

基于符号距离场的多体系统碰撞动力学研究¹⁾张西南 游 浦 刘铸永²⁾

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 水动力学教育部重点实验室, 上海 200240)

摘要 多体系统动力学中的接触碰撞问题是典型的边界非线性问题, 对其动力学仿真面临着巨大的数值困难. 由于求解过程中需要一直进行复杂的接触碰撞检测, 严重地影响了数值计算效率. 为了实现对多体系统动力学中接触碰撞问题的快速求解, 文章提出一种改进的基于符号距离场的多体系统动力学接触碰撞检测算法. 通过对预先生成的符号距离场进行三线性插值, 求解出空间中任意一点距离物体表面的最短距离和法向量. 将接触碰撞检测分为全局检测和局部检测两个过程, 首先在全局检测时利用 OBB 包围盒技术对物体之间是否存在潜在接触可能性进行快速判断; 然后在局部检测时基于符号距离场信息并结合八叉树结构对接触碰撞检测算法进行优化. 分别采用 Hertz 接触力模型和基于速度的库伦摩擦力模型, 建立了多刚体系统非连续动力学方程. 最后, 通过对典型的算例和空间站交会对接的工程案例进行仿真, 验证了所提方法在解决复杂多体系统碰撞动力学问题时的正确性和高效性. 该方法可以进一步拓展到复杂构型刚体与柔性体的接触碰撞动力学研究.

关键词 符号距离场, 碰撞检测, 多体系统, 八叉树, 交会对接

中图分类号: O313.4 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-24-131

STUDY OF MULTIBODY SYSTEM CONTACT DYNAMICS BASED ON SIGNED DISTANCE FIELD¹⁾Zhang Xinan You Pu Liu Zhuoyong²⁾

(MOE Key Laboratory of Hydrodynamics, School of Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The contact/impact problem of the multibody system dynamics is a typical boundary nonlinear problem, which faces a huge numerical difficulty in dynamic simulation. The efficiency of numerical calculation is seriously affected for the necessity of constant and complex contact detection in the solving process. In order to solve the contact/impact problem of the multibody system dynamics quickly, an improved algorithm for the contact/impact problem of multibody system dynamics is proposed based on the signed distance field in this paper. The shortest distance and normal vector of any point from the object surface are solved by performing trilinear interpolation on the pre-generated signed distance field. The contact detection is divided into two essential processes: global detection and local detection. At first, the bounding box called OBB is used to quickly judge whether there is a potential contact between objects in global detection. Then, a contact detection algorithm is further optimized based on the information of signed distance field and octree structure in local detection. In addition, the Hertz contact force model and Coulomb friction force model based on velocity are used to establish the discontinuous dynamics equations of the multibody system.

2024-03-26 收稿, 2024-04-29 录用, 2024-04-30 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (12272222 和 11932001).

2) 通讯作者: 刘铸永, 副教授, 主要研究方向为多体系统动力学与控制. E-mail: zhuyongliu@sjtu.edu.cn

引用格式: 张西南, 游浦, 刘铸永. 基于符号距离场的多体系统碰撞动力学研究. 力学学报, 2024, 56(9): 2703-2712

Zhang Xinan, You Pu, Liu Zhuoyong. Study of multibody system contact dynamics based on signed distance field. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(9): 2703-2712

Finally, the correctness and high efficiency of the proposed method in solving the complex impact dynamics problem of multibody system are verified by the successful simulation of typical calculation examples and an engineering case of spacecraft rendezvous and docking. The proposed method can be further extended to study the contact/impact dynamics between rigid bodies with complex configurations and flexible bodies.

Key words signed distance field, contact detection, multibody system, octree, rendezvous and docking

引言

接触碰撞广泛存在于航空航天、机械及机器人等领域研究的工程问题中^[1-3]. 例如太空中交会对接的航天器之间、消旋刷与太阳能板之间, 机器人电缆和孔洞之间^[3-5]. 接触碰撞在短时间内会产生很大的冲击力, 容易导致系统中结构的损伤和失稳, 因此研究多体系统中的接触碰撞问题对系统结构安全性评估和反馈控制具有重要意义.

然而, 接触碰撞问题的求解往往存在着巨大的计算困难. 一方面, 碰撞会引起物体速度的突变, 是一种非连续复杂动力学过程, 对系统动力学方程的求解会带来较大影响^[6-8]; 另一方面, 在碰撞问题进行计算时, 接触界面与接触状态的确定占用了大量计算时间, Williams 等^[9]提到, 接触检测往往占据整个计算耗时的一半以上. 对于接触检测, 最简单的方法是通过直接求解物体间所有点的距离来确定接触对. 这种方法的计算量为 $O(N^2)$, 显然没有太多实用价值. 目前主流的方法为先通过全局检测判断物体之间是否有潜在接触可能, 再利用局部检测进一步确定发生接触的点对^[10]. 全局检测法有主从面法、桶排序法和级域算法等, 其中桶排序法运用得最为广泛^[11]; 局部检测法有点面算法、内外算法和小球算法等. 此外, 在传统检测方法的基础上还诞生了一些新的方法: 如 Hippmann^[12] 提出的多边形接触检测法、He 等^[13] 提出的借助多网格检测法及 Wellmann 等^[14] 提出的超椭圆接触检测法. 但无论采用哪种检测方法, 都需要在每个时间步进行计算, 从而大大增加求解时间.

而接触检测的本质是计算物体之间的最短距离以及接触的法向量, 这与计算机图形学中符号距离场 (signed distance field, SDF) 技术非常相似. 符号距离场表示了空间中点到物体表面的最短距离, 并以正负号来表示该点处于物体外部还是内部^[15-16]. 对于规则表面构型物体, 其符号距离场存在解析解. 而对于复杂表面构型物体, 其符号距离场无法用解析

函数表示, 通常以物体周围空间中若干点的符号距离值来代替, 被称为离散符号距离场. 生成离散符号距离场的方法是将复杂构型表面离散为三角形单元, 并通过最近点投影算法来计算距离场, 同时根据投影向量和法向量关系判断正负号^[17-18]. 该方法的计算准确度高且数值稳定性强, 并且可通过 OpenMP 并行加快求解^[19]. 因此将其运用在多体系统的接触碰撞检测中具有非常大的优势, 目前 SDF 已应用于多体系统的碰撞检测和变形接触等许多方面^[20-21], 且相较于传统检测方法有很大的效率提升. 例如, Aguirre 等^[22] 和 You 等^[23] 利用符号距离场在多体系统动力学问题中进行了接触检测. 该方法避免了迭代时反复计算的问题, 仅需进行最短距离查询即可; 但当检测的物体表面构型复杂, 检测点数量增多时, 对检测点进行遍历查询也将花费大量时间.

