单变量空间自回归测量误差模型的参数估计

献给方开泰教授 80 华诞

何晓群^{1,2}, 胡小宁^{2,3*}

1. 安康学院数学与统计学院, 安康 725000;

2. 中国人民大学应用统计科学研究中心, 北京 100872;

3. 西北农林科技大学理学院, 杨凌 712100

E-mail: hxq00@263.net, huxn86@nwafu.edu.cn

收稿日期: 2019-04-29; 接受日期: 2019-06-15; 网络出版日期: 2020-04-29; * 通信作者

摘要 本文在经典的空间自回归模型中引入测量误差, 从只有一个自变量入手, 构建单变量空间自回归测量误差模型, 探讨自变量存在的测量误差对空间自回归模型的影响, 建立单变量空间自回归测量误差模型的参数估计方法和算法, 通过数值模拟验证估计方法的可行性和可靠性.

关键词 空间自回归模型 测量误差模型 参数估计

MSC (2010) 主题分类 62H11, 91B72, 62F10

1 引言

与普通的计量经济学模型相比, 空间计量模型引入了空间依赖的概念, 空间依赖关系可以通过空间权重矩阵 W 来表示. 假设待研究区域为 $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 W 为 $n \times n$ 的矩阵. 空间权重矩阵 W 的构建一般有两类方法^[1]: 一是根据区域是否相邻进行判断, 若区域 D_i 和 D_j 相邻 ($i \neq j$), 则 $W_{ij} = 1$, 否则 $W_{ij} = 0$; 区域 D_i 和自身不相邻, 即 $W_{ii} = 0$. 区域是否相邻有车临近 (rook contiguity)、象临近 (bishop contiguity) 和王后临近 (queen contiguity) 三种判别方法. 二是把区域 D_i 和 D_j 的距离的倒数作为 W_{ij} , 这种方法需要确定区域的中心位置, 可以是几何中心、经济中心或人口中心等. 空间权重矩阵 W 通常需要作行标准化处理.

空间计量分析中还引入了空间依赖强度参数 ρ , 用来描述观测值之间所有依赖关系的平均水平, 它是根据空间自回归结构获得的, 也称为空间自相关系数, 且 $1/\lambda_{\min} < \rho < 1/\lambda_{\max}$, 其中 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别为空间权重矩阵的最小特征根和最大特征根^[2]. 空间相关性是否存在可以通过 Moran 指数进行检验 (参见文献 [3]).

英文引用格式: He X Q, Hu X N. Parameter estimation of univariate spatial autoregressive models with measurement errors (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 613–628, doi: 10.1360/N012019-00116

Anselin^[4] 总结了经典空间回归模型的一般形式

$$\begin{cases} y = \rho W y + X\beta + \varepsilon, \\ \varepsilon = \lambda W^* \varepsilon + \mu, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\mu \sim N(0, \Omega)$, ρ 和 λ 为空间自相关系数, W 和 W^* 为空间权重矩阵. 若假设 μ_i 独立同分布, 则 Ω 可以简化为对角元素为 σ^2 、其余元素全为 0 的对角阵. y 、 ε 和 μ 是 $n \times 1$ 的向量, X 是 $n \times k$ 的矩阵, W 和 W^* 为 $n \times n$ 的矩阵.

(1) 若 $\rho = 0$, $\lambda = 0$, 则

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (1.2)$$

称为经典的线性回归模型.

(2) 若 $\lambda = 0$, 则

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon \quad (1.3)$$

称为空间自回归模型 (spatial autoregressive model, SAR), 或称为混合回归 - 空间自回归模型 (mixed regressive-spatial autoregressive model).

(3) 若 $\rho = 0$, 则

$$\begin{cases} y = X\beta + \varepsilon, \\ \varepsilon = \lambda W^* \varepsilon + \mu \end{cases} \quad (1.4)$$

称为空间误差模型 (spatial error model, SEM).

(4) 若 $\lambda = 0$, $\beta = 0$, 则

$$y = \rho W y + \varepsilon \quad (1.5)$$

称为空间滞后模型 (spatial lag model, SLM).

(5) 若 SAR 模型中解释变量也包含自回归项, 则

$$y = \rho W y + X\beta + \gamma W X + \varepsilon \quad (1.6)$$

称为空间 Durbin 模型 (spatial Durbin model, SDM).

LeSage 和 Pace^[5] 从数据生成的角度详细解释了上述各种回归模型产生的动因, 一个更加一般的空间模型的形式为

$$\begin{cases} y = \rho W_1 y + X\beta_1 + W_3 X\beta_2 + \varepsilon, \\ \varepsilon = \lambda W_2 \varepsilon + \theta W_4 u + u, \end{cases} \quad (1.7)$$

称为一般空间模型 (general spatial model, GSM). 上述各种模型都是 GSM 的特殊形式.

经济学、流行病学、农业、林业和采矿业等几乎所有领域的测量数据都会出现测量误差. 经典的统计学方法在对观测数据进行建模时, 为了便于分析计算的需要, 往往会忽略观测数据的测量误差, 认为自变量是精确测量的固定值. 然而, 在统计建模中, 若数据存在测量误差却在分析时不加考

虑, 则分析所得的结果会受到很大的影响, 建模得出的回归系数估计值会比真实值偏小. 测量误差模型 (measurement error models, 或 errors-in-variables models) 就是充分考虑观测数据存在的测量误差对建模的影响, 进而对原始模型的参数估计过程进行纠偏的统计分析方法^[6,7].

