含约束临界 Kirchhoff 型约束变分问题极小解的存在性及其极限行为

杨华华, 张贻民*

武汉理工大学数学科学研究中心, 武汉 430070

E-mail: Yanghuahua123456@126.com, zhangym802@126.com

收稿日期: 2021-06-21; 接受日期: 2021-09-23; 网络出版日期: 2021-11-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771127) 和中央高校基本科研业务费专项基金 (批准号: WUT: 2020IB011 和 WUT: 2020IB017) 资助项目

摘要 非线性 Kirchhoff 型约束变分问题当非线性项只含一个幂次项且指数为约束临界 $p = 2 + \frac{8}{N}$ 时, 由现有文献可知该问题不存在极小解. 本文考虑了含低阶扰动项和约束临界指数项的 Kirchhoff 型约束变分问题, 利用伸缩技巧、集中紧原理和 Pohozaev 恒等式, 得到了扰动项指数和系数对该变分问题极小解存在性的影响, 并证明该极小解是相对应的 Kirchhoff 方程的基态解. 进一步, 本文通过精细的能量估计, 探讨扰动项指数趋于约束临界指数时极小能量和极小解的极限行为.

关键词 Kirchhoff 型 约束变分问题 极小解 集中紧原理

MSC (2020) 主题分类 35J20, 35J60

1 引言

本文考虑如下约束极小化问题:

$$e(c, \lambda) = \inf_{u \in S_c} E_\lambda(u), \quad (1.1)$$

其中 $c > 0$ 是一个常数, $\lambda \in \mathbb{R}$, $N \leq 3$ 且

$$E_\lambda(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx,$$
$$S_c := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = c^2 \right\},$$

常数 $a, b > 0$, $2 < q < p < 2^*$.

英文引用格式: Yang H H, Zhang Y M. Existence and limit behavior of minimizers of Kirchhoff-type constrained variational problems with constrained critical exponent (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1033–1056, doi: 10.1360/SSM-2021-0117

若 $b = 0$, 则上述问题即为经典的 Schrödinger 方程对应能量泛函约束在球 S_c 上的极小化问题. 相应极小化问题 (1.1) 极小解存在性的结论非常丰富. 对于该类问题的进展, Li 等^[1] 描述得非常细致, 感兴趣的读者可以阅读该文献及其相关参考文献.

若 $\lambda = 0$, 对于 (1.1) 极小解的存在性结论, 据我们所知, Ye^[2] 首先利用集中紧性原理考虑了问题 (1.1) 极小解的存在性, 并证明存在

$$c_* = \begin{cases} 0, & 2 < p < 2 + \frac{4}{N}, \\ a^{\frac{4}{N}} \|Q_p\|_2, & p = 2 + \frac{4}{N}, \\ \inf\{c \in (0, +\infty) : e(c, 0) < 0\}, & 2 + \frac{4}{N} < p < 2 + \frac{8}{N}, \end{cases}$$

其中 $Q_r(|x|)$ 是半线性椭圆型方程

$$-\Delta u + \frac{2r - N(r-2)}{N(r-2)}u = \frac{4}{N(r-2)}|u|^{r-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 2 < r < 2^* \quad (1.2)$$

在平移意义下唯一的径向正解, 这里 $u(x) \rightarrow 0$ (当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时). 当 $c > c_*$ 且 $p < 2 + \frac{8}{N}$ 时, 文献 [2] 利用集中紧原理证明了问题 (1.1) 存在极小解. 而当 $p \geq 2 + \frac{8}{N}$ 时, 问题 (1.1) 不存在极小解. 因此指数 $p = 2 + \frac{8}{N}$ 被称为问题 (1.1) 极小解存在与不存在的 L^2 约束临界指数. 当 $2 + \frac{4}{N} < p < 2 + \frac{8}{N}$ 时, 文献 [2] 利用伸缩性质和极限技巧证明了 $e(c, 0) < 0$, 因此没有得到 c_* 的具体值. Guo 和 Wang^[3] 利用方程 (1.2) 的正解 $Q_p(x)$ 做伸缩结合 Young 不等式得到了此时 c_* 的具体值. 进一步, Zeng 和 Zhang^[4] 利用能量估计技巧, 避开集中紧原理, 得到了问题 (1.1) 相应极小解的存在性和唯一性. 若 $p = 2 + \frac{8}{N}$, 由文献 [4, 5] 可知问题 (1.1) 不存在极小解; Ye^[6] 证明存在 $c^* = (\frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}})^{\frac{N}{8-2N}}$, 当 $c > c^*$ 时, 泛函 $E_0(u)$ 存在约束在 S_c 上的一个山路几何解. 进一步, 当 $c < c^*$ 时, Ye^[6] 通过引进一个扰动泛函 $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^4 dx$, 即考虑如下极小化问题:

$$e(c) = \inf_{u \in S_c} E(u),$$

其中

$$E(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^4 dx - \frac{1}{2 + \frac{8}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2 + \frac{8}{N}} dx,$$

在 a, b 和 $V(x)$ 满足一定条件下得到了 $e(c)$ 极小值解的存在性. 由于文献 [6] 中关于 a 和 b 均有限制, Zeng 和 Chen^[7] 引进了更一般的扰动项 $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^r dx$, 在不给 a 和 b 加限制的条件下, 得到了 $r \in [4, 2 + \frac{8}{N})$ 时 $e(c)$ 极小解的存在性. 对于问题 (1.1) 极小解的存在性及其渐近行为的类似研究, 可参见文献 [5, 8–10] 及其参考文献.