因此, 本文引入八叉树结构对基于符号距离场碰撞检测方法进行改进, 目的是实现对多体系统动力学中接触碰撞问题的快速求解.

1 符号距离场

符号距离场 (SDF) 是一种表示物体形状的方法, 在计算机图形学中已得到广泛运用, 如曲面重构、模型绘制和图像渲染等^[15,24]. 符号距离场给出了空间中点到物体表面的最短距离信息, 其具体定义为

$$d_s(p) = \text{sign}(p) \inf_{x \in \partial S} \|x - p\| \quad (1)$$

$$\text{sign}(p) = \begin{cases} -1, & \text{if } p \in S \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\text{sign}(p)$ 函数用于判断该点是否位于物体内部.

对于离散符号距离场的求解, 需要将物体周围的空间进行离散. 常规方法是用等距六面体划分以实现检测点所处单元序号的快速查询, 并通过单元的 8 个离散点进行插值计算; 但缺点在于会增加不必要的空间划分, 扩大内存占用量. 为了增强空间适应性, 有研究提出可采用八叉树等方案对空间进

行网格细分^[23,25]. 但该方法在每次查询检测点所处单元时, 都需要经过八叉树遍历, 查询效率较低. 因此, 本算法为实现快速求解, 拟采用等距六面体进行空间离散, 并利用三线性插值对检测点的符号距离值进行求解.

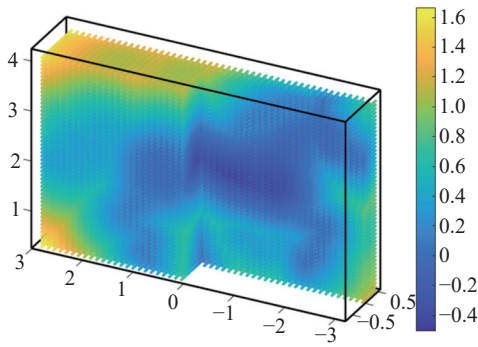
首先, 通过等距六面体 ($h_x = h_y = h_z$) 对给定空间域 ($\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$) 进行离散, 求出离散符号距离场 (图 1 (a)). 对于坐标为 (x, y, z) 的检测点, 求出所处单元的序号 (i, j, k)

$$\left. \begin{aligned} i &= \text{floor}\left(\frac{x - x_{\min}}{h_x}\right) \\ j &= \text{floor}\left(\frac{y - y_{\min}}{h_y}\right) \\ k &= \text{floor}\left(\frac{z - z_{\min}}{h_z}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

再以点 (x_i, y_j, z_k) 为局部坐标原点 (图 1 (b)), 定义

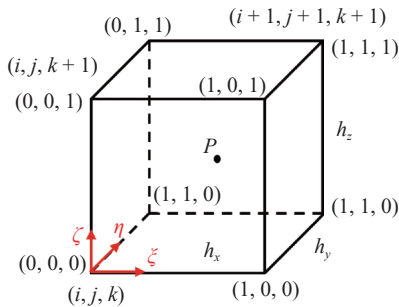
$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x - x_i}{h_x} \\ \eta &= \frac{y - y_j}{h_y} \\ \zeta &= \frac{z - z_k}{h_z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则 8 个离散点的局部坐标可表示为 $(0,0,0)$, $(0,1,0)$,



(a) 离散符号距离场示例

(a) Example of signed distance field



(b) 插值计算

(b) Interpolation

图 1 离散符号距离场

Fig. 1 Discreted signed distance field

$(1,0,0)$, $(1,1,0)$ 等. 由于 8 个离散点的符号距离值 (记作 d_{000} 和 d_{010} 等) 已预先求出, 故采用三线性插值函数即可得到 P 点的符号距离值 $d_s(p)$

$$d_s(p) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 d_{ijk} \cdot [(1-i)(1-\xi) + i\xi] \cdot [(1-j)(1-\eta) + j\eta] \cdot [(1-k)(1-\zeta) + k\zeta] \quad (5)$$

并且通过对最短距离 $d_s(p)$ 求梯度, 可得出检测点的法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla d_s(p)}{\|\nabla d_s(p)\|} \quad (6)$$

2 碰撞检测

2.1 检测方法

接触碰撞检测可分为全局检测和局部检测两部分, 全局检测用于判断物体间是否存在潜在接触的可能, 局部检测则用于确定具体发生接触的点对. 对于全局检测, 一般采用“包围盒”的方法进行快速判定^[26]; 而对于局部检测, 其过程非常耗时, 它的检测效率很大程度上决定了整个算法的计算效率. 传统的局部检测算法在每一次迭代时都需要计算检测点到物体表面的最短距离信息, 其效率非常低, 不适用于求解复杂构型物体间的接触碰撞问题.

因此, 本文提出一种基于八叉树结构的符号距离场碰撞检测方法, 以实现多体系统动力学中接触碰撞问题的快速求解. 首先, 本算法利用分离轴定理^[27], 并基于 OBB 包围盒 (oriented bounding box) 对接触碰撞物体进行全局检测, 由于此时物体间并没有潜在接触的可能, 因此可采用较大步长进行迭代计算. 而当全局检测判定到两个包围盒相交之后, 算法将缩小迭代步长, 通过局部检测来确定具体的接触点对. 传统基于符号距离场的局部检测法需要遍历所有检测点, 找到符号距离值小于 0 其发生接触. 其缺点在于当物体检测点数量过多时, 效率往往很低. 因此, 为了进一步提高效率, 本算法采用八叉树结构将检测物体划分为 8 个单元, 然后对每个单元进行递归划分, 直至满足一定的条件. 局部检测时, 若某一区域不发生接触, 则不用遍历区域内的点, 反之则进行遍历.

图 2 中的流程图展示了该算法碰撞检测的具体步骤. 以图 3 中一颗深度为 3 的八叉树为例, 当检测到区域 1 发生接触时, 对区域 1 中的 8 个子区域进

行检测,若检测到其中的子区域 2 发生接触,则继续对子区域 2 中的 8 个子区域进行检测,直至检测到最小的子区域 5,并对其中的检测点进行遍历.由此可见,利用八叉树结构对检测物体进行区域划分的

方法在保障每个区域包含少量检测点的同时加快了区域检测的速度,从而大大提高了局部检测的效率.

2.2 效率分析

本节对所提出的结合八叉树结构的符号距离场检测法、符号距离场检测法(以八叉树结构生成的 SDF 和以均匀六面体网格生成的 SDF)与传统检测法(指不基于 SDF 的检测方法)进行计算效率对比研究.对于由 M 个离散三角形面片组成的主物体和有 N 个检测点的从物体之间的接触检测,假设一共需要进行 K 次动力学方程求解,进行一次点到物体表面最短距离计算的时间为 T_1 ,则 4 种方法的时间复杂度如下.