测量误差模型最早出现在文献 [8,9] 中. 近年来, 测量误差模型取得了很大的发展, Fuller^[10] 的著作对前人关于测量误差模型的研究进行了系统的梳理和总结, Carroll 等^[11] 对非线性测量误差模型及其参数估计问题进行了详细描述, Buonaccorsi^[12] 对测量误差模型最新的发展进行了阐述. 国内学者对测量误差模型的研究也取得了很大的成果. 崔恒建^[13] 对测量误差模型作了较为详细的介绍, 使得越来越多的人对测量误差模型有所认识. 测量误差模型的一般形式为

$$\begin{cases} \psi = f(\xi, \beta) + \varepsilon, \\ X = g(\xi, \delta), \\ Y = h(\psi, \zeta), \end{cases} \quad (1.8)$$

其中, 自变量和因变量观测值 X 、 Y 是含有测量误差 δ 和 ζ 的, 而其真值 ξ 和 ψ 往往难以测量得到. 本文只考虑自变量含有测量误差、因变量不含有测量误差的情形, 即

$$\begin{cases} Y = f(\xi, \beta) + \varepsilon, \\ X = g(\xi, \delta). \end{cases} \quad (1.9)$$

对于观测值 (X_i, Y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 单变量线性测量误差模型可以表示为

$$\begin{cases} Y_i = \alpha + \beta\xi_i + \varepsilon_i, & \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \\ X_i = \xi_i + \delta_i, & \delta_i \sim N(0, \sigma_\delta^2), \end{cases} \quad (1.10)$$

其可以声明两种关系:

(1) 线性函数关系: 若 ξ_i 是固定的未知参数, 各个 ε_i 和 δ_i 是独立的, 则称 (1.10) 为函数型测量误差模型.

(2) 线性结构关系: 若 $\xi_i \sim N(\mu_\xi, \sigma_\xi^2)$ 为独立同分布的随机变量, 则称 (1.10) 为结构型测量误差模型.

对于线性结构关系测量误差模型, 假设 ξ_i 、 δ_i 和 ε_i 之间相互独立, 则有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y, \xi) &= E(Y\xi) - E(Y)E(\xi) = E[(\alpha + \beta\xi + \varepsilon)\xi] - \mu_Y\mu_\xi \\ &= \alpha E(\xi) + \beta E(\xi^2) + E(\varepsilon\xi) - \mu_Y\mu_\xi \\ &= \alpha\mu_\xi + \beta(\sigma_\xi^2 - \mu_\xi^2) - \mu_\xi(\alpha + \beta\mu_\xi) \\ &= \beta\sigma_\xi^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y, X) &= E(YX) - E(Y)E(X) = E[Y(\xi + \delta)] - E(Y)E(\xi + \delta) \\ &= E(Y\xi) + E(Y\delta) - E(Y)E(\xi) = \sigma_{Y\xi}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

对于观测值 (X_i, Y_i) , 我们真正想要得到的回归模型应该是 Y 关于 ξ 的回归方程, 参数 β 的估计值记为 $\hat{\beta}$. 如果不考虑 X 含有测量误差的事实而直接作回归, 得到的 β 的估计值记为 $\hat{\beta}_{\text{naive}}$, 则

$$\hat{\beta}_{\text{naive}} = \frac{L_{YX}}{L_{XX}} = \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_{Y\xi}}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2} = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\delta^2} \beta. \quad (1.13)$$

我们发现

$$E(\hat{\beta}_{\text{naive}}) = \frac{\sigma_{\xi}^2}{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\delta}^2} \beta \quad (1.14)$$

当且仅当 $\sigma_{\delta}^2 = 0$ 即不存在测量误差时, $E(\hat{\beta}_{\text{naive}}) = \beta$, 这与 X 存在测量误差的事实不符. 因此, 当自变量的观测值含有测量误差时, 在建模过程中不考虑测量误差的影响而直接进行数据分析, 所得的参数估计值是有偏的, 并且小于参数的真值, 且随着测量误差的加大, $\hat{\beta}_{\text{naive}}$ 逐渐趋于 0.

在空间计量领域, 也会遇到经济数据存在测量误差的问题, 在建模时, 应该充分考虑测量误差对空间计量模型的影响. 如果空间回归模型中自变量存在测量误差, 在建模过程中不加考虑而直接使用普通空间回归模型对原始数据进行分析, 所得的结果同样是有偏的. 然而, 对空间计量模型中测量误差进行分析的文献十分少见.

Anselin 和 Lozano-Gracia^[14] 在研究房价的影响因素时建立了空间自回归模型, 并引入了空气质量作为工具变量进行参数估计. 该文献指出工具变量虽然存在测量误差, 但由于测量误差与空间自回归模型的回归误差相互独立, 因此, 不影响模型的参数估计效果. 虽然该文献提到了测量误差, 但并不是模型自变量存在测量误差, 也就是说该文献没有考虑自变量测量误差的问题.

张征宇和朱平芳^[15] 指出, 当空间自回归模型的因变量存在测量误差时, 不管测量误差与空间自回归模型的误差项是否相关, 用普通极大似然估计所得的参数估计值是不相合的. 但文章中并没有涉及自变量带有测量误差的问题.

以上两篇文献是作者能找到的空间自回归模型中提到测量误差的仅有的文献, 但都没有涉及自变量存在测量误差的情形, 对自变量含有测量误差的空间计量模型至今仍没有相关的研究成果. 因此, 本文将把自变量含有测量误差的情形引入到空间计量模型中, 针对空间自回归模型, 讨论单个自变量存在测量误差对其参数估计的影响, 并建立单变量空间自回归测量误差模型的参数估计方法.

2 单变量空间自回归测量误差模型

2.1 模型的构建

本文的研究对象为 n 组观测值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 将其写成向量的形式为 (X, Y) , $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 若 Y 含有空间依赖关系, 通常采用空间自回归模型进行研究:

$$Y = \rho WY + a1_n + bX + \varepsilon, \quad (2.1)$$

其中, $\varepsilon \sim N(0, \Sigma_{\varepsilon\varepsilon})$, $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$, I_n 为 n 阶单位矩阵; 1_n 为元素全为 1 的 n 维列向量.

