 和 $\varphi=-\int_y^\infty u dy'$ 观察到

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x G\|_{L^\infty}&\leqslant\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty}+\left\|\frac{y}{2\langle t\rangle}\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\\
&\lesssim\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty}+\left\|\frac{y}{2\langle t\rangle}\mathrm{e}^{\delta\Psi}\int_y^\infty \mathrm{e}^{-2\delta\Psi}dy'\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty}\\
&\lesssim\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty},
\end{aligned}
$$

因此, 运用 (3.17), 得出

$$
|(\mathrm{e}^{\Psi}(u^s+u)\partial_x G\mid \mathrm{e}^{\Psi}G)_{H^{5,0}}|\lesssim\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x u\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2\lesssim\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2. \tag{4.4}
$$

同时, 由于 $v=-\partial_x\varphi$ 和 (3.10), 观察到 (4.3) 中剩下的两项可以以同样的方式处理:

$$
\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)v\mid \mathrm{e}^{\Psi}G)_{H^{5,0}}|+\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\frac{y}{\langle t\rangle}\int_y^\infty(w^s+w)\partial_x\varphi dy'\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}G\right)_{H^{5,0}}\right|\\
&\leqslant\Bigg(\|\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{5,0}}+\left\|\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}\Psi}\frac{y}{\langle t\rangle}\right\|_{L_v^\infty}\left\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}\left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-2(1+\delta)\Psi}dy'\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_v^\infty}\\
&\quad\times\|\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}\Psi}\|_{L_v^2}\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{5,0}}\Bigg)\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}\\
&\leqslant C_\delta\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{5,0}}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}.
\end{aligned}
$$

很容易发现

$$
\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{5,0}}\leqslant\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{4,0}}+\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}[\partial_x^5;w]\partial_x\varphi\|_{L^2}
$$

$$+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^6\varphi\|_{L^2}. \tag{4.5}$$

由于前两部分与导数损失无关, 运用引理 2.4、(2.3a) 和 (2.3c), 得到

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{4,0}}+\|\mathrm{e}^{(1+\delta)\Psi}[\partial_x^5;w]\partial_x\varphi\|_{L^2}\\
&\lesssim\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\varphi\|_{H^{5,0}}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}w\|_{H^{4,0}}\\
&\quad+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_xw\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^5\varphi\|_{L^2}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^5w\|_{L^2}\\
&\lesssim\langle t\rangle^{\frac12}(\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_xw\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}.
\end{aligned}$$

为了处理 (4.5) 中最后一项, 运用以下关于 x 变量的插值不等式:

$$\|\partial_x^6f\|_{L_h^2}\leqslant C_k\|f\|_{H_h^5}^{1-\frac{1}{k-5}}\|\partial_x^kf\|_{L_h^2}^{\frac{1}{k-5}},\quad\forall\,k\geqslant7, \tag{4.6}$$

再加上 (3.7)、(2.1a)、(2.3a) 和 (2.3c), 可推导出

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^6\varphi\|_{L^2}&\lesssim\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\varphi\|_{H^{5,0}}^{1-\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{(1-\delta)\Psi}\partial_x^k\varphi\|_{L^2}^{\frac{1}{k-5}}\\
&\lesssim\langle t\rangle^{\frac12(1-\frac{1}{k-5})}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^{1-\frac{1}{k-5}}\langle t\rangle^{\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_x^kw\|_{L^2}^{\frac{1}{k-5}}\\
&\lesssim\langle t\rangle^{\frac12+\frac{1}{2(k-5)}}(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^{\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^{1-\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}g_k\|_{L^2}^{\frac{1}{k-5}}\\
&\lesssim\langle t\rangle^{\frac12+\frac{1}{k-5}}(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^{\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^{1-\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^{\frac{1}{k-5}}.
\end{aligned}$$

因此, 得到

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{\Psi}(w^s+w)v\mid\mathrm{e}^{\Psi}G)_{H^{5,0}}|+\left|\left(\mathrm{e}^{\Psi}\frac{y}{2\langle t\rangle}\int_y^\infty(w^s+w)\partial_x\varphi dy'\,\middle|\,\mathrm{e}^{\Psi}G\right)_{H^{5,0}}\right|\\
&\leqslant C(\langle t\rangle^{\frac12}(\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_xw\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2\\
&\quad+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}+\langle t\rangle^{\frac12+\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}\\
&\quad\times(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^{\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^{2-\frac{1}{k-5}}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^{\frac{1}{k-5}})\\
&\leqslant\kappa\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}^2+\frac12\langle t\rangle^{-\frac52}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^2+C(\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}\\
&\quad+\langle t\rangle^{\frac12+\frac{5}{2k-11}}(1+\langle t\rangle^{\frac52-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty})^{\frac{2}{2k-11}}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}(w^s+w)\|_{L^\infty}^{1+\frac{1}{2k-11}}\\
&\quad+\langle t\rangle^{\frac12}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_xw\|_{L^\infty}+\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi\|_{L^\infty}^2)\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2.
\end{aligned}$$

将以上的估计式都代入 (4.3), 得到

$$\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\Psi}G(t)\|_{H^{5,0}}^2+(1-2\kappa)\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}^2+\frac{2}{\langle t\rangle}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2\leqslant CV_2(t)\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2+\langle t\rangle^{-\frac52}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^2, \tag{4.7}$$

其中 $V_2(t)$ 就是 (4.2) 中定义的函数. 运用 (2.1a), 由 (4.7) 推导出

$$\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\Psi}G(t)\|_{H^{5,0}}^2+2\kappa\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}^2+\frac{\frac52-2\kappa}{\langle t\rangle}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2\leqslant CV_2(t)\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2+\langle t\rangle^{-\frac52}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^2.$$

将上式乘以 $\langle t\rangle^{\frac52-2\kappa}$ 即为

$$\frac{d}{dt}\|\langle t\rangle^{\frac54-\kappa}\mathrm{e}^{\Psi}G(t)\|_{H^{5,0}}^2+2\kappa\langle t\rangle^{\frac52-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG\|_{H^{5,0}}^2\leqslant CV_2(t)\langle t\rangle^{\frac52-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2+\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k\|_{L^2}^2.$$

再运用 Gronwall 不等式, 就证明了 (4.1). 命题 4.1 证毕. □

4.2 w 的能量估计

本小节的目标是推导出 w 的长时间衰减估计. 借助上一小节所得 G 的估计式来弥补导数损失.