由于文献 [6, 7] 中含有位势函数 $V(x)$, 因此要求指数大于等于 4. 本文在此基础上, 给约束临界问题加一个一般的幂次型扰动项, 进一步探讨问题 (1.1) 中当 $p = 2 + \frac{8}{N}$ 时极小解的存在性与不存在性, 此时对扰动项的指数不再要求大于 4, 而是大于 2 就可以. 然后利用集中紧原理和 Pohozaev 恒等式等方法探讨参数 λ, c 和指数 q 对问题 (1.1) 极小解存在性的影响, 希望能将问题 (1.1) 极小解的存在性与 λ, c 和 q 的关系做一个细致的刻画. 本文接下来的叙述中, 对于 $E_\lambda(u)$ 中的指数 p , 如果没有特别说明, 都取为约束临界指数 p^* , 即 $p = p^* = 2 + \frac{8}{N}$; 而对参数 c^* , 都取

$$c^* = \left(\frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} \right)^{\frac{N}{8-2N}}.$$

本文首先考虑问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中极小解的不存在性, 得到如下结论:

定理 1.1 (1) 若 $2 < q < p^*$, 则对于任意 λ 和 $c > c^*$, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(2) 若 $2 < q < p^*$, 则对于任意 $\lambda < 0$, $c \leq c^*$, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(3) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c < c^*$, 则存在 $\lambda_2 = ac^{-\frac{4}{N}} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{N}{4}}$, 当 $\lambda \leq \lambda_2$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(4) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c = c^*$, 则存在 $\lambda_1 = a \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}} (\frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}})^{-\frac{2}{4-N}}$, 当 $\lambda \leq \lambda_1$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(5) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c = c^*$, 则存在 $\lambda_4 = a[(\frac{b}{2})^{\frac{2}{4-N}} \frac{N}{N+2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{2(N-2)}{4-N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx]^{-1}$, 当 $\lambda > \lambda_4$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(6) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c < c^*$, 则存在 λ_3 (定义见引理 2.1), 当 $\lambda \leq \lambda_3$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(7) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c = c^*$, 则问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

注 1.1 若 $q = p^*$, 则利用本文接下来的技巧能够顺利得到问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中极小解的不存在性. 实际上, 由 (2.4) 可得

$$f(s) = \frac{a}{2}s + \frac{b}{4}s^2 \left[1 - (1+\lambda) \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]. \quad (1.3)$$

设 $c_{p^*} = (\frac{1}{1+\lambda})^{\frac{N}{8-2N}} c^*$, 则当 $c \leq c_{p^*}$ 时, (1.3) 显示 $e(c, \lambda) \geq f(s) > 0$. 这与 (2.6) 矛盾, 此时问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解. 进一步, 由 (2.5) 和 (2.2) 可得

$$E_\lambda(u_t) = \frac{a}{2}c^2t^2 + \frac{bc^4t^4}{4} \left[1 - (1+\lambda) \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]. \quad (1.4)$$

由 (1.4) 可知, 若 $c > c_{p^*}$, 则 $e(c, \lambda) = -\infty$. 因此, 当 $q = p^*$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

注 1.2 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$ 且 $c = c^*$, 则求解问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中极小解相当于考虑 $b = 0$ 时约束极小解的存在性. 由文献 [11] 可知此时不存在极小解. 结合定理 1.1(4) 和 1.1(5), 可以猜测 $\lambda_4 \geq \lambda_1$, 通过计算可得

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}} \geq \frac{N}{N+2} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx. \quad (1.5)$$

进一步, 利用能量估计和集中紧引理, 可以得到如下相关的存在性结论:

定理 1.2 假设 $\lambda > 0$.

(1) 若 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$, 则对于任意 $c \leq c^*$, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中至少存在一个极小解.

(2) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $c < c^*$ 且 (1.5) 成立, 则存在

$$\lambda_5 = \frac{a(N+2) \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}}{Nc^{\frac{4}{N}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}},$$

对所有的 $\lambda > \lambda_5$, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中至少存在一个极小解.

(3) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $c < c^*$ 且

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q \geq \frac{2}{q} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{q-2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_q^q,$$

则存在 λ_6 (定义见引理 2.4), 当 $\lambda > \lambda_6$ 时, 问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中至少存在一个极小解.

注 1.3 结合引理 2.1 可知, 若 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$, 相应极小解对应极小值 $e(c, \lambda) \geq f(s_1)$; 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, 极小解对应极小值 $e(c, \lambda) \geq f(s_2)$; 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $c < c^*$, 极小解对应极小值 $e(c, \lambda) \geq f(s_3)$. 本文讨论问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中极小解的存在性与不存在性时, 都是先预定 $c < c^*$ 或 $c = c^*$, 然后讨论 λ 的范围对问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中极小解存在性与不存在性的影响. 由 λ_i ($i = 2, 3, 5, 6$) 的定义可知, λ 与 c^{-1} 同增减. 因此, 当 $\lambda \leq \lambda_i$ ($i = 2, 3$) 时, 可以相应地转化成讨论存在 c_i ($i = 2, 3$), 使得 $c \leq c_i$ ($i = 2, 3$); 或者当 $\lambda > \lambda_i$ ($i = 5, 6$) 时, 可以相应地转化成讨论存在 c_i ($i = 5, 6$), 使得 $c > c_i$ ($i = 5, 6$).

注 1.4 定理 1.2(2) 成立需要满足条件 (1.5), 这样的假设是为了保证定理 1.1(3) 和 1.2(2) 不冲突. 实际上, 若两种情形同时成立需要满足 $\lambda_2 \leq \lambda_5$, 通过计算可得 (1.5) 成立. 进一步由引理 2.4(2) 可知, 当 $\lambda > \lambda_5$ 时, 成立

$$c^{\frac{4}{N}} > \frac{a(N+2)\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}}{N\lambda\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{2+\frac{4}{N}}}.$$

结合 $c < c^*$ 可得

$$[a(N+2)\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}(\lambda N\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{2+\frac{4}{N}})^{-1}]^{\frac{N}{4}} < \left(\frac{b}{2}\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}\right)^{\frac{N}{8-2N}},$$

通过计算有

$$\left(\frac{a(N+2)}{\lambda N}\right)^{\frac{N}{4}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{N(N-2)}{2(N-4)}} < \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{N}{8-2N}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{1+\frac{N}{2}}. \quad (1.6)$$

利用 Hölder 不等式有

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{2+\frac{4}{N}} \leq \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2 \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{8}{N}}^{\frac{N+4}{N}}.$$

将上式代入 (1.6) 可得

$$\left(\frac{a(N+2)}{\lambda N}\right)^{\frac{N}{4}} \left(\frac{2}{b}\right)^{\frac{N}{8-2N}} \left(\frac{N+4}{N}\right)^{\frac{N}{8}} < \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{8}{N}}^{\frac{8-N}{4-N}}. \quad (1.7)$$

易知可选取合适的 λ 使得 (1.7) 成立.