(2.1) 为经典的空间自回归模型, 此处只含有一个自变量, 故称之为单变量空间自回归模型 (univariate spatial autoregressive model, USAR), X 为可以获得准确测量的固定值, 然而在实践中, 对 X 的测量或多或少都会存在误差, 即

$$X = \eta + \delta, \quad (2.2)$$

其中, $\delta \sim N(0, \Sigma_{\delta\delta})$, $\Sigma_{\delta\delta} = \sigma_{\delta}^2 I_n$. 也就是说, η 为我们研究对象的真实值, 往往无法获得, 我们得到的是存在测量误差的观测值 X . (2.1) 是 Y 关于 X (观测值) 的空间自回归, 而我们真正想要得到的是 Y 关于 η (真值) 的空间自回归, 根据 (2.1) 估计出来的参数值是有偏的, 不能够真实地反映出 Y 与 X 之间的关系.

考虑到 X 含有测量误差 (本文不考虑 Y 含有测量误差的情形), 应该建立空间自回归测量误差模型:

$$\begin{cases} Y = \rho WY + a1_n + b\eta + \varepsilon, \\ X = \eta + \delta, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中, $\varepsilon \sim N(0, \Sigma_{\varepsilon\varepsilon})$, $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$. (2.3) 称为单变量空间自回归测量误差模型 (univariate spatial autoregressive model with measurement error, USARME).

2.2 参数估计

2.2.1 参数可识别条件

对于普通的单变量线性测量误差模型, 为了使其参数能够被识别, Cheng 和 Van Ness^[16] 总结了 6 种假设条件. 按照 Cheng 和 Van Ness 的方式, 如果 η 为固定的常量或者服从均值为 μ_{η} 、协方差阵为 $\sigma_{\eta}^2 I_n$ 的正态分布, 相应地给出 USARME 参数可识别的条件:

- (1) 误差方差比 $\lambda = \sigma_{\delta}^2 / \sigma_{\varepsilon}^2$ 已知;
- (2) 可信度 (reliability ratio) $\kappa = \sigma_{\eta}^2 / \sigma_X^2 = \sigma_{\eta}^2 / (\sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\delta}^2)$ 已知;
- (3) σ_{δ}^2 已知;
- (4) σ_{ε}^2 已知;
- (5) σ_{δ}^2 和 σ_{ε}^2 均已知;
- (6) 常数项 a 已知且 $E(X) \neq 0$.

在研究中, 根据实际需要确定不同的假设形式. 假设 (1) 经常出现在可加测量误差模型中, 也已经获得了很多理论结果; 假设 (2) 通常用在社会科学、心理学和遗传学文献中; 近年来, 假设 (3) 越来越多地出现在文献中, 尤其是在非线性测量误差模型研究中应用广泛; 假设 (4) 应用最少, 只能用于含有一个自变量的情形, 当存在多个自变量时模型不可识别; 假设 (5) 可以得出与假设 (1) 相同的结果; 假设 (6) 只能用于单个自变量的情形. 本文将在假设条件 (1) 的情形下, 对 USARME 进行参数估计.

2.2.2 参数估计

首先对 (2.3) 作以下假设:

- (1) X_i 与 Y_i 之间相互独立, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (2) ε_i 与 δ_i 之间相互独立, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (3) η_i 为固定的未知常数, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (4) $\sigma_{\delta}^2 = \lambda \sigma_{\varepsilon}^2$, 其中 λ 是固定和已知的.

参数估计的目标是 (2.3) 中的 ρ 、 a 、 b 、 σ_{ε}^2 和 σ_{δ}^2 .

由 (2.3) 可得

$$(I_n - \rho W)Y = a1_n + b\eta + \varepsilon, \quad (2.4)$$

令

$$A = (I_n - \rho W), \quad (2.5)$$

则

$$AY = a1_n + b\eta + \varepsilon. \quad (2.6)$$

令

$$e = \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}[AY - (a1_n + b\eta)], \quad (2.7)$$

$$AY = B, \quad (2.8)$$

则 Y 的概率密度函数可写为

$$\begin{aligned} f(y) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} A| \exp \left\{ -\frac{e^T e}{2} \right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_{\varepsilon}^{-n} |A| \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n [B_i - (a + b\eta_i)]^2}{2\sigma_{\varepsilon}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

X 的概率密度函数可写为

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_{\delta}^{-n} \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \eta_i)^2}{2\sigma_{\delta}^2} \right\}. \quad (2.10)$$

由于

$$\sigma_{\delta}^2 = \lambda \sigma_{\varepsilon}^2, \quad (2.11)$$

因此,

$$f(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \lambda^{\frac{n}{2}} \sigma_{\delta}^{-n} |A| \exp \left\{ -\frac{\lambda \sum_{i=1}^n [B_i - (a + b\eta_i)]^2}{2\sigma_{\delta}^2} \right\}, \quad (2.12)$$

所以, X 和 Y 的联合似然可写为

$$\begin{aligned} L(\rho, a, b, \eta_1, \dots, \eta_n, \sigma_{\delta}^2 | (x, y)) &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\sigma_{\delta}^2)^n} |A| \exp \left\{ -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \eta_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n [B_i - (a + b\eta_i)]^2}{2\sigma_{\delta}^2} \right\} \\ &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\sigma_{\delta}^2)^n} |A| \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \eta_i)^2 + \lambda [B_i - (a + b\eta_i)]^2}{2\sigma_{\delta}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

接下来对 (2.13) 进行极大化, 可以分为以下 6 个步骤进行.