命题 4.2 设 G 由 (1.6) 所定义, 则对于任意 $\kappa\in(0,\frac{1}{2})$ 和 $\gamma\in(0,1)$, 存在一个正常数 C, 使得对于任意 $t\leqslant T^{\#}$, 成立

$$\begin{aligned}&\|\langle\tau\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{L^\infty_t(H^{4,0})}+\int_0^t\langle\tau\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw(\tau)\|^2_{H^{4,0}}d\tau\\&\quad\leqslant \mathrm{e}^{C\int_0^tV_3(\tau)d\tau}\bigg(\|\mathrm{e}^{\frac{\gamma y^2}{8}}w_0\|^2_{H^{4,0}}+C\int_0^t\langle\tau\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG(\tau)\|^2_{H^{5,0}}d\tau\\&\qquad+C\|\langle\tau\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\Psi}G\|^2_{L^\infty_t(H^{5,0})}\int_0^t\langle\tau\rangle^2\|(w^s+w)(\tau)\|^2_{L^\infty}d\tau\bigg),\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中 $V_3(t)$ 指代

$$V_3(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\|\partial_x\varphi(t)\|^2_{L^\infty}+\|\partial_xu(t)\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\partial_xw(t)\|_{L^\infty}.\tag{4.9}$$

证明 对方程 (3.1) 与 $\mathrm{e}^{2\gamma\Psi}w$ 作 $H^{4,0}$ 内积, 得到

$$(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)w\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}+(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(u^s+u)\partial_xw\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}+(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}v\partial_y(w^s+w)\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}=0.\tag{4.10}$$

首先运用推论 2.2, 可得

$$(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)w\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}\geqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w(t)\|^2_{H^{4,0}}+\bigg(1-\frac{\gamma}{2}\bigg)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|^2_{H^{4,0}}.$$

与 (4.4) 的推导类似, 有

$$\begin{aligned}|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(u^s+u)\partial_xw\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}|&\lesssim\|\partial_xu\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{H^{4,0}}+\|\partial_xw\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}u\|_{H^{4,0}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}\\&\lesssim(\|\partial_xu\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\partial_xw\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{H^{4,0}}.\end{aligned}$$

对于 (4.10) 中最后这一项, 注意到 $v=\partial_x\varphi$ 以及 $\partial_xu+\partial_yv=0$, 先分部积分, 再运用 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}&|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}v\partial_y(w^s+w)\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}|\\&\quad\leqslant|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw)_{H^{4,0}}|+|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_xu\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}|\\&\qquad+\frac{\gamma}{2\langle t\rangle}|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}yw)_{H^{4,0}}|\\&\quad\leqslant C_\gamma\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{4,0}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|_{H^{4,0}}+\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_xu\|_{H^{4,0}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}.\end{aligned}$$

由上式和引理 2.4, 可推导出

$$\begin{aligned}|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}v\partial_y(w^s+w)\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}|&\lesssim(\|(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_x\varphi\|_{H^{4,0}}+\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|_{H^{4,0}}\\&\quad+(\|(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_xu\|_{H^{4,0}}+\|\partial_xu\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}.\end{aligned}$$

从而, 运用 (2.1a)、(2.3a) 和 (2.3b), 得到

$$\begin{aligned}|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}v\partial_y(w^s+w)\mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}w)_{H^{4,0}}|&\leqslant\frac{1-\gamma}{2}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|^2_{H^{4,0}}+C_\gamma\langle t\rangle\|w^s+w\|^2_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|^2_{H^{5,0}}\\&\quad+C_\gamma(\|\partial_x\varphi\|^2_{L^\infty}+\|\partial_xu\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{H^{4,0}}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

令 $V_3(t)$ 是 (4.9) 给出的函数, 则将以上的估计式都代入 (4.10), 得到

$$\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w(t)\|_{H^{4,0}}^2+\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{4,0}}^2\leqslant C_\gamma\langle t\rangle\|w^s+w\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2+C_\gamma V_3(t)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2.$$

再将不等式两边乘以 $\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}$, 并运用 (2.3c) 可推导出

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\langle t\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w(t)\|_{H^{4,0}}^2+\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{4,0}}^2\\
&\leqslant\left(\frac{7}{2}-2\kappa\right)\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2+C_\gamma\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|w^s+w\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2+C_\gamma\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}V_3(t)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2\\
&\leqslant C\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_y G\|_{H^{5,0}}^2+C_\gamma\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}G\|_{H^{5,0}}^2\langle t\rangle^2\|w^s+w\|_{L^\infty}^2+C_\gamma V_3(t)\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2.
\end{aligned}$$

运用 Gronwall 不等式, 就证明了 (4.8). 命题 4.2 证毕. □

4.3 $\partial_y w$ 的能量估计

对 (3.1) 作用 ∂_y, 发现 $\partial_y w$ 满足方程

$$\begin{cases}\partial_t\partial_y w-\partial_y^3 w+\partial_y((u^s+u)\partial_x w+v\partial_y(w^s+w))=0,\\ \partial_y w|_{y=0}=0,\quad \lim\limits_{y\to+\infty}\partial_y w=0,\\ \partial_y w|_{t=0}=\partial_y w_0.\end{cases}\tag{4.12}$$

与 Navier-Stokes 方程长时间衰减估计 (参见文献 [3]) 的预测相似, w 的一阶 y 方向导数应该导致额外 $\frac{1}{2}$ 阶衰减速度. 准确地, 有如下命题:

命题 4.3 对于任意 $\kappa\in(0,1)$ 和 $\gamma\in(0,1)$, 存在一个正的常数 C, 使得对于任意 $t\leqslant T^{\#}$, 成立

$$\begin{aligned}
&\|\langle\tau\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{L_t^\infty(H^{3,0})}^2+\int_0^t\langle\tau\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w(\tau)\|_{H^{3,0}}^2d\tau\\
&\quad\leqslant\mathrm{e}^{C\int_0^t V_4(\tau)d\tau}\bigg(\|\mathrm{e}^{\frac{\gamma y^2}{8}}\partial_y w_0\|_{H^{3,0}}^2+C\int_0^t\langle\tau\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(\tau)\|_{H^{4,0}}^2d\tau\\
&\qquad+C\|\langle\tau\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{L_t^\infty(H^{4,0})}^2\int_0^t\langle\tau\rangle^3\|\partial_y(w^s+w)(\tau)\|_{L^\infty}^2d\tau\bigg),
\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中 $V_4(t)$ 定义为

$$\begin{aligned}
V_4(t)&\stackrel{\text{def}}{=}\|\partial_x u(t)\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\partial_x w(t)\|_{L^\infty}\\
&\quad+\langle t\rangle\|\partial_x\partial_y w(t)\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^2\|(w^s+w)(t)\|_{L^\infty}^2+\|\partial_x\varphi(t)\|_{L^\infty}^2.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

证明 对方程 (4.12) 和 $\mathrm{e}^{2\gamma\Psi}\partial_y w$ 作 $H^{3,0}$ 内积, 得到

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)\partial_y w\mid\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}+(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(u^s+u)\partial_x\partial_y w\mid\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}\\
&\quad+(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x w\mid\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}+(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(v\partial_y(w^s+w))\mid\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}\\
&\quad=0.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

接下来, 逐项处理 (4.15) 中的每一项. 由推论 2.2 知

$$(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(\partial_t-\partial_y^2)\partial_y w\mid\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}\geqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{3,0}}^2+\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2.$$

同时, 类似于 (4.4) 的推导, 可得

$$|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(u^s+u)\partial_x\partial_y w \mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}| \leqslant C(\|\partial_x u\|_{L^\infty} + \langle t\rangle\|\partial_x\partial_y w\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}^2.$$

运用引理 2.4 和 (2.1a), 可得

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x w \mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}|\\
&\quad\leqslant \|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}(w^s+w)\partial_x w\|_{H^{3,0}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}\\
&\quad\leqslant C(\|w^s+w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_x w\|_{H^{3,0}} + \|\partial_x w\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi} w\|_{H^{3,0}})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}\\
&\quad\leqslant \langle t\rangle^{-1}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{4,0}}^2 + C_\gamma(\langle t\rangle^2\|w^s+w\|_{L^\infty}^2 + \langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\partial_x w\|_{L^\infty})\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}^2.
\end{aligned}$$

(4.15) 中最后一项采用与 (4.11) 相同的方式处理. 首先分部积分, 再运用 (2.1b) 推导出

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(v\partial_y(w^s+w)) \mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}|\\
&\quad\leqslant \|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}v\partial_y(w^s+w)\|_{H^{3,0}}\left(\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}} + \frac{\gamma}{2\langle t\rangle}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}y\partial_y w\|_{H^{3,0}}\right)\\
&\quad\leqslant C_\gamma\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{3,0}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}.
\end{aligned}$$

但是由引理 2.4 和 (2.1a) 可推导出

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(w^s+w)\partial_x\varphi\|_{H^{3,0}} &\lesssim \|\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_x\varphi\|_{H^{3,0}} + \|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}\\
&\lesssim \langle t\rangle\|\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}} + \|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}.
\end{aligned}$$

因此, 这一部分可以估计为

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y(v\partial_y(w^s+w)) \mid \mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w)_{H^{3,0}}|\\
&\quad\leqslant \frac{1-\gamma}{2}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2 + C_\gamma\langle t\rangle^2\|\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2 + C_\gamma\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}^2.
\end{aligned}$$

将以上的估计式都代入 (4.15), 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{3,0}}^2 + \|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2\\
&\quad\lesssim \langle t\rangle^{-1}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{4,0}}^2 + \langle t\rangle^2\|\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2 + V_4(t)\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}^2,
\end{aligned}$$

其中 V_4 是 (4.14) 定义的函数. 对如上不等式乘以 $\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-\kappa}$, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{3,0}}^2 + \langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2\\
&\quad\lesssim \langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{4,0}}^2 + \langle t\rangle^{\frac{13}{2}-2\kappa}\|\partial_y(w^s+w)\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|_{H^{4,0}}^2 + V_4(t)\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{3,0}}^2.
\end{aligned}$$

运用 Gronwall 不等式, 就证明了 (4.13). 命题 4.3 证毕. □

5 定理 1.1 的证明

本节的目标是给出定理 1.1 的证明. 为此, 首先指出所有相关初值的大小都是 ε 量级的.

引理 5.1 设 G 和 g_k 分别由 (1.6) 和 (3.3) 定义, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得, 如果 (1.10) 和 (1.12) 对于 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 成立, 则有

$$\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} g_k(0)\|_{L^2} + \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} G_0\|_{H^{5,0}} + \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma y^2}{8}} w_0\|_{H^{4,0}} + \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{H^{3,0}} \leqslant C_\gamma \varepsilon. \tag{5.1}$$

证明 注意到 (1.12) 可推导出

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}} w_0\|_{L^\infty} &\leqslant \left\|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}} \left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} dz\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_v^\infty} \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{L_v^2(L_h^\infty)} \\ &\leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{L_v^2(L_h^\infty)} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{H^{k,0}} \\ &\leqslant C\varepsilon,\end{aligned}$$

因此, 由 (1.10) 知, 只要 $\varepsilon \leqslant \frac{c_0}{2C}$, 就有 $w_0^s + w_0 \geqslant (c_0 - C\varepsilon)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0 y^2}{8}} \geqslant \frac{c_0}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_0 y^2}{8}}$, 从而 $|\frac{1}{w_0^s+w_0}| \lesssim \mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}}$. 从而由 (3.3) 观察到

$$\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} g_k(0)\|_{L^2} \lesssim \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k w_0\|_{L^2} + \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}} \partial_y w_0^s\|_{L_v^\infty} \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k u_0\|_{L^2} + \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{L_v^2(L_h^\infty)} \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k u_0\|_{L_h^2(L_v^\infty)}.$$