传统方法在每次迭代时都需要对所有检测点进行点到物体表面最短距离的求解,因此其总时间花费为

$$T_{\text{tradition}} = KNT_1 = O(KN) \quad (7)$$

符号距离场(八叉树离散生成)的检测方法只需在初始时对网格点进行最短距离计算,假设用于生成符号距离场的八叉树的深度为 d_0 ,一共需要计算的网格点数量为 N_0 .由于迭代中不用重复计算,仅需要进行查询操作,假设判断检测点是否处于某一深度的八叉树单元所需时间为 t_0 ,则其总时间花费为

$$T_{\text{SDFbyOCT}} = N_0T_1 + KNd_0t_0 \quad (8)$$

同理,符号距离场(六面体离散生成)的检测方法也只需在初始时对网格点(假设数量为 n^3)进行一次最短距离计算,假设此时查询空间中任意点符号距离场值的时间为 T_2 ,则其总时间花费为

$$T_{\text{SDF}} = n^3T_1 + KNT_2 \quad (9)$$

在生成相同内存下的符号距离场情况下, $n^3 = N_0$.此外,一方面在均匀六面体离散生成的 SDF 中查询符号距离场仅需要输出三维数组的一个元素(假设为 $\text{sdf}_{i[j][k]}$),所耗时间 T_2 显然小于 t_0 .另一方面,当利用八叉树离散物体表面的 SDF 时,其所需构建的深度 d_0 往往较大,故 $T_2 < d_0t_0$,即 $T_{\text{SDF}} < T_{\text{SDFbyOCT}}$.因此,采用均匀六面体离散生成 SDF 相较于采用八叉树离散生成 SDF 在局部检测时会有更低的时间花费,效率更高.以下基于符号距离场的接触检测法默认是基于均匀六面体离散的,不再作区分强调.

此外,由于接触检测物体的离散单元数 M 通常

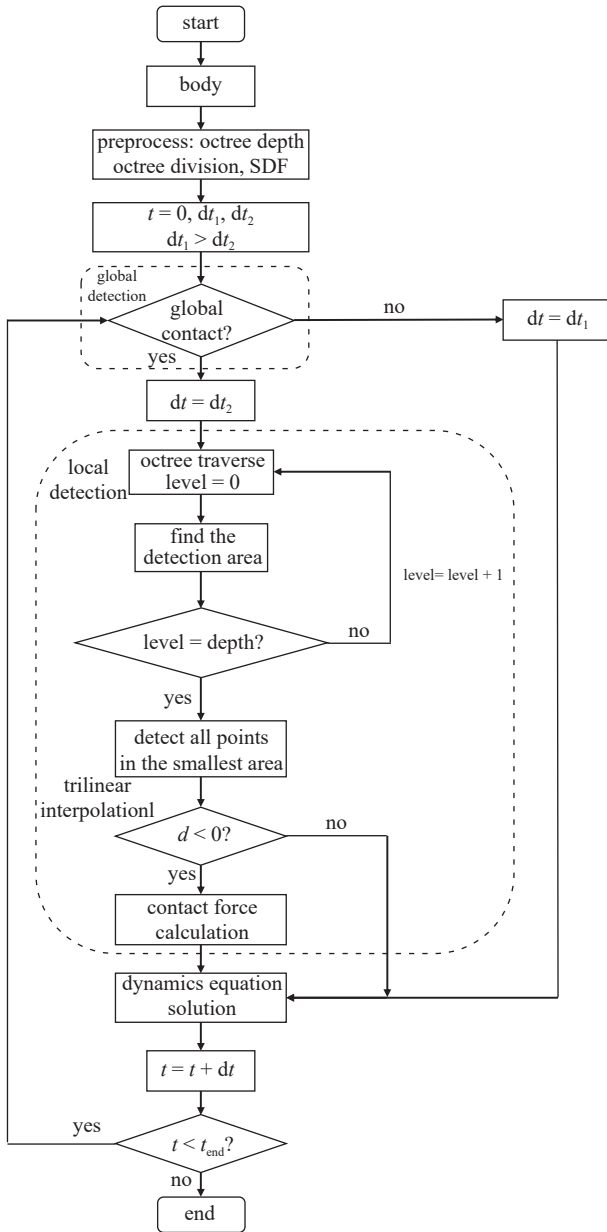


图 2 碰撞检测流程图

Fig. 2 Contact detection flow chart

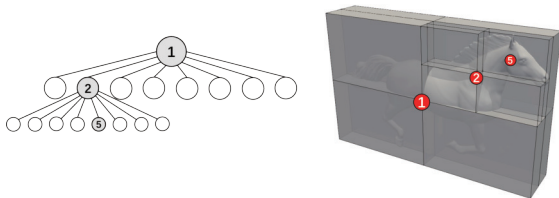


图 3 深度为 3 的八叉树结构

Fig. 3 Octree structure (depth: 3)

非常大, 进行一次最短距离求解的时间 T_1 也随之变大, 即生成符号距离场的总时间往往大于查询符号距离值的总时间, 因此公式 (9) 可近似为

$$T_{\text{SDF}} \approx n^3 T_1 = O(n^3) \quad (10)$$

结合八叉树结构的符号距离场检测法与上述方法在生成符号距离场时所耗费的时间相同, 区别在于该方法在局部检测时不用遍历所有的检测点. 对于深度为 d 的八叉树结构, 一共有 8^{d-1} 个最小子区间, 平均每个区间含有的检测点数为 $N/8^{d-1}$. 假设搜索至八叉树某一深度 d 所耗费的时间为 T_3 , 则该方法的总时间花费为

$$T_{\text{OCT}} = n^3 T_1 + K \left(T_3 + \frac{N}{8^{d-1}} T_2 \right) \quad (11)$$

同理, 式 (11) 可近似为

$$T_{\text{OCT}} \approx n^3 T_1 = O(n^3) \quad (12)$$

一方面, 由于检测物体的构型通常较为复杂, 即其检测点数 N 将大于符号距离场离散网格点数 n^3 ; 另一方面, 在多体系统动力学接触碰撞问题的求解中, 动力学方程的求解次数 K 往往很大. 因此 $O(n^3) \ll O(KN)$, 即基于符号距离场的碰撞检测算法时间复杂度远小于传统的检测算法.