(1) 首先对于固定的 ρ 、 a 、 b 和 σ_{δ}^2 , 要关于 $\eta_1, \dots, \eta_n$ 极大化 L . 我们极小化

$$g(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \eta_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n [B_i - (a + b\eta_i)]^2, \quad (2.14)$$

令

$$\frac{\partial g(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i} = -2(x_i - \eta_i) - 2b\lambda[B_i - (a + b\eta_i)] = 0, \quad (2.15)$$

得

$$\eta_i = \frac{x_i + \lambda b(B_i - a)}{1 + \lambda b^2}, \quad (2.16)$$

并且

$$\frac{\partial^2 g(\eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial \eta_i^2} = 2(1 + b^2 \lambda) > 0. \quad (2.17)$$

因此, 对于每个 i , 当 $\eta_i = \frac{x_i + \lambda b(B_i - a)}{1 + \lambda b^2}$ 时, (2.14) 达到最小值. 代回 (2.14) 得

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \eta_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^n [B_i - (a + b\eta_i)]^2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (a + bx_i)]^2. \quad (2.18)$$

关于 $\eta_1, \dots, \eta_n$ 最大化后的似然函数为

$$\begin{aligned} & \max_{\eta_1, \dots, \eta_n} L(\rho, a, b, \eta_1, \dots, \eta_n, \sigma_\delta^2 | (x, y)) \\ &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\sigma_\delta^2)^n} |A| \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \left[\frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (a + bx_i)]^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

(2) 现在固定 ρ 和 σ_δ^2 的值, 关于 a 和 b 对似然函数 (2.19) 进行极大化, 只需要对其指数上

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (a + bx_i)]^2 \quad (2.20)$$

进行极小化. 对于固定的 b , $\frac{\lambda}{1 + \lambda b^2}$ 为一常数, $\sum_{i=1}^n [B_i - (a + bx_i)]^2$ 的最小值在

$$\hat{a} = \bar{B} - b\bar{x} \quad (2.21)$$

处取得, 代回 (2.20) 后, 即

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} \sum_{i=1}^n [(B_i - \bar{B}) - b(x_i - \bar{x})]^2. \quad (2.22)$$

定义

$$L_{BB} = \sum_{i=1}^n (B_i - \bar{B})^2, \quad (2.23)$$

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.24)$$

$$L_{xB} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(B_i - \bar{B}), \quad (2.25)$$

则 (2.22) 变为

$$g(b) = \frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} [L_{BB} - 2bL_{xB} + b^2L_{xx}]. \quad (2.26)$$

$g(b)$ 关于 b 求一阶导数为

$$\frac{dg(b)}{db} = -\frac{2\lambda^2 b}{(1 + \lambda b^2)^2} (L_{BB} - 2L_{xB}b + L_{xx}b^2) + \frac{\lambda}{1 + \lambda b^2} (-2L_{xB} + 2L_{xx}b). \quad (2.27)$$

由于 $1 + \lambda b^2 \neq 0$, 令 $\frac{dg(b)}{db} = 0$, 得到

$$b^* = \frac{-(L_{xx} - \lambda L_{BB}) \pm \sqrt{(L_{xx} - \lambda L_{BB})^2 + 4\lambda L_{xB}^2}}{2\lambda L_{xB}}, \quad (2.28)$$

而只有当 b^* 分子上取 “+” 时, 才能满足 $\frac{d^2g(b)}{db^2} > 0$. 所以, (2.26) 的最小值在

$$\hat{b} = \frac{-(L_{xx} - \lambda L_{BB}) + \sqrt{(L_{xx} - \lambda L_{BB})^2 + 4\lambda L_{xB}^2}}{2\lambda L_{xB}} \quad (2.29)$$

处取得. 因此, 关于 $a, b, \eta_1, \dots, \eta_n$ 最大化后, 似然函数变为

$$\begin{aligned} & \max_{a, b, \eta_1, \dots, \eta_n} L(\rho, a, b, \eta_1, \dots, \eta_n, \sigma_\delta^2 \mid (x, y)) \\ &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\sigma_\delta^2)^n} |A| \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

(3) 对于固定的 ρ 关于 σ_δ^2 极大化 L , 则 σ_δ^2 的极大似然估计过程如下: 对 (2.30) 取对数

$$l(\sigma_\delta^2) = n \ln \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} + \ln |A| - n \ln \sigma_\delta^2 - \frac{1}{2\sigma_\delta^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2, \quad (2.31)$$

令

$$\frac{\partial l(\sigma_\delta^2)}{\partial (\sigma_\delta^2)} = -\frac{n}{\sigma_\delta^2} + \frac{1}{2(\sigma_\delta^2)^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 = 0, \quad (2.32)$$

得

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{1}{2n} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2, \quad (2.33)$$

则关于 $a, b, \sigma_\delta^2, \eta_1, \dots, \eta_n$ 最大化后, 似然函数变为

$$\begin{aligned} & \max_{a, b, \sigma_\delta^2, \eta_1, \dots, \eta_n} L(\rho, a, b, \eta_1, \dots, \eta_n, \sigma_\delta^2 \mid (x, y)) \\ &= \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\hat{\sigma}_\delta^2)^n} |A| \exp \left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}_\delta^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

(4) 现在关于 ρ 极大化 L .

对 (2.34) 取对数

$$l = \ln L = -n \ln \frac{2\pi\hat{\sigma}_\delta^2}{\sqrt{\lambda}} + \ln |A| - \frac{1}{2\hat{\sigma}_\delta^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda \hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2, \quad (2.35)$$

将 (2.33) 代入 (2.35), 得

$$l = -n \ln \left\{ \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{n(1 + \lambda \hat{b}^2)} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 \right\} + \ln |A| - n. \quad (2.36)$$

Anselin 和 Florax^[2] 指出, ρ 的取值范围为 $1/t_{\min} < \rho < 1/t_{\max}$, 其中 $t_{\min}$ 和 $t_{\max}$ 分别为空间权重矩阵 W 的最小特征根和最大特征根. 因此, 对于 (2.36) 的最大化问题, 可以转化为带约束的单变量最优化问题来解决, 即

$$\begin{aligned} \max l &= -n \ln \left\{ \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{n(1+\lambda\hat{b}^2)} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 \right\} + \ln |A| - n, \\ \text{s.t. } \frac{1}{t_{\min}} &< \rho < \frac{1}{t_{\max}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

其中, A 、 B 、 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 都是 ρ 的函数, 它们的表达式分别为 (2.5)、(2.7)、(2.21) 和 (2.29). 该最大化过程很容易在常用的数值计算软件中得到实现.