容易发现

$$\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k u_0\|_{L_h^2(L_v^\infty)} \leqslant \left\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} dz\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_v^\infty} \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k w_0\|_{L^2} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k w_0\|_{L^2}.$$

由上式、(2.1a)、(1.10) 以及 (1.12), 得到

$$\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} g_k(0)\|_{L^2} \leqslant C(1 + \|\mathrm{e}^{\frac{\gamma_0 y^2}{8}} \partial_y w_0^s\|_{L_v^\infty} + \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{H^{1,0}})\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_x^k w_0\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon. \tag{5.2}$$

由于 $u = \partial_y \varphi$, 所以从 (1.6) 和引理 2.1 可推导出

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} G_0\|_{H^{5,0}} &\leqslant \|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} u_0\|_{H^{5,0}} + \left\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \frac{y}{2}\varphi_0\right\|_{H^{5,0}} \\ &\leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} u_0\|_{H^{5,0}} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y u_0\|_{H^{5,0}} \leqslant C\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}} \partial_y w_0\|_{H^{5,0}} \leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

从而由上式、(1.12) 和 (5.2) 证明了 (5.1) 成立. □

定理 1.1 的证明 取定常数 δ、γ 和 γ_0, 满足

$$0 < 2\delta \leqslant \gamma_0 \leqslant \gamma < 1. \tag{5.3}$$

与第 3 节开头提到的一样, 令 T^* 是方程 (1.4) 充分光滑的解 (u, v) 的存在区间. 定义

$$T^\star \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{t \in [0, T^*) : \|\langle\tau\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|^2_{L_t^\infty(H^{3,0})} + \int_0^t \langle\tau\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w(\tau)\|^2_{H^{3,0}} d\tau < 2c_1\right\}, \tag{5.4}$$

其中 c_1 是一个待取的小常数.

我们断言, 与 (3.4) 中定义的 $T^\#$ 相比, $T^\star \leqslant T^\#$. 事实上, 利用 (3.10), 对 x 方向作 Sobolev 嵌入得到, 对于任意 $\gamma_0 \leqslant \gamma$, 成立

$$\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi} w(t)\|_{L^\infty} \leqslant \left\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma\Psi(y')}dy'\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_v^\infty} \|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{L_v^2(L_h^\infty)} \leqslant C\langle t\rangle^{\frac{1}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{1,0}}.$$

因此, 取 (5.4) 中的 c_1 充分小, 使得 $Cc_1 \leqslant \frac{c_0}{2}$, 就会发现

$$\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}w(t)\|_{L^\infty} \leqslant Cc_1\langle t\rangle^{-2+\kappa} \leqslant \frac{c_0}{2}\langle t\rangle^{-2+\kappa}, \quad \forall\, t \leqslant T^\star.$$

由上式和 (1.10), 可推导出

$$|(w^s+w)(t)| \geqslant \frac{c_0}{2}\langle t\rangle^{-2+\kappa}\mathrm{e}^{-\gamma_0\Psi}, \quad \forall\, t \leqslant T^\star, \tag{5.5}$$

这蕴涵着 $T^\star \leqslant T^\#$.

下面, 对于 $i=1,2,3,4$ 和任意 $T \leqslant T^\star$, 估计 $\int_0^T V_i(t)dt$. 注意到 (3.15), 利用 (2.1a) 和 x 方向的 Sobolev 嵌入得到

$$\begin{aligned}\int_0^T V_1(t)dt \lesssim \int_0^T &(\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{2,0}} + \langle t\rangle^{\frac{5}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{2,0}}^2)\\
&\times(1+\langle t\rangle^{5-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L_v^\infty}^2 + \langle t\rangle^{\frac{11}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w(t)\|_{H^{1,0}}^2)dt\\
&+\int_0^T \langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y f(t)\|_{L_v^2}^2 dt + (1+\|\langle t\rangle^{\frac{11}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y f\|_{L_T^\infty(L_v^2)}^2)\\
&\times\int_0^T(\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L_v^\infty}^2 + \langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w(t)\|_{H^{1,0}}^2)dt.\end{aligned}$$

由此及 (5.4) 和 (1.11), 可推导出

$$\begin{aligned}\int_0^T V_1(t)dt &\lesssim M\int_0^T(\langle t\rangle^{\kappa-\frac{3}{2}} + \langle t\rangle^{2\kappa-2} + \langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L^\infty}^2\\
&\quad+\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w(t)\|_{H^{1,0}}^2)dt + \int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y f(t)\|_{L_v^2}^2 dt\\
&\lesssim M.\end{aligned}$$

利用 (2.1a) 和 (3.10), 得到对于 $2\delta \leqslant \gamma_0$, 成立

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}w^s(t)\|_{L^\infty} &\leqslant \left\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\gamma_0\Psi(y')}dy'\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L_v^\infty} \lesssim \langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L_v^\infty},\\
\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\partial_x\varphi(t)\|_{L^\infty} &\leqslant \left\|\mathrm{e}^{2\delta\Psi}\left(\int_y^\infty \mathrm{e}^{-\gamma_0\Psi(y')}dy'\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_x u(t)\|_{L_v^2(L_h^\infty)}\\
&\leqslant C\langle t\rangle^{\frac{1}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}u(t)\|_{H^{2,0}} \leqslant C\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y u(t)\|_{H^{2,0}}\\
&\leqslant C\langle t\rangle^{\frac{5}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w(t)\|_{H^{2,0}}.\end{aligned}$$

因此, 由 (4.2), 可推导出

$$\begin{aligned}\int_0^T V_2(t)dt \lesssim \int_0^T &(\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{2,0}} + \langle t\rangle^{\frac{5}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{2,0}}^2 + \langle t\rangle\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L_v^\infty})dt\\
&+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2k-11}}(1+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty} + \langle t\rangle^{\frac{11}{4}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}})^{\frac{2}{2k-11}}\\
&\times(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty} + \langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}})^{1+\frac{1}{2k-11}}dt.\end{aligned}$$