此外, 本算法通过八叉树结构查询最小接触区域时, 只需进行一次深度为 d 的遍历, 不用重复查询, 因此 T_3 的大小在式 (11) 中占比很小; 同时, 由于 $d > 1$, $N/8^{d-1} < N$ 所以 $T_{\text{OCT}} < T_{\text{SDF}}$, 即本算法进一步提高了碰撞检测时的效率. 并且对构型越复杂、检测点数越多的物体, 其效率的提升也更为明显. 分别采用符号距离场检测法和基于八叉树结构的符号距离场检测法对不同数量检测点做一次接触检测的时间花费如图 4. 从图中可进一步验证, 基于八叉树结

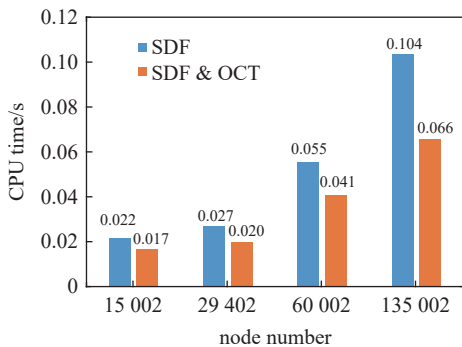


图 4 不同检测点数下的接触检测时间

Fig. 4 Detection time in different detecting points

构的符号距离场检测法计算效率有显著提高, 并且提高程度随检测点数的增加而增加.

3 动力学方程

3.1 单刚体动力学方程

首先建立单刚体动力学方程 (图 5), 令其广义坐标为^[28]

$$\mathbf{q}_i = \left(\mathbf{x}_i^T \quad \mathbf{A}_i^T \right)^T = \left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \right)^T \quad (13)$$

式中, 欧拉四元数满足约束方程

$$\Phi^A = \mathbf{A}^T \mathbf{A} - 1 = 0 \quad (14)$$

由欧拉四元数的相关性质可得旋转矩阵、相对角速度和相对角加速度的表达式为

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R} \mathbf{L}^T \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\omega}'_i = 2\mathbf{L}\dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}'_i = 2\mathbf{L}\ddot{\mathbf{A}}, \quad \ddot{\boldsymbol{\omega}}'_i = 2\mathbf{L}\ddot{\mathbf{L}} \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

根据牛顿-欧拉法, 刚体的动力学方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^n + \mathbf{F}^l \quad (18)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}}' \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{M}'^e + \mathbf{M}'^n + \mathbf{M}'^l \quad (19)$$

式中, $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{l}$ 分别表示外力、理想约束力和惯性力项, $'$ 表示相对于连体基的坐标阵.

对式 (14) 求导可得加速度约束方程, 并将式 (16) 代入式 (19) 中化简, 可得到封闭的刚体姿态微

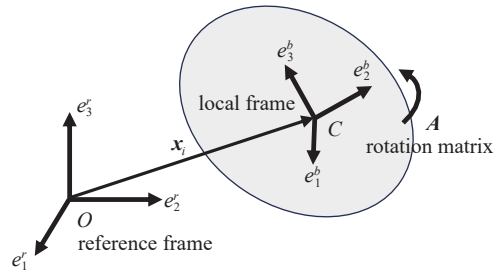


图 5 单刚体动力学模型

Fig. 5 Single rigid body dynamics model

分-代数方程组

$$\begin{bmatrix} 4L^T J L & \Lambda \\ \Lambda^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Lambda} \\ \sigma^\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8\dot{L}^T J L \dot{\Lambda} \\ -\dot{\Lambda}^T \dot{\Lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L^T M'^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L^T M'^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L^T M'^l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中, $\sigma^\Lambda = 8\dot{\Lambda}^T L^T J L \dot{\Lambda}$. 再将式 (18) 和式 (19) 组装, 得到封闭的刚体动力学方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \Phi_\Lambda^T \\ \Phi_\Lambda & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \sigma^\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -8\dot{L}^T J L \dot{\Lambda} \\ -\dot{\Lambda}^T \dot{\Lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}^e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}^n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}^l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中, $\Phi_\Lambda = (\mathbf{0} \ \Lambda^T)^T$, $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 4L^T J L \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^p \\ 2L^T M'^p \end{bmatrix}$, $p = e, n, l$.

3.2 多刚体动力学方程

对于由 N 个刚体组成的系统, 位形坐标总数为 $7N$ 个, 记作

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \cdots \ \mathbf{q}_N^T)^T \quad (22)$$

由于每对邻接刚体之间存在约束, 故上述坐标并不是独立的, 需要经过运动学分析, 得到如下 s 个独立的约束方程

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (23)$$

式中, $\Phi = (\Phi_1 \ \Phi_2 \ \cdots \ \Phi_s)^T$.

由拉格朗日乘子和约束力的关系可求出刚体间理想约束反力的贡献

$$\mathbf{z}^n = -\Phi_q^T \sigma \quad (24)$$

式中, $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_s)^T$ 为运动学约束方程对应的拉格朗日乘子阵.

最后, 由单刚体动力学方程 (21) 和式 (24) 可得出增广型系统动力学方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \Phi_\Lambda^T & \Phi_q^T \\ \Phi_\Lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \sigma^\Lambda \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^e \\ \boldsymbol{\eta}^\Lambda \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{z}^l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{Z}$ 为广义质量阵, $\mathbf{z}^e$ 和 $\mathbf{z}^l$ 为外力阵和惯性力阵, Φ_Λ 和 Φ_q 为四元数约束方程雅可比阵、运动学约束方程雅可比阵, $\boldsymbol{\eta}^\Lambda$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 为相应加速度约束方程的右项.

3.3 接触力模型

目前对于多体系统动力学中接触力模型的研究已较为成熟^[29-30], 本文选用基于 Hertz 理论的连续接触力模型, 利用虚功原理建立接触力方程. 以两个刚体 (α, β) 的接触碰撞为例 (图 6), 假设 α 为主刚体 (即以 α 刚体生成符号距离场), β 为从刚体 (进行接触检测的刚体), 定义刚体的位形坐标为

$$\mathbf{q}_i = (\mathbf{x}_i^T \ \Lambda_i^T)^T, \quad i = \alpha, \beta \quad (26)$$

对于从刚体上任意检测点 $\mathbf{x}$, 通过符号距离场可查询到其嵌入深度为

$$g_N = d_s(\mathbf{x}) \quad (27)$$

将其在主刚体 (α) 的局部坐标系下求变分得

$$\delta g_N = \frac{\partial d_s(\mathbf{x})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \cdot \delta \bar{\mathbf{x}} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{n}$ 为最近点的法向量, 可由式 (6) 得到; $\bar{\mathbf{x}}$ 为检测点 $\mathbf{x}$ 在局部坐标系下的坐标值, 可通过位形坐标表示