(5) $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ 的值.

根据极大似然估计的性质, 由 (2.11) 和 (2.33) 可得

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{\lambda} \hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{1}{2n} \frac{1}{1+\lambda\hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2. \quad (2.38)$$

(6) $\hat{\eta}_i$ 的值.

通常情形下我们对于 $\hat{\eta}_i$ 的值并不关注, 但如果希望作预报, 则它就有用了. 此外, 在考察拟合的充分性时, $\hat{\eta}_i$ 的值也是有用的. 可以将 (2.3) 写为

$$\begin{bmatrix} B_i - a \\ X_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} \eta_i + \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \delta_i \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

其中, $B = AY = (I_n - \rho W)Y$. 在上述步骤中, 已经得到 ρ 、 a 、 b 、 σ_δ^2 和 σ_ε^2 的估计值 $\hat{\rho}$ 、 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 、 $\hat{\sigma}_\delta^2$ 和 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, 将 (2.39) 看作普通的回归模型, 则可以得到 $\hat{\eta}_i$ 的广义最小二乘估计为

$$\hat{\eta}_i = [(\hat{b}, 1)\hat{\Sigma}_{\varepsilon\delta}^{-1}(\hat{b}, 1)^T]^{-1}(\hat{b}, 1)\hat{\Sigma}_{\varepsilon\delta}^{-1}(\hat{B}_i - \hat{a}, x_i)^T, \quad (2.40)$$

其中 $\Sigma_{\varepsilon\delta}$ 为 $(\varepsilon_i, \delta_i)$ 的协方差阵, 由于 $\varepsilon \sim N(0, \Sigma_{\varepsilon\varepsilon})$, $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$, $\delta \sim N(0, \Sigma_{\delta\delta})$, $\Sigma_{\delta\delta} = \sigma_\delta^2 I_n$ 且 ε_i 和 δ_i 之间相互独立, 则 $\hat{\Sigma}_{\varepsilon\delta} = \text{diag}(\hat{\sigma}_\varepsilon^2, \hat{\sigma}_\delta^2)$. 从而,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i &= (\hat{b}^2 \hat{\sigma}_\delta^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2)^{-1} [\hat{\sigma}_\delta^2 (\hat{B}_i - \hat{a}) \hat{b} + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 x_i] \\ &= \frac{\lambda \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (\hat{B}_i - \hat{a}) \hat{b} + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 x_i}{\lambda \hat{b}^2 \hat{\sigma}_\varepsilon^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2} \\ &= \frac{x_i + \lambda \hat{b} (\hat{B}_i - \hat{a})}{1 + \lambda \hat{b}^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

其实, (2.41) 就是上述求极大似然过程第 (1) 步中使似然函数取到最大值的 η_i , 即 (2.16).

2.2.3 算法描述

根据第 2.2.2 小节中的描述, 可以得到单变量空间自回归测量误差模型的参数估计过程:

- (1) 计算空间权重矩阵 W 的最小特征根 $t_{\min}$ 和最大特征根 $t_{\max}$;
- (2) 寻找 ρ 的值, 使得 $l = -n \ln \left\{ \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{n(1+\lambda\hat{b}^2)} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2 \right\} + \ln |A| - n$ 最大化, 其中 $1/t_{\min} < \rho < 1/t_{\max}$, $\hat{b} = \frac{-(L_{xx} - \lambda L_{BB}) + \sqrt{(L_{xx} - \lambda L_{BB})^2 + 4\lambda L_{xB}^2}}{2\lambda L_{xB}}$, $\hat{a} = \bar{B} - \hat{b}\bar{x}$, $A = (I_n - \rho W)$, $B = AY$;
- (3) 根据第 (2) 步求得的 ρ 的值, 分别计算 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$ 、 $\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{1}{2n} \frac{\lambda}{1+\lambda\hat{b}^2} \sum_{i=1}^n [B_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)]^2$ 和 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{\lambda} \hat{\sigma}_\delta^2$.

2.2.4 参数比较

如果不考虑测量误差, 对于空间自回归模型 (2.1), Anselin^[4] 给出了其参数的极大似然估计值

$$\hat{a}_{\text{SAR}} = \bar{B} - \hat{b}_{\text{SAR}}\bar{x}, \quad (2.42)$$

$$\hat{b}_{\text{SAR}} = \frac{L_{xy} - \rho L_{x\tilde{y}}}{L_{xx}}, \quad (2.43)$$

其中, $\tilde{y} = Wy$. 容易验证:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{b} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-(L_{xx} - \lambda L_{BB}) + \sqrt{(L_{xx} - \lambda L_{BB})^2 + 4\lambda L_{xB}^2}}{2\lambda L_{xB}} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{L_{BB} + [(L_{xx} - \lambda L_{BB})^2 + 4\lambda L_{xB}^2]^{-\frac{1}{2}} [-(L_{xx} - \lambda L_{BB})L_{BB} + 2L_{xB}^2]}{2L_{xB}} \\ &= \frac{L_{BB} - L_{xx}^{-1}(-L_{xx}L_{BB} + 2L_{xB}^2)}{2L_{xB}} = \frac{L_{xB}}{L_{xx}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(B_i - \bar{B})}{L_{xx}} = \frac{(X - \bar{X})^T (B - \bar{B})}{L_{xx}} = \frac{(X - \bar{X})^T (I_n - \rho W)(Y - \bar{Y})}{L_{xx}} \\ &= \frac{(X - \bar{X})^T (Y - \bar{Y}) - \rho (X - \bar{X})^T W(Y - \bar{Y})}{L_{xx}} \\ &= \frac{L_{xy} - \rho L_{x\tilde{y}}}{L_{xx}} = \hat{b}_{\text{SAR}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

因此, 当 X 存在测量误差时, 不能简单地使用空间自回归模型 (2.1) 进行建模, 这样得出的参数是有偏的, 不能正确地反映解释变量与被解释变量之间的关系, 应该采用空间自回归测量误差模型来进行建模.