由 (1.11) 和 (5.4), 可推导出

$$\int_0^T\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L_v^\infty}dt \leqslant \left(\int_0^T\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L_v^\infty}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\langle t\rangle^{2\kappa-2}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_\kappa,$$

$$\int_0^T (\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{2,0}}+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{2,0}}^2)dt\leqslant Cc_1\int_0^T(\langle t\rangle^{-\frac{3}{2}+\kappa}+\langle t\rangle^{-2-2\kappa})dt\leqslant C_\kappa c_1.$$

同时, 在 $k\geqslant k_0>\frac{17-20\kappa}{2(1-2\kappa)}=5+\frac{7}{2(1-2\kappa)}$ 的假设下, 可以运用 (1.11) 和 (5.4) 得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2k-11}}(\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{11}{4}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}})^{\frac{2}{2k-11}}\\
&\quad\times(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}})^{1+\frac{1}{2k-11}}dt\\
&\quad\lesssim\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2k-11}}(\langle t\rangle^{5-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2+\langle t\rangle^{\frac{11}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}}^2)^{\frac{1}{2k-11}}\\
&\qquad\times(\langle t\rangle\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2+\langle t\rangle^{\frac{3}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}}^2)^{\frac{k-5}{2k-11}}dt\\
&\quad=\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{-4(1-\kappa)k+31-20\kappa}{2(2k-11)}}(\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2+\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}}^2)^{\frac{k-4}{2k-11}}dt\\
&\quad\lesssim\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{-1-(1-2\kappa)+\frac{3+8\kappa}{2(k-7)}}dt\bigg)^{\frac{k-7}{2k-11}}\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2dt+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2dt\bigg)^{\frac{k-4}{2k-11}}\\
&\quad\lesssim C_\kappa,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2k-11}}(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{3}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}})^{1+\frac{1}{2k-11}}dt\\
&\lesssim\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{-4(1-\kappa)k+29-20\kappa}{2(2k-11)}}(\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2+\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{1,0}}^2)^{\frac{k-5}{2k-11}}dt\\
&\lesssim\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{-1-(1-2\kappa)+\frac{5+4\kappa}{2(k-6)}}dt\bigg)^{\frac{k-6}{2k-11}}\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2dt\\
&\quad+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{3,0}}^2dt\bigg)^{\frac{k-5}{2k-11}}\\
&\lesssim C_\kappa.
\end{aligned}$$

总之, 这证明了若 $k\geqslant k_0>\frac{17-20\kappa}{2(1-2\kappa)}$, 则 $\int_0^T V_2(t)dt\leqslant C_\kappa$.

最后, 对于 (4.9) 和 (4.14), 由 (1.11) 和 (5.4) 推导出

$$\begin{aligned}
\int_0^T(V_3(t)+V_4(t))dt&\lesssim\int_0^T(\langle t\rangle^{\frac{5}{4}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{2,0}}+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y w\|_{H^{2,0}}^2+\langle t\rangle^3\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2)dt\\
&\lesssim\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{-2(1-\kappa)}dt\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2 w\|_{H^{2,0}}^2dt\bigg)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+c_1\int_0^T\langle t\rangle^{-2+2\kappa}dt+\int_0^T\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_y w^s\|_{L^\infty}^2dt\\
&\lesssim C_\kappa.
\end{aligned}$$

将以上的估计式相加, 则能够找到充分大的常数 M_0, 使得对于任意 $T\leqslant T^\star$, 成立

$$\int_0^T(V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t))dt\leqslant M_0. \tag{5.6}$$

有了 (5.1) 和 (5.6) 的铺垫, 运用命题 3.1 可得, 对于任意 $T\leqslant T^\star$, 成立

$$\|\mathrm{e}^\Psi g_k\|_{L_T^\infty(L^2)}^2+\int_0^T\|\mathrm{e}^\Psi\partial_y g_k(t)\|_{L^2}^2dt\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\varepsilon^2.$$

然后, 运用命题 4.1 可得, 对于任意 $T \leqslant T^\star$, 成立

$$\begin{aligned}
&\|\langle t\rangle^{\frac{5}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\Psi}G\|^2_{L^\infty_T(H^{5,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{5}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yG(t)\|^2_{H^{5,0}}dt\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{CM_0}\bigg(\|\mathrm{e}^{\frac{y^2}{8}}G_0\|^2_{H^{5,0}}+\int_0^T\|\mathrm{e}^{\Psi}\partial_yg_k(t)\|^2_{L^2}dt\bigg)\\
&\quad\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\varepsilon^2.
\end{aligned}\tag{5.7}$$

将以上的估计代入 (4.8), 得到

$$\begin{aligned}
&\|\langle t\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{L^\infty_T(H^{4,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw(t)\|^2_{H^{4,0}}dt\\
&\quad\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\bigg(1+\mathrm{e}^{CM_0}+\mathrm{e}^{CM_0}\int_0^T\langle t\rangle^2\|(w^s+w)(t)\|^2_{L^\infty}dt\bigg)\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

但是, 由 (1.11) 和 (5.4) 可推导出

$$\int_0^T\langle t\rangle^2\|(w^s+w)(t)\|^2_{L^\infty}dt\lesssim\int_0^T(\langle t\rangle^3\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_yw^s(t)\|^2_{L^\infty_v}+\langle t\rangle^{\frac{5}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw(t)\|^2_{H^{1,0}})dt\lesssim M.$$

从而, 对于任意 $T \leqslant T^\star$, 成立

$$\|\langle t\rangle^{\frac{7}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}w\|^2_{L^\infty_T(H^{4,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{7}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw(t)\|^2_{H^{4,0}}dt\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\varepsilon^2.\tag{5.8}$$

最后, 对于任意 $T \leqslant T^\star$, 运用命题 4.3 可得

$$\begin{aligned}
&\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|^2_{L^\infty_T(H^{3,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2w(t)\|^2_{H^{3,0}}dt\\
&\quad\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\bigg(1+\mathrm{e}^{CM_0}+\mathrm{e}^{CM_0}\int_0^T\langle t\rangle^3\|\partial_y(w^s+w)(t)\|^2_{L^\infty}dt\bigg)\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

同时, 由 (5.4) 和 (1.11) 可推导出

$$\int_0^T\langle t\rangle^3\|\partial_y(w^s+w)(t)\|^2_{L^\infty}dt\lesssim\int_0^T(\langle t\rangle^3\|\mathrm{e}^{\gamma_0\Psi}\partial_yw^s(t)\|^2_{L^\infty}+\langle t\rangle^{\frac{7}{2}}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2w(t)\|^2_{H^{1,0}})dt\lesssim M.$$