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\alpha^T (\mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\rho}'_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \quad (29)$$

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{A}_\alpha^T (\mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\rho}'_\beta - \mathbf{x}_\alpha) + \mathbf{A}_\alpha^T (\delta \mathbf{x}_\beta + \delta \mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\rho}'_\beta - \delta \mathbf{x}_\alpha) \quad (30)$$

式中, $\mathbf{A}$ 为旋转矩阵. 将 $\delta \mathbf{A} = \delta \tilde{\mathbf{w}}^r \mathbf{A}$ ($\mathbf{w}^r$ 为参考基下无穷小转动角位移) 代入上式并简化得

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\alpha^T & \mathbf{A}_\alpha^T (\bar{\mathbf{x}}_\beta + \widetilde{\mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\rho}'_\beta} - \bar{\mathbf{x}}_\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_\alpha \\ \delta \mathbf{w}_\alpha^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^T & -\mathbf{A}_\alpha^T (\widetilde{\mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\rho}'_\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_\beta \\ \delta \mathbf{w}_\beta^r \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中, $\sim$ 运算符: 对任一坐标阵 $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$,

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

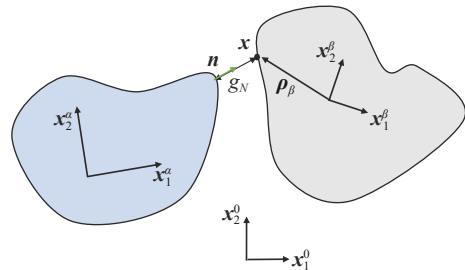


图 6 接触碰撞动力学建模

Fig. 6 Dynamics modeling about contact-impact

由欧拉四元数性质可知: $\omega^r = 2\mathbf{R}\dot{\mathbf{A}}$, 即 $\delta\omega^r = 2\mathbf{R}\delta\mathbf{A}$, 代入式 (31) 可得

$$\delta\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\alpha^\top & 2\mathbf{A}_\alpha^\top(\tilde{\mathbf{x}}_\beta + \widetilde{\mathbf{A}_\beta\boldsymbol{\rho}'_\beta} - \tilde{\mathbf{x}}_\alpha) & \mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_\alpha \\ \delta\mathbf{A}_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^\top & -2\mathbf{A}_\alpha^\top(\widetilde{\mathbf{A}_\beta\boldsymbol{\rho}'_\beta})\mathbf{R}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_\beta \\ \delta\mathbf{A}_\beta \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\text{令 } \mathbf{Y}_\alpha = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\alpha^\top & 2\mathbf{A}_\alpha^\top(\tilde{\mathbf{x}}_\beta + \widetilde{\mathbf{A}_\beta\boldsymbol{\rho}'_\beta} - \tilde{\mathbf{x}}_\alpha) & \mathbf{R}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^\top & -2\mathbf{A}_\alpha^\top(\widetilde{\mathbf{A}_\beta\boldsymbol{\rho}'_\beta})\mathbf{R}_\beta \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$\delta\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Y}_\alpha\delta\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{Y}_\beta\delta\mathbf{q}_\beta \quad (33)$$

从另一方面考虑, $\bar{\mathbf{x}}$ 的变分可分解为法向和切向两部分, 即

$$\delta\bar{\mathbf{x}} = \delta\bar{\mathbf{x}}_N + \delta\bar{\mathbf{x}}_T = (\delta\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \delta\bar{\mathbf{x}}_T \quad (34)$$

由此, 嵌入深度在切向的变分表达式为

$$\delta\mathbf{g}_T = \delta\bar{\mathbf{x}}_T = \delta\bar{\mathbf{x}} - (\delta\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\delta\bar{\mathbf{x}}_T \quad (35)$$

其中, $\otimes$ 为向量间的并矢运算。

此外, 采用 Hertz 模型计算法向接触力, 并引入基于速度的摩擦力模型来计算切向接触摩擦力

$$f_N = kg_N^n + \chi g_N^m \dot{g}_N \quad (36)$$

$$\mathbf{f}_T = -\mu(\|\dot{\mathbf{g}}_T\|)f_N \frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{\|\dot{\mathbf{g}}_T\|} \quad (37)$$

式中, k 为刚度系数, χ 为滞后阻尼系数, n 和 m 为指数系数, μ 为摩擦系数, 它是切向速度的函数, 表达式为

$$\mu(v) = \begin{cases} -\mu_s + 2\mu_s \left(3 - 2 \frac{v+v_s}{2v_s} \right) \left(\frac{v+v_s}{2v_s} \right)^2, & \text{when } v \leq v_s \\ \mu_s + (\mu_d - \mu_s) \left(3 - 2 \frac{v-v_s}{v_d-v_s} \right) \left(\frac{v-v_s}{v_d-v_s} \right)^2, & \text{when } v_s < v < v_d \\ \mu_d, & \text{when } v \geq v_d \end{cases} \quad (38)$$

式中, μ_s 和 μ_d 为静摩擦系数和动摩擦系数; v_s 和 v_d 为静摩擦切换速度和动摩擦切换速度。

再由式 (28)、式 (33) 和式 (35) 可得

$$\dot{g}_N = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{Y}_\alpha \dot{\mathbf{q}}_\alpha + \mathbf{Y}_\beta \dot{\mathbf{q}}_\beta) \quad (39)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_T = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{Y}_\alpha \dot{\mathbf{q}}_\alpha + \mathbf{Y}_\beta \dot{\mathbf{q}}_\beta) \quad (40)$$

因此, 接触力所做的虚功可表示为

$$\delta W = f_N \delta g_N + \mathbf{f}_T \cdot \delta \mathbf{g}_T \quad (41)$$

代入式 (28)、式 (34) 和式 (35) 并简化得

$$\delta W = \delta \mathbf{q}_\alpha^\top (\mathbf{Y}_\alpha^\top f_N \mathbf{n} + \mathbf{Y}_\alpha^\top \mathbf{f}_T) + \delta \mathbf{q}_\beta^\top (\mathbf{Y}_\beta^\top f_N \mathbf{n} + \mathbf{Y}_\beta^\top \mathbf{f}_T) = \delta \mathbf{q}_\alpha^\top \mathbf{f}_\alpha + \delta \mathbf{q}_\beta^\top \mathbf{f}_\beta \quad (42)$$

由此, 得出两个刚体的接触力分别为

$$\begin{cases} \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{Y}_\alpha^\top f_N \mathbf{n} + \mathbf{Y}_\alpha^\top \mathbf{f}_T \\ \mathbf{f}_\beta = \mathbf{Y}_\beta^\top f_N \mathbf{n} + \mathbf{Y}_\beta^\top \mathbf{f}_T \end{cases} \quad (43)$$