注 1.5 定理 1.2(3) 成立需要满足条件 (1.8) 是为了保证定理 1.1(6) 和 1.2(3) 不冲突, 可知这两种情形同时成立需要 $\lambda_3 \leq \lambda_6$ 成立. 通过计算可得

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q \geq \frac{2}{q} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{q-2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_q^q. \quad (1.8)$$

若取 $q = 2 + \frac{4}{N}$, (1.8) 就是 (1.5). 由 λ_6 的定义可知

$$\lambda_6 = \frac{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q}{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx} \left(\frac{2a}{8-N(q-2)}\right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1-(\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}}-2]}{N(q-2)-4}\right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}}.$$

结合引理 2.5 可知当 $q \rightarrow p^*$ 时, 有 $\lambda_6 \rightarrow \lambda_{p^*}$. 因此可以进一步估计 $\lambda > \lambda_{p^*}$ 且 $q \rightarrow p^*$ 时 $e(c, \lambda)$ 的能量极限行为和对应极小解的极限行为.

假设 u 是问题 (1.1) 的一个极小解, 则可知存在 Lagrange 乘子 μ 使得 u 是方程

$$-\left(a+b \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx\right) \Delta u=\mu u+\left|u\right|^{\frac{8}{N}} u+\lambda\left|u\right|^{q-2} u \quad (1.9)$$

的一个正规化解.

推论 1.1 假设 μ 是方程 (1.9) 中的 Lagrange 乘子, 则 $\mu < 0$.

证明 方程 (1.9) 两边同时乘以 u 再积分, 可得

$$\mu c^2=a \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx+b\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx\right)^2-\int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^{2+\frac{8}{N}} dx-\lambda \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx. \quad (1.10)$$

对于 (1.9), 有如下 Pohozaev 恒等式:

$$\frac{N-2}{2}\left(a+b \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx\right) \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx-\frac{N}{p} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^p dx-\frac{\lambda N}{q} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx=\frac{N}{2} \mu c^2. \quad (1.11)$$

结合 (1.10) 和 (1.11) 有

$$\begin{aligned} \mu c^2 &= \frac{2N}{N-2}\left(\frac{N}{2(N+4)} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^{2+\frac{8}{N}} dx+\frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx+\frac{1}{2} \mu c^2\right)-\int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^{2+\frac{8}{N}} dx-\lambda \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx \\ &=\left(\frac{N^2}{(N-2)(N+4)}-1\right) \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^{2+\frac{8}{N}} dx+\left(\frac{2N}{N-2} \frac{\lambda}{q}-\lambda\right) \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx+\frac{N}{N-2} \mu c^2. \end{aligned}$$

此时

$$\mu=-\frac{4-N}{(N+4) c^2} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^{2+\frac{8}{N}} dx-\frac{2 N-q(N-2)}{2 q c^2} \lambda \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx < 0.$$

证毕. □

假设 $u_\lambda(x)$ 为问题 (1.1) 当 $p > 4$ 时的极小解, 则 $u_\lambda(x)$ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$-\left(a+b \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx\right) \Delta u=\mu u+\left|u\right|^{p-2} u+\lambda\left|u\right|^{q-2} u. \quad (1.12)$$

方程 (1.12) 对应的能量泛函为

$$I_\lambda(u)=\frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx+\frac{b}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 dx\right)^2-\frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^2 dx-\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^p dx-\frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N}\left|u\right|^q dx. \quad (1.13)$$

用集合

$$N_\lambda=\{u(x): 0 \neq u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \text { 且 } u \text { 为方程 (1.12) 的解}\}$$

表示方程 (1.12) 的非平凡解集, 并将其基态解集定义为

$$G_\lambda:=\{u(x): u \in N_\lambda \text { 且对于任意 } \omega \in N_\lambda \text { 有 } I_\lambda(u) \leq I_\lambda(\omega)\}.$$

定理 1.3 设 u_λ 为问题 (1.1) 当 $p > q > 4$ 时在空间 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的极小解, 则 u_λ 满足 Euler-Lagrange 方程 (1.12) 且 $u_\lambda \in G_\lambda$. 反之, 对于任意 $v \in G_\lambda$, v 为问题 (1.1) 当 $p > q > 4$ 时在空间 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的极小解.

推论 1.2 问题 (1.1) 当 $p = p^*$ 且 $q > 4$ 时在空间 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的极小解是方程 (1.9) 在空间 $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 中的基态解.

设 $\lambda_q = \frac{b}{2} \|Q_q\|_2^{q-2} [1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}] c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}}$, 则可得如下能量估计:

定理 1.4 假设 $q \in (2 + \frac{4}{N}, p^*)$, $c < c^*$ 且 $\lambda > \lambda_{p^*}$, 则

$$e(c, \lambda) = -\frac{b(p^* - q)}{4(q - 2)} \left(\frac{\lambda(q - 2)}{\lambda_q(p^* - 2)} \right)^{\frac{p^* - 2}{p^* - q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N} - 2} \right] (1 + o(1)),$$

且当 $q \rightarrow p^*$ 时, $e(c, \lambda) \rightarrow -\infty$.

注 1.6 当 $c = c^*$ 时, 由定理 1.2(1) 知, 对于任意 λ , 问题 (1.1) 存在极小解. 而由定理 1.1(4) 和 1.1(5) 可知, 当 $q = 2 + \frac{4}{N}$ 且 $\lambda \leq \lambda_1$ 或者 $\lambda > \lambda_4$ 时, 问题 (1.1) 不存在极小解. 理论上可以类似定理 1.4 得到 $e(c, \lambda)$ 当 $q \rightarrow 2 + \frac{4}{N}$ 时的极限行为. 但是事实上, 利用定理 1.4 的证明方法令 $\lambda_q = a \|Q_q\|_2^{q-2} c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}}$, 通过计算可得 $\lambda_{2+\frac{4}{N}} = \lambda_1$ 且

$$e(c, \lambda) \geq -\frac{a}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_q} \frac{2(q-2)}{p^* - 2} \right)^{\frac{p^* - 2}{p^* + 2 - 2q}} \frac{p^* + 2 - 2q}{2(q - 2)}. \quad (1.14)$$

当 $\lambda < \lambda_1$ 且 $q \rightarrow 2 + \frac{4}{N}$ 时, 通过计算可知 (1.14) 的右边趋于 0.