总而言之, 已经证明了, 存在一个充分大的常数 C, 使得对于任意 $T \leqslant T^\star$, 成立

$$\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|^2_{L^\infty_T(H^{3,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2w(t)\|^2_{H^{3,0}}dt\leqslant C\mathrm{e}^{CM_0}\varepsilon^2.\tag{5.9}$$

特别地, 如果选取 ε 充分小, 以至于 $C\mathrm{e}^{CM_0}\varepsilon^2 \leqslant c_1$, 即 $\varepsilon \leqslant \sqrt{\frac{c_1}{C}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}CM_0}$, 则可以从 (5.9) 中推导出, 对于任意 $T \leqslant T^\star$, 成立

$$\|\langle t\rangle^{\frac{9}{4}-\kappa}\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_yw\|^2_{L^\infty_T(H^{3,0})}+\int_0^T\langle t\rangle^{\frac{9}{2}-2\kappa}\|\mathrm{e}^{\gamma\Psi}\partial_y^2w(t)\|^2_{H^{3,0}}dt\leqslant c_1,$$

这与 (5.4) 给出的 $T^\star$ 的定义相违背. 从而, 由标准的连续性讨论可知 $T^\star = +\infty$. 再结合估计式 (5.7)–(5.9) 就完成了定理 1.1 的证明. □

参考文献

1 Alexandre R, Wang Y G, Xu C J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. J Amer Math Soc, 2015, 28: 745–784

2 Bahouri H, Chemin J-Y, Danchin R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 343. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2011

3 Chemin J-Y, Zhang P. Inhomogeneous incompressible viscous flows with slowly varying initial data. J Inst Math Jussieu, 2018, 17: 1121–1172

4 Dietert H, Gérard-Varet D. Well-posedness of the Prandtl equations without any structural assumption. Ann PDE, 2019, 5: 8

5 Gérard-Varet D, Dormy E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. J Amer Math Soc, 2010, 23: 591–609

6 Gérard-Varet D, Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2015, 48: 1273–1325

7 Ignatova M, Vicol V. Almost global existence for the Prandtl boundary layer equations. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 809–848

8 Liu N, Zhang P. Global small analytic solutions of MHD boundary layer equations. J Differential Equations, 2021, 281: 199–257

9 Lombardo M C, Cannone M, Sammartino M. Well-posedness of the boundary layer equations. SIAM J Math Anal, 2003, 35: 987–1004

10 Masmoudi N, Wong T K. Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1683–1741

11 Oleinik O A. The Prandtl system of equations in boundary layer theory. Soviet Math Dokl, 1963, 4: 583–586

12 Oleinik O A, Samokhin V N. Mathematical Models in Boundary Layer Theory. Applied Mathematics and Mathematical Computation, 15. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999

13 Paicu M, Zhang P. Global existence and the decay of solutions to the Prandtl system with small analytic data. Arch Ration Mech Anal, 2021, 241: 403–446

14 Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker Kongresses. Leipzig: Teubner, 1905, 484–491

15 Sammartino M, Caflisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461

16 Wang C, Wang Y, Zhang P. On the global small solution of 2-D Prandtl system with initial data in the optimal Gevrey class. Adv Math, 2024, 440: 109517

17 Xin Z, Zhang L. On the global existence of solutions to the Prandtl's system. Adv Math, 2004, 181: 88–133

18 Xu C J, Zhang X. Long time well-posedness of Prandtl equations in Sobolev space. J Differential Equations, 2017, 263: 8749–8803

19 Zhang P, Zhang Z. Long time well-posedness of Prandtl system with small and analytic initial data. J Funct Anal, 2016, 270: 2591–2615

附录 A　关于剪切流的注释

如果剪切流的方程 (1.3) 中不含有可控力 $f(t,y)$, 则 u^s 满足方程

$$\begin{cases} \partial_t u^s - \partial_y^2 u^s = U'(t), \\ u^s|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to+\infty} u^s = U(t), \\ u^s|_{t=0} = u_0^s, \quad \text{其中 } u_0^s(0) = 0. \end{cases} \tag{A.1}$$

运用对称性的延拓, 可发现 (A.1) 的解满足如下显式表达式:

$$u^s(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\frac{(y-z)^2}{4t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(y+z)^2}{4t}}) u_0^s(z) dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t U'(s) \int_{-\frac{y}{2\sqrt{t-s}}}^{\frac{y}{2\sqrt{t-s}}} \mathrm{e}^{-z^2} dz ds. \tag{A.2}$$

记 $w^s \stackrel{\text{def}}{=} \partial_y u^s$. 由于 $u_0^s(0)=0$, 对 (A.2) 作用 ∂_y, 再分部积分, 得到

$$w^s(t,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-\frac{(y-z)^2}{4t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(y+z)^2}{4t}})w_0^s(z)dz+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{U'(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4(t-s)}}ds. \tag{A.3}$$

命题 A.1　设 $U(t)$ 是一个非增函数且 u^s 是 (A.1) 充分光滑的解. 若

$$\partial_y u^s(t,y)\geqslant 0,\quad \forall\, t\geqslant 0,\quad y\geqslant 0, \tag{A.4}$$

则有

$$U(t)\geqslant \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\int_0^1 U(s)ds,\quad 对于任意\ t\geqslant 1. \tag{A.5}$$

证明　注意到 $\int_0^{+\infty}w_0^s(y)dy=\int_0^{+\infty}\partial_y u_0^s(y)dy=U(0)-u_0^s(0)=U(0)$, 可推导出

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-\frac{(y-z)^2}{4t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(y+z)^2}{4t}})w_0^s(z)dz\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}w_0^s(z)dz=\frac{U(0)}{\sqrt{\pi t}},$$

再运用 (A.3) 和 (A.4), 可得

$$0\leqslant w^s(t,y)\leqslant\frac{U(0)}{\sqrt{\pi t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{U'(s)}{\sqrt{t-s}}ds=\frac{U(t)}{\sqrt{\pi t}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t U'(s)\left(\frac{1}{\sqrt{t-s}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)ds. \tag{A.6}$$