3 数值模拟

3.1 数据生成

根据 (2.3) 和 (2.11) 生成数据, 其中, $a = 2$, $b = 5$, $\rho = 0.85$, $\sigma_\varepsilon^2 = 1$, λ 的取值分别为 0.01、0.5、1、1.5、2、5 和 10. 样本量 n 分别取值 50、100、200 和 500, 模拟次数为 500 次. 空间权重矩阵 W 采用 Su 和 Yang^[17] 的方法生成.

3.2 模拟结果

根据上述生成的数据, 分别采用单变量空间自回归测量误差模型 (USARME) 和不考虑测量误差的普通单变量空间自回归模型 (USAR) 进行模拟, 模拟结果见表 1. 表中给出了 USARME 和 USAR 的 ρ 、 a 、 b 和 R^2 值, $R^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$. 其中, 不带括号的数值为 500 次模拟参数 (θ) 估计的平均值, 即 $\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} \hat{\theta}_i$, ρ 、 a 、 b 中带括号的数值为 500 次模拟参数的均方误差 $\sqrt{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}$; R^2 中带括号的数值为 500 次模拟所得 R^2 值的标准差. 定义参数估计值偏离真值程度的偏离系数 $r_1 = |\hat{\theta} - \theta|/\theta$, 偏离真值程度的变异系数 r_2 为均方误差与真值的比值, 即

$$r_2 = \frac{\sqrt{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}}{\theta}.$$

表 1 不同条件下 USARME 与 USAR 的参数估计结果

λ	n	USARME				USAR			
		ρ	a	b	R^2	ρ	a	b	R^2
0.01	50	0.85	1.934	5.009	0.986	0.847	2.891	4.994	0.980
		(0.00002)	(0.757)	(0.098)	(0.008)	(0.019)	(4.845)	(0.103)	(0.011)
	100	0.85	1.832	5.022	0.987	0.848	2.531	5.006	0.981
		(0.00001)	(0.545)	(0.071)	(0.006)	(0.012)	(3.076)	(0.072)	(0.008)
	200	0.85	1.858	5.019	0.988	0.849	2.168	5.001	0.981
		(0.00001)	(0.411)	(0.054)	(0.004)	(0.007)	(1.863)	(0.052)	(0.006)
	500	0.85	1.853	5.019	0.988	0.849	2.123	5.001	0.981
		(0.000006)	(0.279)	(0.037)	(0.002)	(0.005)	(1.136)	(0.033)	(0.004)
0.1	50	0.85	1.545	5.062	0.988	0.846	3.176	4.979	0.976
		(0.00002)	(0.970)	(0.128)	(0.001)	(0.020)	(5.066)	(0.121)	(0.014)
	100	0.85	1.525	5.063	0.988	0.848	2.561	4.980	0.976
		(0.000015)	(0.789)	(0.104)	(0.001)	(0.013)	(3.295)	(0.089)	(0.011)
	200	0.85	1.549	5.059	0.988	0.849	2.436	4.975	0.976
		(0.000012)	(0.614)	(0.081)	(0.001)	(0.009)	(2.246)	(0.062)	(0.007)
	500	0.85	1.538	5.061	0.988	0.850	2.342	4.977	0.976
		(0.000001)	(0.529)	(0.070)	(0.0004)	(0.005)	(1.323)	(0.042)	(0.005)
0.5	50	0.85	1.597	5.057	0.989	0.830	11.099	4.504	0.877
		(0.00006)	(2.065)	(0.273)	(0.001)	(0.050)	(14.707)	(0.552)	(0.069)
	100	0.85	1.640	5.049	0.989	0.841	8.175	4.480	0.874
		(0.00004)	(1.486)	(0.196)	(0.0004)	(0.031)	(9.674)	(0.549)	(0.050)
	200	0.85	1.594	5.053	0.989	0.846	7.026	4.478	0.875
		(0.00004)	(1.073)	(0.142)	(0.0002)	(0.018)	(6.660)	(0.534)	(0.035)
	500	0.85	1.670	5.045	0.989	0.849	6.327	4.468	0.876
		(0.00003)	(0.724)	(0.096)	(0.0002)	(0.011)	(5.153)	(0.537)	(0.023)
1	50	0.85	1.842	5.026	0.989	0.815	23.094	3.411	0.658
		(0.00013)	(4.163)	(0.544)	(0.001)	(0.077)	(27.714)	(1.618)	(0.148)
	100	0.85	2.016	5.003	0.988	0.833	18.532	3.392	0.656
		(0.00011)	(2.737)	(0.357)	(0.0004)	(0.046)	(19.935)	(1.624)	(0.120)
	200	0.85	2.095	4.991	0.989	0.841	16.615	3.380	0.663
		(0.0001)	(1.798)	(0.237)	(0.0002)	(0.029)	(16.208)	(1.626)	(0.091)
	500	0.85	1.875	5.020	0.989	0.847	14.985	3.385	0.661
		(0.00009)	(1.194)	(0.158)	(0.0002)	(0.019)	(13.819)	(1.618)	(0.053)
1.5	50	0.85	1.657	5.063	0.987	0.799	34.336	2.463	0.460
		(0.00027)	(6.280)	(0.829)	(0.001)	(0.097)	(38.897)	(2.557)	(0.210)
	100	0.85	2.140	4.985	0.988	0.825	27.789	2.428	0.474
		(0.00023)	(4.378)	(0.578)	(0.0004)	(0.056)	(28.962)	(2.582)	(0.144)
	200	0.85	2.189	4.975	0.988	0.840	23.992	2.410	0.470
		(0.00021)	(3.181)	(0.417)	(0.0003)	(0.033)	(23.484)	(2.594)	(0.109)