进一步令

$$u_t = \frac{ct^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(tx)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2} \quad \text{和} \quad c^2 t^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_q} \frac{2(q-2)}{p^* - 2} \right)^{\frac{p^* - 2}{p^* + 2 - 2q}},$$

则有

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} \left(\frac{1}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_q} \frac{2(q-2)}{p^* - 2} \right)^{\frac{N(q-2)(p^*-2)}{4(p^*+2-2q)}} \\ &\quad - \frac{a}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_q} \frac{2(q-2)}{p^* - 2} \right)^{\frac{p^* - 2}{p^* + 2 - 2q}} \frac{p^* + 2 - 2q}{2(q - 2)}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

类似引理 2.5 中的证明可知函数

$$\frac{1}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q}$$

关于 q 是连续的, 但是此时 $q \rightarrow 2 + \frac{4}{N}$, 极限

$$\lim_{q \rightarrow 2 + \frac{4}{N}} \left(\frac{1}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \right)$$

不再趋于 0. 因此用该方法很难得到 $e(c, \lambda)$ 当 $q \rightarrow 2 + \frac{4}{N}$ 时的下界估计, 除非条件

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}} = \frac{N}{N+2} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx$$

成立, 该条件即是注 3.1 中 $q = 2 + \frac{4}{N}$ 时的情形. 出现这样情形的主要困难应该是非线性项是组合非线性项, 所对应的最佳 Gagliardo-Nirenberg 不等式系数与非线性项指数有关, 而本文考虑的能量泛函又包括两个梯度项, 讨论起来会更复杂, 此时的极限行为讨论可能需要更细致的方法.

定理 1.5 假设 $u_q \geq 0$ 是问题 (1.1) 当 $q \in (2 + \frac{4}{N}, p^*)$, $c < c^*$ 且 $\lambda > \lambda_{p^*}$ 时的一个极小值点, $m_q \triangleq (\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)})^{\frac{p^*-2}{p^*-q}}$. 令

$$\epsilon_q = m_q^{-\frac{1}{4}}, \quad \tilde{\omega}_q(x) = \epsilon_q^{\frac{N}{2}} u_q(\epsilon_q x), \quad \text{其中} \quad m_q = \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}}. \quad (1.16)$$

则存在 $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 以及序列 $\{\tilde{y}_{\epsilon_q}\} \subset \mathbb{R}^N$, 使得当 q 趋近于 p^* 时, 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有

$$\omega_q(x) = \tilde{\omega}_q(x + \tilde{y}_{\epsilon_q}) \rightarrow \omega_0,$$

并且对于某些 $x_0 \in \mathbb{R}^N$, 有 $\omega_0 = \frac{1}{\|Q_{p^*}\|_2} Q_{p^*}(|x - x_0|)$.

本文中, Hilbert 空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的范数表示为 $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$. $\|u\|_r$ 表示 $L^r(\mathbb{R}^N)$ ($2 \leq r < 2^*$) 中的范数. $C, C_1, C_2, \dots$ 表示各种正的常数.

2 预备知识

在开始本节之前, 先介绍如下最佳 Gagliardo-Nirenberg 不等式^[12]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r dx \leq \frac{r}{2\|Q_r\|_2^{r-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(r-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2r-N(r-2)}{4}}, \quad (2.1)$$

其中 $r \in (2, 2^*)$. 上式等号成立当且仅当 $u(x) = Q_r(x)$, 函数 $Q_r(x)$ 是方程 (1.2) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的唯一 (平移意义下) 径向对称正解. 进一步, 针对方程 (1.2), 利用 Pohozaev 恒等式和方程本身可知函数 $Q_r(|x|)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q_r(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Q_r(x)|^2 dx = \frac{2}{r} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_r(x)|^r dx. \quad (2.2)$$

对于任意 $u \in S_c$, 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式 (2.1), 可以得到

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &\geq \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{b}{4} - \frac{c^{\frac{8}{N}-2}}{2\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \\ &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

令 $s = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$, 定义

$$f(s) = \frac{a}{2}s + \frac{b}{4}s^2 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} s^{\frac{N(q-2)}{4}}. \quad (2.4)$$

由 (2.3) 可以得到 $E_\lambda(u) \geq f(s)$.

引理 2.1 假设函数 $f(s)$ ($s > 0$) 定义如上. 对 $c > c^*$ 且任意的 λ 或者 $c \leq c^*$ 且 $\lambda < 0$, 函数 $f(s)$ 没有极小值. 对于 $\lambda > 0$ 且 $c \leq c^*$, 有如下结论:

(1) 若 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$, 则函数 $f(s)$ 存在一个极小值点 s_1 .

(2) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, 当 $c = c^*$ 时, 函数 $f(s)$ 不存在极小值; 当 $c < c^*$ 时, 存在 $\lambda_2 = ac^{-\frac{N}{4}}\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{N}{4}}$, 若 $\lambda \leq \lambda_2$, 函数 $f(s)$ 不存在极小值; 若 $\lambda > \lambda_2$, 函数 $f(s)$ 存在一个极小值点

$$s_2 = \frac{\lambda c^{\frac{4}{N}} - a\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}}{b\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} - 2c^{\frac{8}{N}-2}} \cdot \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}},$$

且满足

$$f(s) \geq -\frac{1}{4} \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} (\lambda c^{\frac{4}{N}} - a \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}})^2}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} (b \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} - 2c^{\frac{8}{N}-2})}.$$

(3) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, 当 $c = c^*$ 时, 函数 $f(s)$ 没有极小值; 当 $c < c^*$ 时, 存在

$$\lambda_3 = 2 \|Q_q\|_2^{q-2} \left(\frac{2a}{8 - N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2) - 4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}},$$

若 $\lambda \leq \lambda_3$, 则函数 $f(s)$ 不存在极小值点; 若 $\lambda > \lambda_3$, 则函数 $f(s)$ 存在一个极小值点

$$s_3 = \frac{2a[N(q-2) - 4]}{b[8 - N(q-2)][1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]},$$

且

$$f(s) \geq \left\{ \left(\frac{2a}{8 - N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2) - 4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} \right\} \left(\frac{2a[N(q-2) - 4]}{b[8 - N(q-2)][1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]} \right)^{\frac{N(q-2)}{4}}.$$

证明 由于 $2 < q < 2 + \frac{8}{N}$, 通过计算可知 $0 < \frac{N(q-2)}{4} < 2$ 显然成立. 因此由 (2.4) 可知, 对于任意 λ , 若 $c > c^*$, 则当 $s \rightarrow \infty$ 时, $f(s) \rightarrow -\infty$, 此时函数 $f(s)$ 没有极小值. 若 $c \leq c^*$ 且 $\lambda < 0$, 则 (2.4) 显示对于任意 $s > 0$, $f(s) > 0$. 因此当 $s > 0$ 时, 函数 $f(s)$ 没有极小值.