观察到

$$\frac{1}{\sqrt{t-s}}-\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t-s}}{\sqrt{(t-s)t}}=\frac{s}{\sqrt{(t-s)t}(\sqrt{t}+\sqrt{t-s})}\geqslant\frac{s}{2t^{\frac{3}{2}}},\quad U'(t)\leqslant 0,$$

从 (A.6) 推导出 $2tU(t)+\int_0^t sU'(s)ds\geqslant 0$. 注意到由分部积分知 $\int_0^t sU'(s)ds=tU(t)-\int_0^t U(s)ds$, 从而,

$$3tU(t)\geqslant\int_0^t U(s)ds. \tag{A.7}$$

记 $\Phi(t)\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^t U(s)ds$, 则

$$\Phi'(t)\geqslant\frac{\Phi(t)}{3t}\Rightarrow\frac{d}{dt}(t^{-\frac{1}{3}}\Phi(t))\geqslant 0,$$

这说明对于任意 $t\geqslant 1$, 都有 $\Phi(t)\geqslant t^{\frac{1}{3}}\Phi(1)$. 将以上的不等式代入到 (A.7), 可得

$$U(t)\geqslant\frac{1}{3t}\Phi(t)\geqslant\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\int_0^1 U(s)ds,\quad 对于任意\ t\geqslant 1,$$

即 (A.5) 得证. □

注 A.1　由于 $\lim_{y\to+\infty}u^s(t,y)=U(t)$, 所以在命题 A.1 的假设下, 成立 (A.5), 从而

$$\|u^s(t)\|_{L_v^\infty}\geqslant U(t)\geqslant ct^{-\frac{2}{3}},\quad 对于任意\ t\geqslant 1. \tag{A.8}$$

同时, 由于 $u^s(t,0)=0$, 所以对于任意 $\delta\in(0,1)$, 成立

$$\|u^s(t)\|_{L_v^\infty}=\left\|\int_0^y w^s(t,y')dy'\right\|_{L_v^\infty}\leqslant\left\|\int_0^y \mathrm{e}^{-\delta\Psi(t,y')}dy'\right\|_{L_v^\infty}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}w^s(t)\|_{L_v^\infty}\leqslant C_\delta\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}\|\mathrm{e}^{\delta\Psi}w^s(t)\|_{L_v^\infty}.$$

而由于 $\lim_{y\to+\infty} w^s=0$, 所以

$$\|e^{\delta\Psi}w^s(t)\|_{L^\infty_v}\leqslant\left\|e^{\delta\Psi(t,y)}\int_y^\infty e^{-\delta\Psi(t,y')}dy'\right\|_{L^\infty_v}\|e^{\delta\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L^\infty_v}\leqslant C_\delta\langle t\rangle^{\frac12}\|e^{\delta\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L^\infty_v}.$$

因此, 利用 (A.8), 可推导出对于任意 $t\geqslant1$, 成立

$$\|e^{\delta\Psi}w^s(t)\|_{L^\infty_v}\geqslant c_\delta\langle t\rangle^{-\frac12}\cdot t^{-\frac23}\geqslant c_\delta\langle t\rangle^{-\frac76}, \tag{A.9}$$

$$\|e^{\delta\Psi}\partial_y w^s(t)\|_{L^\infty_v}\geqslant c_\delta\langle t\rangle^{-\frac12}\cdot\langle t\rangle^{-\frac76}\geqslant c_\delta\langle t\rangle^{-\frac53}. \tag{A.10}$$

容易发现, 在估计 (A.10) 成立的情形下, 不可能成立 (1.11) 中要求的

$$\int_0^\infty\langle t\rangle^{4-2\kappa}\|e^{\frac{\gamma_0 y^2}{8\langle t\rangle}}\partial_y w^s(t)\|^2_{L^\infty_v}dt<\infty.$$

这启发了我们, 按照本文的研究思路, 如果不加入一个可控的外力项, Prandtl 方程 (1.1) 在单调剪切流附近的小初值也无法证明其在 Sobolev 空间中的整体适定性.

接下来计算几个无外力项演化的单调剪切流的例子, 与刚刚指出的一样, 它们的长时间衰减速率都不够满足定理 1.1 要求的 (1.10) 和 (1.11).

例 A.1 当 (A.1) 中的 $U(t)=1$ 时, 对于满足以下估计的初值:

$$C_1e^{-\frac{y^2}{4K}}\leqslant\partial_y u_0^s(y)\leqslant C_2e^{-\frac{y^2}{4K}},$$

由 (A.3) 推导出

$$C_1\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}\leqslant\partial_y u^s(t,y)\leqslant C_2\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}.$$

例 A.2 当 (A.1) 中的 $\partial_y u_0^s(y)=e^{-\frac{y^2}{4K}}$ 并且 $U(t)=\sqrt{K\pi}\langle t\rangle^{-\sigma}$ 时, 由 (A.3) 推导出

$$w^s(t,y)=\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}\left(1-\sigma\sqrt{t+K}\int_0^t\frac{\langle s\rangle^{-\sigma-1}}{\sqrt{t-s}}e^{-\frac{(s+K)y^2}{4(t-s)(t+K)}}ds\right).$$

容易观察到上式的被积函数在 $y=0$ 处取最大值, 从而

$$w^s(t,y)\geqslant\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}\left(1-\sigma\sqrt{t+K}\int_0^t\frac{\langle s\rangle^{-\sigma-1}}{\sqrt{t-s}}ds\right).$$

特别地, 当 $\sigma=\frac12$ 时, 成立

$$\int_0^t\frac{\langle s\rangle^{-\frac32}}{\sqrt{t-s}}ds=2\int_0^{\sqrt t}(\langle t\rangle-x^2)^{-\frac32}dx=2\langle t\rangle^{-1}\int_0^{\sqrt{\frac{t}{\langle t\rangle}}}(1-y^2)^{-\frac32}dy=2\frac{\sqrt t}{\langle t\rangle},$$

这给出了

$$w^s(t,y)\geqslant\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}\left(1-\sqrt{t+K}\frac{\sqrt t}{\langle t\rangle}\right)=\frac{(2-K)t+1}{\langle t\rangle(\langle t\rangle+\sqrt{t(t+K)})}\left(1+\frac tK\right)^{-\frac12}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}.$$

对于 $K=2$, 这个下界的衰减近似于 $\langle t\rangle^{-\frac52}e^{-\frac{y^2}{4(t+2)}}$. 对于 $K<2$, 它的衰减近似于 $\langle t\rangle^{-\frac32}e^{-\frac{y^2}{4(t+K)}}$. 但是, 在这种情形下, 它的上界不可能满足这样的衰减.