其中, 从连续接触力模型的本质以及上述的推导中可知, 接触碰撞力等效为检测点与最近投影点之间附加上的弹簧与阻尼力元。因此式 (43) 所表示的接触力在从刚体上的作用点为检测点, 而在主刚体上的作用点为检测点所对应的最近投影点。

另外, 为了避免接触力突变造成的不收敛, 算法对接触力进行了罚正则化处理^[22]。

4 算法验证及运用

4.1 正确性验证

由于大多数接触碰撞问题没有解析解, 因此本节将通过两个规则刚体完全弹性碰撞的例子来验证算法的正确性。如图 7, 右侧滑块 1 以 -5 m/s 的速度撞击左侧滑块 2。两者密度相同, 滑块 2 的体积是滑块 1 的 4 倍。两者质心的初始位置分别为 $\mathbf{X}_1 = (3 \ 0 \ 0)$, $\mathbf{X}_2 = (0 \ 0 \ 0)$, 不考虑重力加速度。通过动量守恒和能量守恒定理, 可求出碰撞后的理论解为滑块 1 速度 3 m/s , 滑块 2 速度 -2 m/s 。在不同步长下利用本算法对问题进行求解并将其与 Adams 软件仿真值、理论值进行比较。从图 8(a) 中可看出, 基于符号距离场的接触碰撞算法收敛性优于 Adams 软件; 同时, 在相同步长下本算法与理论值的误差更小。并且在计算过程中发现, 当步长很小时, Adams 软件的仿真速度非常慢, 其效率远低于本算法。此外, 为了验证算法对接触碰撞过程处理的准确性, 将本

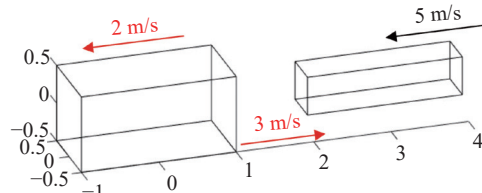
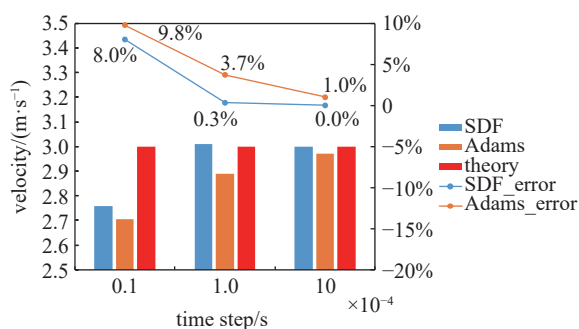
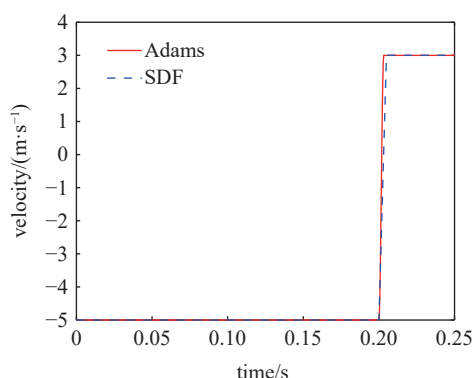


图 7 简单刚体间接触碰撞

Fig. 7 Contact-impact between simple rigid bodies



(a) 计算与仿真结果的误差
(a) Error between calculation and simulation



(b) 滑块 1 速度的时间历程图
(b) Velocity time history of slider 1

图 8 正确性验证

Fig. 8 Correctness verification

算法计算出的滑块 1 速度时间历程与 Adams 软件仿真结果进行对比 (图 8(b)), 发现两者吻合效果很好。

4.2 高效性验证

为了对本算法计算的高效性进行验证, 分别以传统检测法 (以简单的点面最短距离计算方法为例)、符号距离场检测法和结合八叉树结构的符号距离场检测法对 3 个算例进行求解 (图 9)。3 个算例中的接触碰撞分别发生在两个简单构型刚体之间 (长方体-长方体)、复杂构型刚体与简单构型刚体之间 (“马”-长方体)、两个复杂构型刚体之间 (“马”-“马”)。其中两长方体模型尺寸大小与 4.1 中相同, “马”模型由 231 422 个三角形网格和 115 713 个节点组成。3 个算例的仿真计算时间均为 5 s, 分别对 3 种检测方法的计算时间进行统计。从图 10 可见, 前两个算例中, 与传统检测方法相比, 基于 SDF 的碰撞检测方法计算时间分别减少到原来的 23.0% 和 3.9%; 而基于 SDF & Octree 的碰撞检测方法计算时间分别减少到原来的 14.2% 和 2.3%。第 3 个 “马”-“马”的算例中, 传统检测方法计算时间已经无法承受, 而基于 SDF & Octree 的碰撞检测方法只需要 1007 s。由此

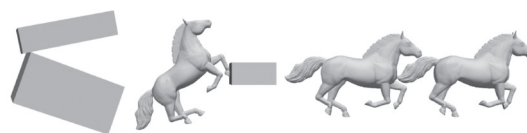


图 9 高效性验证算例

Fig. 9 Examples of high efficiency verification

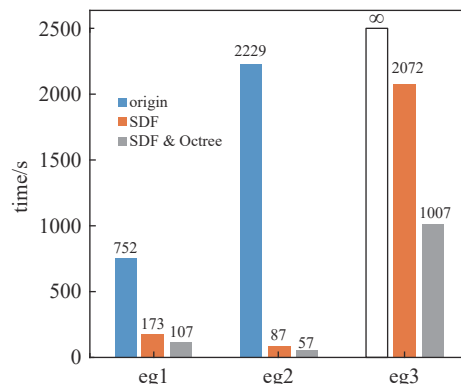


图 10 不同检测法的时间花费

Fig. 10 Time cost of different detection methods

可见, 基于符号距离场 (SDF) 的碰撞检测算法效率远远高于传统检测方法 (origin), 并且结合八叉树结构的符号距离场 (SDF & Octree) 检测法效率最高。此外, 该算法的效率提升倍数随着接触碰撞刚体构型复杂度的增加而增加。

4.3 航天器交会对接案例

交会对接是空间站组建的关键技术之一。由于航天器对接机构构型较为复杂, 使用传统方法进行接触检测非常耗时, 计算效率很低。因此, 本文将采用结合八叉树结构的符号距离场检测法对航天器交会对接过程进行动力学仿真计算。