(1) $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$, 即 $0 < \frac{N(q-2)}{4} < 1$. 由 (2.4) 可以得到, 当 $c \leq c^*$ 时, 函数 $f(s)$ 存在一个极小值点, 用 s_1 来表示.

(2) $q = 2 + \frac{4}{N}$. 如果 $c = c^*$, 由 (2.4) 可以得到

$$f(s) = \frac{s}{2} \left(a - \frac{\lambda (c^*)^{\frac{4}{N}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}} \right) = \frac{s}{2} \left[a - \frac{\lambda (\frac{b}{2})^{\frac{2}{4-N}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{16}{N(4-N)}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}} \right].$$

令 $\lambda_1 = a \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}} (\frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}})^{-\frac{2}{4-N}}$, 若 $\lambda > \lambda_1$, 当 $s \rightarrow \infty$ 时, 有 $f(s) \rightarrow -\infty$, 此时函数 $f(s)$ 没有极小值. 对于 $\lambda \leq \lambda_1$, 当 $s > 0$ 时, 有 $f(s) \geq 0$, 此时同样证得函数 $f(s)$ 没有极小值.

如果 $c < c^*$, 由 (2.4) 可以得到

$$f(s) = \frac{s}{2} \left(a - \frac{\lambda c^{\frac{4}{N}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}} \right) + \frac{bs^2}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right],$$

令 $\lambda_2 = ac^{-\frac{N}{4}} \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{N}{4}}$, 则对于任意 $\lambda \leq \lambda_2$, 可以得到 $f(s) \geq 0$, 即当 $s > 0$ 时, 函数 $f(s)$ 没有极小值. 当 $\lambda > \lambda_2$ 时, 对于

$$f'(s) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{\lambda c^{\frac{4}{N}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}} \right) + \left(\frac{b}{2} - \frac{c^{\frac{8}{N}-2}}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}} \right) s = 0,$$

有一个解

$$s_2 = \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} (\lambda c^{\frac{4}{N}} - a \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}})}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}} (b \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} - 2c^{\frac{8}{N}-2})}.$$

易知 s_2 是 $f(s)$ 的极小值点并且

$$f(s_2) = -\frac{1}{8} \left(\frac{\lambda c^{\frac{4}{N}}}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}}} - a \right)^2 \left[\frac{b}{2} - \frac{c^{\frac{8}{N}-2}}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}} \right]^{-1} = -\frac{1}{4} \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} (\lambda c^{\frac{4}{N}} - a \|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{4}{N}})^2}{\|Q_{2+\frac{4}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} (b \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} - 2c^{\frac{8}{N}-2})}.$$

(3) $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, 即 $1 < \frac{N(q-2)}{4} < 2$. 对于 $c = c^*$, 由 (2.4) 知, 当 $s \rightarrow \infty$ 时, 有 $f(s) \rightarrow -\infty$, 此时函数 $f(s)$ 不存在极小值.

如果 $c < c^*$, 利用 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}s + \frac{b}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] s^2 &= \alpha \left(\frac{a}{2\alpha} s \right) + \beta \left(\frac{b}{4\beta} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] s^2 \right) \\ &\geq \left(\frac{a}{2\alpha} \right)^\alpha s^\alpha \left(\frac{b}{4\beta} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \right)^\beta s^{2\beta} \\ &= \left(\frac{a}{2\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{b}{4\beta} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \right)^\beta s^{\alpha+2\beta}. \end{aligned}$$

令 $\alpha + 2\beta = \frac{N(q-2)}{4}$ 且 $\alpha + \beta = 1$, 通过计算可以得到 $\alpha = \frac{8-N(q-2)}{4}$ 以及 $\beta = \frac{N(q-2)-4}{4}$. 将 α 和 β 分别代入, 有

$$\left(\frac{a}{2\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{4\beta} \right)^\beta s^{\alpha+2\beta} = \left(\frac{2a}{8-N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2)-4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} s^{\frac{N(q-2)}{4}}.$$

上述利用 Young 不等式运算中等号保持当且仅当 $\frac{a}{2\alpha}s = \frac{b}{4\beta}[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]s^2$ 成立, 即

$$s = s_3 \triangleq \frac{2a[N(q-2)-4]}{b[8-N(q-2)][1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}$$

时等号成立. 进一步可得

$$\begin{aligned} f(s) \geq f(s_3) &\triangleq \left\{ \left(\frac{2a}{8-N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2)-4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} \right\} \left(\frac{2a[N(q-2)-4]}{b[8-N(q-2)][1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]} \right)^{\frac{N(q-2)}{4}}. \end{aligned}$$

设

$$\lambda_3 = 2\|Q_q\|_2^{q-2} \left(\frac{2a}{8-N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2)-4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}}.$$

若 $\lambda \leq \lambda_3$, 则 $f(s) \geq 0$, 此时函数 $f(s)$ 不存在 $s > 0$ 的极小值点. 若 $\lambda > \lambda_3$, 则 $f(s)$ 有极小值 $f(s_3)$. 证毕. $\square$

令

$$u_t = \frac{ct^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(tx)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2}.$$

通过计算易得 $u_t \in S_c$, 并且有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_t|^2 dx = c^2 t^2, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^q dx = \frac{c^q t^{\frac{N(q-2)}{2}}}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx.$$

因此, 可以得到

$$E_\lambda(u_t) = \frac{a}{2}c^2t^2 + \frac{b}{4}c^4t^4 - \frac{c^p t^{\frac{N(p-2)}{2}}}{p\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^p} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^p dx - \frac{\lambda c^q t^{\frac{N(q-2)}{2}}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx. \quad (2.5)$$