附录 B　g_k 满足的方程的推导

这里, 给出方程 (3.5) 的推导过程. 将 (3.2) 中第一个方程乘以 $-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}$, 然后将得到的等式与 (3.2) 中第二个方程相加便得到

$$\begin{aligned}&\partial_t\partial_x^k w-\partial_y^2\partial_x^k w+(u^s+u)\partial_x^{k+1}w-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}(\partial_t\partial_x^k u-\partial_y^2\partial_x^k u+(u^s+u)\partial_x^{k+1}u)\\&\quad=[u;\partial_x^k]\partial_x w+[\partial_y w;\partial_x^k]v-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v).\end{aligned}\tag{B.1}$$

首先处理 (B.1) 中的第二行,

$$\begin{aligned}&[u;\partial_x^k]\partial_x w+[\partial_y w;\partial_x^k]v-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\\&\quad=\partial_y([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}([u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v)\\&\quad=(w^s+w)\partial_y\bigg(\frac{[u;\partial_x^k]\partial_x u+[w;\partial_x^k]v}{w^s+w}\bigg).\end{aligned}$$

这恰好是 g_k 的方程 (3.5) 中的倒数第二项.

对于 (B.1) 中左边的项, 我们发现

$$\begin{aligned}&\partial_t\partial_x^k w-\partial_y^2\partial_x^k w+(u^s+u)\partial_x^{k+1}w-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}(\partial_t\partial_x^k u-\partial_y^2\partial_x^k u+(u^s+u)\partial_x^{k+1}u)\\&\quad=\partial_t g_k-\partial_y^2 g_k+(u^s+u)\partial_x g_k+\bigg[\partial_t-\partial_y^2+(u^s+u)\partial_x;\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg]\partial_x^k u.\end{aligned}$$

而直接计算可得

$$\begin{aligned}\bigg[\partial_t;\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg]\partial_x^k u&=\bigg(\frac{\partial_t\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\frac{\partial_t(w^s+w)}{w^s+w}\bigg)\partial_x^k u,\\-\bigg[\partial_y^2;\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg]\partial_x^k u&=\bigg(-\frac{\partial_y^3(w^s+w)}{w^s+w}+3\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\frac{\partial_y^2(w^s+w)}{w^s+w}\\&\quad-2\bigg(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg)^3\bigg)\partial_x^k u-2\bigg(\frac{\partial_y^2(w^s+w)}{w^s+w}-\bigg(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg)^2\bigg)\partial_x^k w,\\\bigg[(u^s+u)\partial_x;\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg]\partial_x^k u&=\bigg(\frac{(u^s+u)\partial_x\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}-\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\frac{(u^s+u)\partial_x(w^s+w)}{w^s+w}\bigg)\partial_x^k u.\end{aligned}$$

同时对剪切流的方程 (1.3) 作用 ∂_y, 得到

$$\begin{cases}\partial_t w^s-\partial_y^2 w^s=\partial_y f(t,y),\\ \partial_y w^s|_{y=0}=-U'(t)-f(t,0),\quad \lim\limits_{y\to+\infty}w^s=0,\\ w^s|_{t=0}=w_0^s=\partial_y u_0^s,\end{cases}\tag{B.2}$$

由此及 (3.1), 推导出

$$\bigg[\partial_t-\partial_y^2+(u^s+u)\partial_x;\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w}\bigg]\partial_x^k u$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigg(\frac{(\partial_t - \partial_y^2 + (u^s+u)\partial_x)\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} - \frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \frac{(\partial_t - \partial_y^2 + (u^s+u)\partial_x)(w^s+w)}{w^s+w} \bigg) \partial_x^k u \\
&\quad - 2\bigg(\frac{\partial_y^2(w^s+w)}{w^s+w} - \Big(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \Big)^2 \bigg) \bigg(\partial_x^k w - \frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \partial_x^k u \bigg) \\
&= \bigg(\frac{-(w^s+w)\partial_x w - \partial_y(v\partial_y(w^s+w))}{w^s+w} + \frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \frac{v\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \bigg) \partial_x^k u \\
&\quad + \bigg(\frac{\partial_y^2 f}{w^s+w} - \frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \frac{\partial_y f}{w^s+w} \bigg) \partial_x^k u - 2\partial_y \bigg(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \bigg) g_k \\
&= \bigg(\partial_y \Big(\frac{\partial_y f}{w^s+w} \Big) - \partial_x w - \partial_y \Big(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} v \Big) \bigg) \partial_x^k u - 2\partial_y \bigg(\frac{\partial_y(w^s+w)}{w^s+w} \bigg) g_k.
\end{aligned}
$$

将以上的等式代入 (B.1), 至此完成了 (3.5) 的证明.

Global stability of monotone shear flows for the 2-D Prandtl system in Sobolev spaces

Ning Liu & Ping Zhang

Abstract Given initial data that is a small perturbation to the initial value of some shear flow, which is monotonic with respect to the y variable and decays sufficiently fast at large time, we prove the global well-posedness of the two-dimensional Prandtl system in Sobolev spaces. The main idea of the proof is to combine the non-linear cancelation property that was proposed by Masmoudi and Wong (2015) with the good quantity that was introduced by Paicu and Zhang (2021) which leads to a faster large-time decay estimate of the solution. The reason why we add a force term in the shear flow equation is that there does not exist any monotonic shear flow with such large-time decay rates as required by our assumption.

Keywords **Prandtl system, well-posedness, Sobolev space, energy method**

MSC(2020) **35Q35, 76D10**

doi: 10.1360/SSM-2023-0011