如图 11, 对接模型从左至右由主动舱、6 个控制腿、主动环、3 个锁舌、被动环、3 个锁扣和被动舱组成。其中, 锁舌与主动环之间存在棱柱铰约束, 并在滑移方向上用弹簧将两者连接, 弹簧力与伸长量存在一定函数关系; 控制腿可通过不同的控制率对主动环进行调姿, 以避免两个航天器在交会对接时发生倾斜。交会对接发生时, 右侧被动舱以一定速度 (40 mm/s) 撞向左侧主动舱, 主动环上的锁舌与被动环上的锁扣间、主动环面与被动环面间均发生接触碰撞; 由于该算例为两个航天器进行正向交会对接, 故控制腿不加入耦合控制项, 可将其等效为 $f_k = k \cdot \Delta x$, 其中刚度系数 k 设为 1.5×10^4 N/mm。当锁舌与锁扣完成锁定后, 两个舱体的速度将逐渐趋向一致, 从而完成交会对接过程。

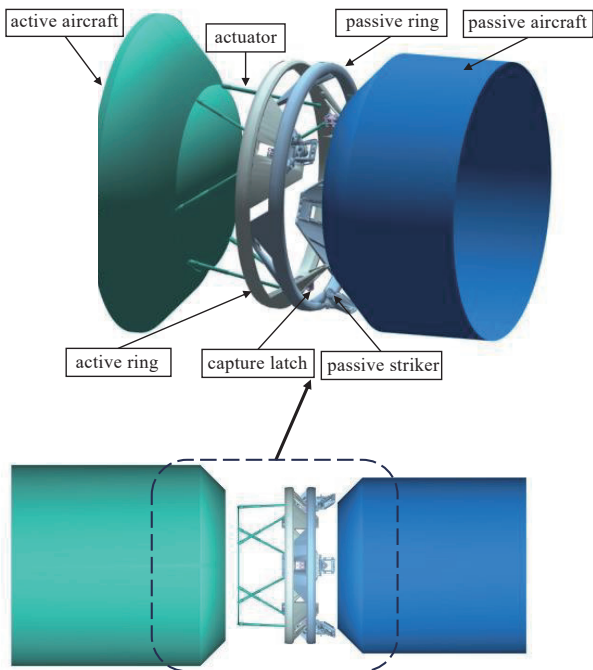


图 11 交会对接示意图
Fig. 11 Rendezvous and docking

各模型部件的质量属性见表 1.

接触力模型的参数选择为: $k_{ss} = 2.0 \times 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1})$, $k_{zb} = 3.0 \times 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-1})$, $n_{ss} = n_{zb} = 1$, $m_{ss} = m_{zb} = 0$, $\chi_{ss} = \chi_{zb} = 0$ (ss 表示锁舌与锁扣之间; zb 表示主动环与被动环之间). 摩擦力模型参数为: $\mu_s = 0.3$, $\mu_d = 0.2$, $v_s = 5.0 \times 10^{-3}$, $v_d = 1.0 \times 10^{-2}$.

对交会对接过程进行 8 s 的仿真, 从主动环与被动环在对接方向距离随时间变化图 (图 12) 可看出, 在 $t = 2.5 \text{ s}$ 附近, 锁舌与锁扣发生锁定, 之后两个环面的相对距离保持相对为零. 并且从主动舱和被动舱的速度时间历程图 (图 13) 可知, 在交会对接锁定后, 两个舱体的速度呈正弦式变化, 逐渐趋近于 -20.5 mm/s 稳定值.

此外, 图 14 显示了接触碰撞点数量随时间的变

表 1 各模型部件的质量属性

Table 1 Mass properties of each model component		
Component	Mass/kg	Moment of inertia/(kg·mm ²)
active aircraft	7.9×10^3	$(8.6 \times 10^9, 4.3 \times 10^{10}, 4.1 \times 10^{10})$
actuator	0.21	$(33.48, 4.7 \times 10^3, 4.7 \times 10^3)$
active ring	47.50	$(1.4 \times 10^7, 6.9 \times 10^6, 6.8 \times 10^6)$
capture latch	0.063	$(32.24, 49.30, 54.66)$
passive aircraft	8.6×10^3	$(1.3 \times 10^{10}, 7.9 \times 10^{10}, 7.9 \times 10^{10})$

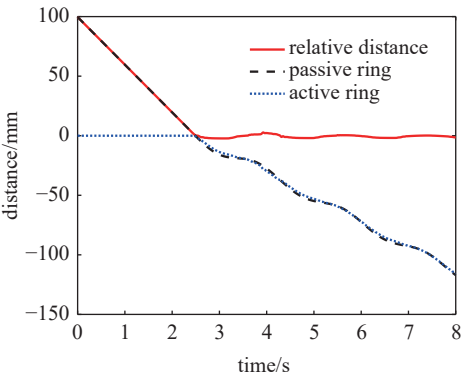


图 12 主动环与被动环距离时间历程图
Fig. 12 Distance time history of active and passive ring

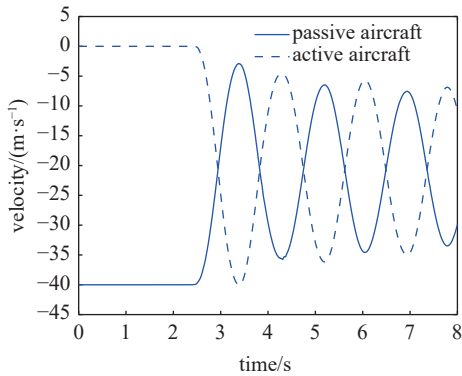


图 13 主动舱与被动舱速度时间历程
Fig. 13 Velocity time history of active and passive aircraft

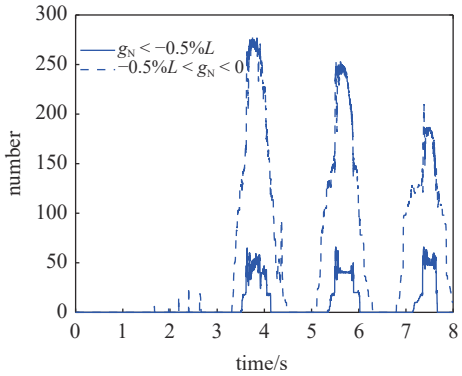


图 14 两类接触点数量时间历程图
Fig. 14 Time history of number of contact points

化. 其中, 接触碰撞点按照穿透深度分为两类 (I 类: 小于 $0.5\%L$; II 类: 大于等于 $0.5\%L$, L 为锁舌对角线长度). 从图中可看出, 大部分接触碰撞点属于 I 类, 其占比超过 70%. 因此, 通过该算法对接触碰撞算例进行仿真计算时, 产生的穿透量非常小, 在可接受范围内, 并且计算结果符合实际.