当 $t \rightarrow 0$ 时, 有 $E_\lambda(u_t) \rightarrow 0$, 并且对于任意 c 和 λ , 有

$$e(c, \lambda) \leq 0. \quad (2.6)$$

引理 2.2 当 $c > c^*$ 时, 对于任意 λ 和任意 $q \in (2, 2 + \frac{8}{N})$, 有 $e(c, \lambda) = -\infty$. 当 $\lambda > 0$ 时, 可得

(1) 若 $c < c^*$ 且 $q = 2 + \frac{4}{N}$, 则对于任意 $\lambda \leq \lambda_2$, 有 $e(c, \lambda) \geq 0$;

(2) 若 $c = c^*$, $q = 2 + \frac{4}{N}$, 则对于任意 $\lambda \leq \lambda_1$, 有 $e(c, \lambda) \geq 0$;

(3) 若 $c = c^*$, $q = 2 + \frac{4}{N}$, 则存在 $\lambda_4 = a[(\frac{b}{2})^{\frac{2}{4-N}} \frac{N}{N+2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{2(N-2)}{4-N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx]^{-1}$, 当 $\lambda > \lambda_4$ 时, $e(c, \lambda) = -\infty$;

(4) 若 $c = c^*$ 且 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, 则有 $e(c, \lambda) = -\infty$.

证明 设

$$u_t = \frac{ct^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(tx)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2},$$

则 $u_t \in S_c$. 由 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \frac{a}{2}c^2t^2 + \frac{c^4t^4}{2} \left(\frac{b}{2} - \frac{c^{\frac{8}{N}-2}}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}} \right) - \frac{\lambda c^q t^{\frac{N(q-2)}{2}}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx \\ &= \frac{a}{2}c^2t^2 + \frac{bc^4t^4}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^q t^{\frac{N(q-2)}{2}}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

由 (2.7) 可知, 若 $c > c^*$, 对于任意 λ 和 q , 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $E_\lambda(u_t) \rightarrow -\infty$, 因此 $e(c, \lambda) = -\infty$.

(1) $c < c^*$ 且 $q = 2 + \frac{4}{N}$. 由引理 2.1(2) 可得, 当 $\lambda \leq \lambda_2$ 时, 对于任意 $u \in S_c$, 有 $E_\lambda(u) \geq f(s) \geq 0$, 即 $e(c, \lambda) \geq 0$.

(2) $c = c^*$ 且 $q = 2 + \frac{4}{N}$. 由引理 2.1(2) 可知, 当 $\lambda \leq \lambda_1$ 时, $E_\lambda(u) \geq f(s) \geq 0$, 即 $e(c, \lambda) \geq 0$.

(3) $c = c^*$ 且 $q = 2 + \frac{4}{N}$. 此时 (2.7) 为

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \frac{a}{2}(c^*)^2t^2 - \frac{\lambda(c^*)^{2+\frac{4}{N}}t^2}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx \\ &= \left[\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2} \right)^{\frac{2}{4-N}} \frac{\lambda N}{2(N+2)} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{2(N-2)}{4-N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx \right] (c^*)^2t^2. \end{aligned}$$

令 $\lambda_4 = a[(\frac{b}{2})^{\frac{2}{4-N}} \frac{N}{N+2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{2(N-2)}{4-N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx]^{-1}$, 当 $\lambda > \lambda_4$ 时, 若 $t \rightarrow \infty$, 则 $E_\lambda(u_t) \rightarrow -\infty$, 因此 $e(c, \lambda) = -\infty$.

(4) $c = c^*$ 且 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$. 此时, $2 < \frac{N(q-2)}{2} < 4$. 由 (2.7) 知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $E_\lambda(u_t) \rightarrow -\infty$. 这意味着 $e(c, \lambda) = -\infty$. $\square$

引理 2.3 假设当 $q < 2 + \frac{4}{N}$ 时 $c \in (0, c^*]$, 当 $2 + \frac{4}{N} \leq q < p^*$ 时 $c \in (0, c^*)$. 则对于任意 $\gamma \in (0, c)$, 如果 $e(c, \lambda) < 0$, 则有

$$e(c, \lambda) < e(\gamma, \lambda) + e(\sqrt{c^2 - \gamma^2}, \lambda).$$

证明 对于任意 $u \in S_c$, 当 $q < 2 + \frac{4}{N}$ 且 $c \in (0, c^*)$ 时, 有 $0 < \frac{N(q-2)}{4} < 1$; 当 $2 + \frac{4}{N} \leq q < p^*$ 且 $c \in (0, c^*)$ 时, 有 $1 < \frac{N(q-2)}{4} < 2$, 则由 (2.3) 可以得到两种情形下均有 $E_\lambda(u)$ 下方有界. 假设 $\{u_n\}$ 是 $e(c, \lambda)$ 的极小化序列. 由于 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 = c^2$ 和 (2.3) 成立, 所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_\lambda(u_n) = e(c, \lambda)$, 并且 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 因此, $e(c, \lambda) > -\infty$.

定义 $\bar{u}_n = u_n(\theta^{-\frac{2}{N}}x)$, $\theta > 1$, 则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_n|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\theta^{-\frac{2}{N}}x)|^2 dx = \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx = \theta^2 c^2, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}_n|^2 dx &= \theta^{-\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(\theta^{-\frac{2}{N}}x)|^2 dx = \theta^{2-\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}_n|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(\theta^{-\frac{2}{N}}x)|^p dx = \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx.\end{aligned}$$

将 $\bar{u}_n$ 代入 (1.1), 可得

$$\begin{aligned}E_\lambda(\bar{u}_n) &= \frac{a}{2} \theta^{2-\frac{4}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{b}{4} \theta^{4-\frac{8}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 - \frac{\theta^2}{2 + \frac{8}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2+\frac{8}{N}} dx - \frac{\lambda \theta^2}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx \\ &= \frac{a}{2} \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{b}{4} \theta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 - \frac{\theta^2}{2 + \frac{8}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2+\frac{8}{N}} dx - \frac{\lambda \theta^2}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx \\ &\quad + \frac{b}{4} (\theta^{2-\frac{8}{N}} - 1) \theta^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 + \frac{a}{2} (\theta^{-\frac{4}{N}} - 1) \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leq \theta^2 \left[\frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \right)^2 - \frac{1}{2 + \frac{8}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2+\frac{8}{N}} dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q dx \right] \\ &= \theta^2 E_\lambda(u_n).\end{aligned}$$

这表明 $e(\theta c, \lambda) \leq \theta^2 e(c, \lambda)$. 由经典的集中紧原理可得引理结论. $\square$

引理 2.4 假设 $\lambda > 0$, 则当如下条件之一成立时有 $e(c, \lambda) < 0$:

- (1) $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$ 且对于任意 $c \leq c^*$.
- (2) $q = 2 + \frac{4}{N}$, $c < c^*$ 且存在

$$\lambda_5 = \frac{a(N+2) \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}}{N c^{\frac{4}{N}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{2+\frac{4}{N}}},$$

使得 $\lambda > \lambda_5$.