续表

λ	n	USARME				USAR			
		ρ	a	b	R^2	ρ	a	b	R^2
2	500	0.85	2.340	4.960	0.989	0.846	22.391	2.411	0.472
		(0.00018)	(1.774)	(0.232)	(0.0002)	(0.020)	(20.986)	(2.591)	(0.072)
	50	0.85	1.083	5.145	0.987	0.795	41.098	1.731	0.328
		(0.00052)	(9.907)	(1.313)	(0.001)	(0.103)	(45.297)	(3.284)	(0.205)
	100	0.85	2.388	4.957	0.986	0.821	33.967	1.739	0.344
		(0.00041)	(5.586)	(0.720)	(0.0004)	(0.062)	(35.053)	(3.267)	(0.163)
	200	0.85	2.286	4.976	0.988	0.835	30.728	1.714	0.336
		(0.00038)	(3.912)	(0.518)	(0.0003)	(0.042)	(30.473)	(3.290)	(0.115)
5	500	0.85	2.719	4.912	0.989	0.845	27.942	1.712	0.333
		(0.00034)	(2.565)	(0.335)	(0.0002)	(0.022)	(26.554)	(3.289)	(0.075)
	50	0.836	8.249	4.319	0.988	0.781	54.805	0.394	0.094
		(0.064)	(40.390)	(4.469)	(0.001)	(0.118)	(58.663)	(4.610)	(0.136)
	100	0.846	1.303	5.586	0.988	0.816	45.493	0.39	0.081
		(0.012)	(33.371)	(4.445)	(0.001)	(0.070)	(46.416)	(4.612)	(0.111)
	200	0.847	1.672	5.139	0.989	0.832	41.229	0.387	0.072
		(0.009)	(27.106)	(4.109)	(0.001)	(0.045)	(40.674)	(4.614)	(0.078)
	500	0.848	4.342	4.761	0.989	0.843	38.503	0.385	0.076
		(0.002)	(6.471)	(0.847)	(0.0003)	(0.024)	(37.017)	(4.615)	(0.054)

表 1 的模拟结果表明:

(1) 从整体上来看, 当 X 含有测量误差时, USARME 比 USAR 估计效果要好, 随着测量误差的增大, USARME 的优势更加明显.

(2) 当 X 的测量误差较小时, 即 λ 较小时, USARME 和 USAR 对参数的估计效果差别不大. 这个结果也是容易理解的, 测量误差太小不足以影响估计结果的准确性.

例如, 当 $\lambda = 0.01$ 、 $n = 200$ 时, USARME 模型对 ρ 的估计偏离系数 $r_1 = 0$ 、变异系数 $r_2 = 1.176 \times 10^{-5}$, 对 b 的估计偏离系数 $r_1 = 0.0038$ 、变异系数 $r_2 = 0.0108$; USAR 模型对 ρ 的估计偏离系数 $r_1 = 0.0012$ 、变异系数 $r_2 = 0.0082$, 对 b 的估计偏离系数 $r_1 = 0.0002$ 、变异系数 $r_2 = 0.0104$; 两个模型的 R^2 平均都在 0.98 之上.

(3) 当 X 的测量误差变大后, 由于 ρ 不直接作用于 X 上, 从而 USARME 和 USAR 得到的估计值表现得相对稳定, 但 USAR 得到的 b 的估计值出现了严重偏差, USARME 可以估计出 b 的真值.

例如, 当 $\lambda = 1$ 、 $n = 200$ 时, USARME 模型能够精确地估计出 ρ ($r_1 = 0, r_2 = 1.17 \times 10^{-4}$) 和 b ($r_1 = 0.0018, r_2 = 0.0474$) 的值; USAR 模型中, 对 ρ ($r_1 = 0.0106, r_2 = 0.0341$) 的估计结果较为精确, 但对于 b ($r_1 = 0.3240, r_2 = 0.3252$) 的估计效果要差很多; USARME 模型的 R^2 平均仍在 0.98 之上, 而 USAR 模型却只有 0.66 左右.

(4) 当 X 的测量误差非常大时, 数据已经失真, 用 USAR 估计出的结果已经面目全非, 而 USARME 仍可以得出不错的结果.

例如, 当 $\lambda = 5$ 、 $n = 200$ 时, USARME 模型能够精确地估计出 ρ ($r_1 = 0.0035, r_2 = 0.0106$) 和 b

($r_1 = 0.0278$, $r_2 = 0.8218$, 当样本量 n 为 500 时 $r_2 = 0.169$) 的值; USAR 模型中, 对 ρ ($r_1 = 0.0212$, $r_2 = 0.0529$) 的估计较为准确, 但对于 b ($r_1 = 0.9226$, $r_2 = 0.9228$) 的估计效果要差很多; USARME 模型的 R^2 平均仍在 0.98 之上, 而 USAR 模型却只有 0.07 左右.

(5) 对于常数项 a 的估计, 当 λ 较小时, USARME 模型和 USAR 模型都能较为准确地估计出 a 的真值, 但 USAR 模型所得估计值的变异系数比 USARME 要大; 随着测量误差的增大, USARME 模型对 a 的估计的变异系数逐渐增大, 但估计值与真值的偏离系数仍然较小, 而 USAR 模型所得估计值的偏离系数和变异系数都变得非常大.

例如, 当 $\lambda = 0.01$ 、 $n = 200$ 时, USARME 模型对 a 的估计偏离系数 $r_1 = 0.071$ 、变异系数 $r_2 = 0.206$, USAR 模型对 a 的估计偏离系数 $r_1 = 0.084$ 、变异系数 $r_2 = 0.932$; 当 $\lambda = 2$ 、 $n = 200$ 时, USARME 模型对 a 的估计偏离系数 $r_1 = 0.143$ 、变异系数 $r_2 = 1.956$, USAR 模型对 a 的估计偏离系数 $r_1 = 14.364$ 、变异系数 $r_2 = 15.236$.

(6) 随着样本量的增大, 参数估计值的均方误差减小, 表明样本量的增加可以显著提高参数估计的稳健性.

图 1 展示了 λ 从 0.1 到 10 变化时, USARME 和 USAR 所得参数的估计情况.