5 结论与展望

本文引入八叉树结构对基于符号距离场碰撞检

测方法进行改进,大幅度提高了复杂构型多刚体系统接触碰撞动力学仿真的效率.首先利用三线性插值求解最短距离和法向量,将符号距离场运用到了多体系统动力学中.推导了以Hertz模型、基于速度摩擦力模型为基础的动力学方程.此外,通过典型算例验证了所提出方法的正确性和高效性.并且针对航空航天领域中的交会对接过程,成功进行了接触碰撞仿真计算,展现出了该算法在解决复杂实际工程问题中的有效性.该方法可以进一步拓展到复杂构型刚体与柔性体的接触碰撞动力学研究中.

参 考 文 献

- 1 刘才山,陈滨.作大范围回转运动柔性梁斜碰撞动力学研究.力学学报,2000,32(4): 457-465 (Liu Caishan, Chen Bin. The oblique impact dynamic study for a flexible beam undergoing large overall motion. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2000, 32(4): 457-465 (in Chinese))
- 2 何明达.周边式对接机构碰撞点快速求解的一种方法.机电一体化,2022,28(Z2): 11-18 (He Mingda. A method for fast solving the collision points of peripheral docking mechanism. *Mechatronics*, 2022, 28(Z2): 11-18 (in Chinese))
- 3 Ma Z, Liu Z, Zou H, et al. Dynamic modeling and analysis of satellite detumbling using a brush type contactor based on flexible multibody dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 170: 104675
- 4 Zhao Z, Liu C, Chen T. Docking dynamics between two spacecrafts with APDSes. *Multibody System Dynamics*, 2016, 37(3): 245-270
- 5 You P, Liu Z, Ma Z. Multibody dynamic modeling and analysis of cable-driven snake robot considering clearance and friction based on ALE method. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, 184: 105313
- 6 Stewart DE. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Review*, 2000, 42(1): 3-39
- 7 刘才山,陈滨,彭瀚等.多体系统多点碰撞接触问题的数值求解方法.动力学与控制学报,2003,1: 59-65 (Liu Caishan, Chen Bin, Peng Han, et al. Numerical resolution of multi-body systems with multiple contact/impact points. *Journal of Dynamics and Control*, 2003, 1: 59-65 (in Chinese))
- 8 王检耀,洪嘉振,刘铸永.接触碰撞动力学的多变量选取方法.力学学报,2014,46(2): 318-322 (Wang Jianyao, Hong Jiazhen, Liu Zhuoyong. Multi-variable selection method in contact/impact dynamics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014, 46(2): 318-322 (in Chinese))
- 9 Williams JR, O'Connor R. Discrete element simulation and the contact problem. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1999, 6(4): 279-304
- 10 陈成军,陈小伟,柳明.接触-碰撞算法研究进展.计算力学学报,2018,35(3): 261-274 (Chen Chengjun, Chen Xiaowei, Liu Ming. Review of research progress in contact-impact algorithms. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, 35(3): 261-274 (in Chinese))
- 11 Benson DJ, Hallquist JO. A single surface-contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 78(2): 141-163
- 12 Hippmann G. An algorithm for compliant contact between complexly shaped surfaces in multibody dynamics. *Multibody Dynamics*, 2003, 12(4): 345-362
- 13 He K, Dong S, Zhou Z. Multigrid contact detection method. *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2007, 75: 036710
- 14 Wellmann C, Lillie C, Wriggers P. A contact detection algorithm for superellipsoids based on the common-normal concept. *Engineering Computations*, 2013, 25(5): 432-442
- 15 Guezlec A. "Meshsweeper": dynamic point-to-polygonal mesh distance and applications. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2001, 7(1): 47-61
- 16 Xu H, Barbi J. Signed distance fields for polygon soup meshes//Proceedings of Graphics Interface 2014, Canadian Information Processing Society, 2014: 35-41
- 17 Baerentzen JA, aanaes H. Signed distance computation using the angle weighted pseudonormal. *IEEE*, 2005, 11(3): 243-253
- 18 方向,鲍虎军,王平安等.点到任意多面体距离的快速计算方法.计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(9): 788-792 (Fang Xiang, Bao Hujun, Wang Pingan, et al. Algorithm for fast calculating the nearest distance between space point and arbitrary polyhedron. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2001, 13(9): 788-792 (in Chinese))
- 19 何康本.基于OpenMP加速的符号距离场构建算法实现.现代计算机,2021,8: 108-111, 120 (He Kangben. Signed distance field construction algorithm based on OpenMP acceleration. *Modern Computer*, 2021, 8: 108-111, 120 (in Chinese))
- 20 王发麟,郭宇,廖文和等.基于距离场和扫描剪除算法的线缆碰撞检测技术.计算机工程与应用,2017,53(10): 27-34 (Wang Falin, Guo Yu, Liao Wenhe, et al. Collision detection technology of cable harness based on distance fields and sweep-and-prune algorithm. *Computer Engineering and Applications*, 2017, 53(10): 27-34 (in Chinese))
- 21 Macklin M, Erleben K, Müller M, et al. Local optimization for robust signed distance field collision//Proceedings of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques, 2020
- 22 Aguirre M, Avril S. An implicit 3D corotational formulation for frictional contact dynamics of beams against rigid surfaces using discrete signed distance fields. *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 371: 113275
- 23 You P, Liu Z, Ma Z. A contact formulation using local frame of SE(3) group for corotational beam against rigid solid via moving signed distance field. *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2024, 418: 116532
- 24 Jones MW, Sramek M. Discrete 3D distance fields: Techniques and applications. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2006, 12(4): 581-599
- 25 Koschier D, Deul C, Brand M, et al. An hp-adaptive discretization algorithm for signed distance field generation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2017, 23(10): 2208-2221
- 26 Barequet G, Har-Peled S. Efficiently approximating the minimum-volume bounding box of a point set in three dimensions. *Journal of Algorithms*, 2001, 38(1): 91-109
- 27 刘娜,毛晓菊.基于分离轴定理的碰撞检测算法.数字技术与应用,2012,8: 1 (Liu Na, Mao Xiaojie. Collision detection algorithm based on Separating Axis Theorem. *Digital Technology & Application*, 2012, 8: 1 (in Chinese))
- 28 洪嘉振.计算多体系统动力学.北京:高等教育出版社,1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multibody Systems. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))
- 29 Machado M, Moreira P, Flores P, et al. Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 53: 99-121
- 30 王庚祥,马道林,刘洋等.多体系统碰撞动力学中接触力模型的研究.力学学报,2022,54(12): 3239-3266 (Wang Gengxiang, Ma Daolin, Liu Yang, et al. Research progress of contact force models in the collision mechanics of multibody system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(12): 3239-3266 (in Chinese))