- (3) $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $c < c^*$ 且存在

$$\lambda_6 = \frac{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q}{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx} \left(\frac{2a}{8 - N(q-2)} \right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2) - 4} \right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} \cdot c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}},$$

使得 $\lambda > \lambda_6$.

证明 (1) 若 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$, 由 (2.7) 容易验证, 对于所有的 $0 < c \leq c^*$, 有 $e(c, \lambda) < 0$ 成立.

- (2) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, 由 (2.7) 可以得到

$$E_\lambda(u_t) = \left[\frac{a}{2} - \frac{\lambda N c^{\frac{4}{N}}}{2(N+2) \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{4}{N}} dx \right] c^2 t^2 + \frac{b c^4 t^4}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right].$$

设

$$\lambda_5 = \frac{a(N+2)\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2+\frac{4}{N}}}{Nc^{\frac{4}{N}}\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_{2+\frac{4}{N}}^{2+\frac{4}{N}}},$$

则对于所有的 $\lambda > \lambda_5$, 可得 $e(c, \lambda) \leq \inf_{t>0} E_\lambda(u_t) < 0$.

(3) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, 由 (2.7) 可以得到

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \frac{a}{2}c^2t^2 + \frac{bc^4t^4}{4}\left[1 - \left(\frac{c}{c^*}\right)^{\frac{8}{N}-2}\right] - \frac{\lambda c^qt^{\frac{N(q-2)}{2}}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{bc^2t^2}{4}\left[1 - \left(\frac{c}{c^*}\right)^{\frac{8}{N}-2}\right] - \frac{\lambda c^{q-2}t^{\frac{N(q-2)}{2}-2}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx\right)c^2t^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

令

$$\zeta(t) = \frac{a}{2} + \frac{bc^2t^2}{4}\left[1 - \left(\frac{c}{c^*}\right)^{\frac{8}{N}-2}\right] - \frac{\lambda c^{q-2}t^{\frac{N(q-2)}{2}-2}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx,$$

则有

$$\zeta'(t) = \frac{bc^2t}{2}\left[1 - \left(\frac{c}{c^*}\right)^{\frac{8}{N}-2}\right] - \left(\frac{N(q-2)-4}{2}\right) \frac{\lambda c^{q-2}t^{\frac{N(q-2)}{2}-3}}{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx.$$

通过计算 $\zeta'(t) = 0$ 可得, 当

$$t_1 = \left(\frac{bqc^{4-q}\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{\lambda(N(q-2)-4) \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}\right)^{\frac{2}{N(q-2)-8}}$$

时, $\zeta(t)$ 取得最小值, 其最小值为

$$\zeta(t_1) = \frac{a}{2} - \frac{(8 - N(q-2))bc^2[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{4N(q-2) - 16} \left(\frac{bqc^{4-q}\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{\lambda(N(q-2)-4) \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}\right)^{\frac{4}{N(q-2)-8}}.$$

假设

$$\lambda_6 = \frac{q\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q}{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx} \left(\frac{2a}{8 - N(q-2)}\right)^{\frac{8-N(q-2)}{4}} \left(\frac{b[1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]}{N(q-2) - 4}\right)^{\frac{N(q-2)-4}{4}} c^{-\frac{2q-N(q-2)}{2}},$$

则当 $\lambda > \lambda_6$ 时, 有

$$e(c, \lambda) \leq E_\lambda(u_{t_1}) = t_1^2 \zeta(t_1) < 0.$$

证毕. □

引理 2.5 假设函数 Q_q 是方程 (1.2) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中正的径向基态解, 则

$$\lim_{q \nearrow p^*} \|Q_q\|_2^{q-2} = \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}.$$

证明 由于 Gagliardo-Nirenberg 不等式 (2.1) 是最佳形式, 因此有

$$\frac{2\|Q_q\|_2^{q-2}}{q} = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{N(q-2)}{4}} (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx}. \quad (2.9)$$

任取 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, 容易证明

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \text{ 及 } \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q dx \text{ 均为 } q \in \left[3, 2 + \frac{8}{N} \right] \text{ 上的连续函数.}$$

记

$$F(q) = \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx)^{\frac{N(q-2)}{4}} (\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q dx},$$

则 $F(q)$ 在 $q \in [3, 2 + \frac{8}{N}]$ 上为连续函数且恒大于 0. 再由闭区间上连续函数的性质知存在 $C_1 > 0$ (与 q 无关), 使得

$$F(q) \leq C_1. \quad (2.10)$$

结合 (2.9) 得

$$\frac{2\|Q_q\|_2^{q-2}}{q} = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{N(q-2)}{4}} (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx} \leq F(q) \leq C_1.$$

从而

$$\|Q_q\|_2^{q-2} \leq \frac{q}{2} C_1 \leq 5C_1 \Rightarrow \|Q_q\|_2^2 \leq (5C_1)^{\frac{2}{q-2}} \leq 25 \max\{1, C_1^2\} \triangleq \tilde{C}_1, \quad (2.11)$$

其中常数 $\tilde{C}_1$ 不依赖于 $q \in [3, 2 + \frac{8}{N}]$.