图 1(a) 显示的是参数 ρ 估计结果的变化情况. 可以看出, 当 λ 稍微增大时, USAR 得到的 ρ 估计值便较早地与真值有所偏离, 而只有当 λ 增大很多时 USARME 得到的 ρ 估计值才有所偏离真值. 当 λ 增大到 8 之后, 两个模型对 ρ 的估计效果相差不大, 并且与真值之间的偏离程度并不大.

图 1(b) 显示的是参数 b 估计结果的变化情况. 随着 λ 的增大, USAR 得到的 b 估计值迅速偏离真值, 并逐步衰减为 0, 该状况与带测量误差的普通线性回归模型参数估计值的变化情形类似. 而 USARME 随着 λ 的增大仍能够估计到参数真值附近.

图 1 USARME 和 USAR 所得参数值随 λ 的变化图. (a) 参数 ρ 的估计值随 λ 的变化图; (b) 参数 b 的估计值随 λ 的变化图; (c) 模型 R^2 随 λ 的变化图

图 1(c) 显示的是模型 R^2 的变化情况. 随着 λ 的增大, USAR 的 R^2 逐渐衰减为 0, 而 USARME 的 R^2 几乎能够保持在 1 附近. 该结果在图 2-5 中展现的更为明显. 图 2-5 分别列出了不同的 λ 情形下, 原始数据 (Y) 和预测值 ($\hat{Y}$) 的分布状况. 当 $\lambda = 0.1$ 时, 测量误差非常小, USARME 和 USAR 几乎都能够准确的拟合出原始数据的分布状态. 当 $\lambda = 1$ 时, 测量误差有所增大, USAR 对原始数据的拟合产生了偏离, 但 USARME 仍能够很好地拟合原始数据. 当 λ 持续增大至 5 甚至 10 时, USAR 已经不能反映原始数据的分布状况, 模型失效, 但是 USARME 能继续精准地拟合出原始数据的分布.

图 2 $\lambda = 0.1$ ($n = 50$) 时原始数据与预测数据分布图

图 3 $\lambda = 1$ ($n = 50$) 时原始数据与预测数据分布图

图 4 $\lambda = 5$ ($n = 50$) 时原始数据与预测数据分布图

图 5 $\lambda = 10$ ($n = 50$) 时原始数据与预测数据分布图

4 结论

本文研究了自变量存在测量误差下的空间自回归模型; 从只有一个自变量入手, 建立了单变量空间自回归测量误差模型, 并给出了参数估计方法和算法. 通过数值模拟, 本文发现, 当自变量存在测量误差时, 如果不考虑测量误差而直接使用普通的空间自回归模型, 所估计得到的参数存在明显的偏差; 如果测量误差足够大, 空间自回归模型所得的结果完全不能反映原始数据. 使用空间自回归测量误差模型则能很好地拟合原始数据, 即使测量误差比较大时, 仍能够得到很好的估计结果.

本文通过对单变量模型的研究, 表明自变量测量误差的存在的确会影响模型的估计, 建模时必须充分考虑其影响. 多变量情形下空间自回归测量误差模型的参数估计问题有待于进一步研究.

致谢 作者感谢审稿人对本文的意见与建议.

参考文献

- 1 Fischer M M, Wang J F. Spatial Data Analysis: Models, Methods and Techniques. Heidelberg: Springer, 2011
- 2 Anselin L, Florax R J G M. Small sample properties of tests for spatial dependence in regression models: Some further results. In: Anselin L, Florax R J G M, eds. New Directions in Spatial Econometrics Advances in Spatial Science. Heidelberg: Springer, 1995, 21–74
- 3 Cliff A D, Ord J K. Spatial Processes: Models & Applications. London: Pion, 1981
- 4 Anselin L. Spatial Econometrics: Methods and Models. Netherlands: Springer, 1988
- 5 LeSage J P, Pace R K. Introduction to Spatial Econometrics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009
- 6 Gillard J. An overview of linear structural models in errors in variables regression. REVSTAT, 2010, 8: 57–80
- 7 王海鹰, 邹国华. 线性测量误差模型的平均估计. 系统科学与数学, 2012, 32: 1–14
- 8 Adcock R J. Note on the method of least squares. Analyst, 1877, 4: 183–184
- 9 Adcock R J. A problem in least squares. Analyst, 1878, 5: 53–54
- 10 Fuller W A. Measurement Error Models. New York: John Wiley & Sons, 1987
- 11 Carroll R J, Ruppert D, Stefanski L A, et al. Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective, 2nd. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006
- 12 Buonaccorsi J P. Measurement Error: Models, Methods and Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2010
- 13 崔恒建. 测量误差模型及其统计推断. 见: 王启华, 史宁中, 耿直, 等, 主编. 现代统计研究基础. 北京: 科学出版社, 2010, 128–163
- 14 Anselin L, Lozano-Gracia N. Errors in variables and spatial effects in hedonic house price models of ambient air quality. Empir Econom, 2008, 34: 5–34
- 15 张征宇, 朱平芳. 有测量误差时空间自回归模型的估计与检验. 统计研究, 2010, 27: 103–109
- 16 Cheng C L, Van Ness J W. Statistical Regression with Measurement Error. London: Arnold, 1999
- 17 Su L J, Yang Z L. Instrumental variable quantile estimation of spatial autoregressive models. Technical Report.

Singapore Management University, 2011

Parameter estimation of univariate spatial autoregressive models with measurement errors

Xiaoqun He & Xiaoning Hu

Abstract In this paper, the measurement error is introduced into the classical spatial autoregressive model. Starting with only one independent variable, the univariate spatial autoregressive model with measurement errors (USARME) is constructed. The influence of measurement errors of independent variables on the spatial autoregressive model is discussed. The parameter estimation method and algorithm of USARME are established. The feasibility and reliability of the estimation method are verified by numerical simulation.

Keywords spatial autoregressive model, measurement error model, parameter estimation

MSC(2010) 62H11, 91B72, 62F10

doi: 10.1360/N012019-00116