进一步, 由于 Q_q 满足方程 (1.2), 从而由 (2.2) 和 (2.11) 可得, 存在不依赖于 $q \in [3, 2 + \frac{8}{N}]$ 的常数 $\bar{C}_1 > 0$, 使得

$$\|Q_q\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Q_q|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |Q_q|^2 dx \leq \bar{C}_1. \quad (2.12)$$

下面证明 $\|Q_q\|^2$ 有一致正下界. 事实上, 由内插不等式知

$$\|u\|_q \leq \|u\|_2^{\theta_q} \|u\|_{2+\frac{8}{N}}^{1-\theta_q}, \quad \theta_q = \frac{8-N(q-2)}{4q}, \quad \forall u \in L^2 \cap L^{2+\frac{8}{N}}. \quad (2.13)$$

在 (2.1) 中取 $r = 2 + \frac{8}{N}$, 代入上式有

$$\begin{aligned} \|u\|_q^q &\leq \|u\|_2^{q\theta_q} \|u\|_{2+\frac{8}{N}}^{(1-\theta_q)q} \\ &\leq \|u\|_2^{q\theta_q} \left[\frac{N+4}{N\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{4-N}{N}} \right]^{\frac{N}{2N+8}(1-\theta_q)q} \\ &= \left(\frac{N+4}{N} \right)^{\frac{N(q-2)}{8}} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{2-q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}} \\ &\leq A \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{2q-N(q-2)}{4}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中 $A = \max\{1, \frac{N+4}{N}\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{-\frac{8}{N}}\}$ 对于任意 $q \in [3, 2 + \frac{8}{N}]$ 成立. 显然 A 与 q 无关. 对比 (2.1) 和 (2.14), 可以得到

$$\frac{q}{2\|Q_q\|_2^{q-2}} \leq A \Rightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{q}{2A} \leq \|Q_q\|_2^{q-2}. \quad (2.15)$$

根据 (2.15) 和 (2.2) 知, 存在与 q 无关的 $B > 0$, 使得

$$\|Q_q\|^2 \geq B. \quad (2.16)$$

(2.12) 和 (2.16) 表明存在不依赖于 q 的常数 B 和 $\bar{C}_1$, 使得

$$B \leq \|Q_q\|^2 \leq \bar{C}_1. \quad (2.17)$$

由于 $Q_q(x) = Q_q(|x|)$ 径向对称, 因此存在 $Q_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$\begin{aligned} Q_q &\rightharpoonup Q_0, \quad \text{在 } H^1 \text{ 内}, \\ Q_q &\rightarrow Q_0, \quad \text{在 } L^r(\mathbb{R}^N) \text{ 内}, \quad \forall r \in [2, 2^*). \end{aligned} \quad (2.18)$$

由 (2.13) 知

$$\|Q_q\|_q \leq \|Q_q\|_2^{\theta_q} \|Q_q\|_{2+\frac{8}{N}}^{1-\theta_q}, \quad \lim_{q \nearrow 2+\frac{8}{N}} \theta_q = 0. \quad (2.19)$$

同时, 由 (2.2) 和 (2.17) 得到 $\|Q_q\|_q$ 和 $\|Q_q\|_2$ 在 $q \in [3, 2 + \frac{8}{N}]$ 上下一致有界. 再结合 (2.18) 可得, $Q_0(x) \geq 0$, $Q_0(x) \not\equiv 0$, 并且

$$-\Delta Q_0 + \frac{4-N}{2N} Q_0 = \frac{1}{2} |Q_0|^{\frac{8}{N}} Q_0, \quad \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 内}.$$

从而由正解的唯一性得 $Q_0 = Q_{2+\frac{8}{N}}$. 因此, 当 q 趋于 $2 + \frac{8}{N}$ 时有

$$Q_q \rightarrow Q_{2+\frac{8}{N}}, \quad \text{在 } L^r(\mathbb{R}^N) \text{ 内}, \quad \forall r \in [2, 2^*),$$

即当 q 趋于 $2 + \frac{8}{N}$ 时, $\int_{\mathbb{R}^N} |Q_q|^q dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^{2+\frac{8}{N}} dx$. 结合方程 (1.2) 得, 当 q 趋于 $2 + \frac{8}{N}$ 时,

$$Q_q \rightarrow Q_{2+\frac{8}{N}}, \quad \text{在 } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ 内}.$$

引理得证. □

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 (1) 若 $2 < q < p^*$, 对于任意 λ 和 $c > c^*$, 由引理 2.2 可知此时 $e(c, \lambda) = -\infty$, 因此问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(2) 若 $2 < q < p^*$, $\lambda < 0$ 且 $c \leq c^*$, 由引理 2.1 可知, 对于任意 $u \in S_c$, 有

$$E_\lambda(u) \geq f(s) > 0,$$

即 $e(c, \lambda) > 0$, 这与 (2.6) 矛盾. 因此问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(3) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda > 0$, 对于 $\lambda \leq \lambda_2$, 结合引理 2.2(1) 和 (2.6) 知此时 $e(c, \lambda) = 0$, 与文献 [6, 定理 1.1] 第二步的证明类似, 可得问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(4) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda \leq \lambda_1$ 且 $c = c^*$, 由引理 2.2(2) 和 (2.6) 知此时 $e(c, \lambda) = 0$, 与文献 [6, 定理 1.1] 第二步的证明类似, 可得问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(5) 若 $q = 2 + \frac{4}{N}$, $\lambda > \lambda_4$ 且 $c = c^*$, 由引理 2.2(3) 可知此时 $e(c, \lambda) = -\infty$, 因此问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(6) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c < c^*$, 由引理 2.1(3) 可得存在 λ_3 , 当 $\lambda \leq \lambda_3$ 时, 有 $E_\lambda(u) \geq f(s) \geq 0$. 与 (3) 的证明类似, 可知问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解.

(7) 若 $2 + \frac{4}{N} < q < 2 + \frac{8}{N}$, $\lambda > 0$ 且 $c = c^*$, 由引理 2.2(4) 可知此时 $e(c, \lambda) = -\infty$, 因此问题 (1.1) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不存在极小解. $\square$

定理 1.2 的证明 (1) 当 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$ 时, 假设 $\{u_n\}$ 是 $e(c, \lambda)$ 的极小化序列, 则存在 $\{u_n\}$ 的子列, 仍然用 $\{u_n\}$ 来表示, 本文将利用集中紧原理得到 $\{u_n\}$ 的紧性.

消失排除: 假设消失发生, 对于任意 $R > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx = 0$. 由文献 [13, 引理 I.1] 可知

$$u_n \rightarrow 0, \quad \text{在 } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ 内, } p \in [2, 2^*).$$

则 $e(c, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\lambda(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{b}{4} (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx)^2] \geq 0$, 这与引理 2.4 矛盾.

二分排除: 假设二分发生, 由文献 [14, 引理 III.1] 知存在 $\gamma \in (0, c)$, $\{u_n^1\}$ 和 $\{u_n^2\}$ 是 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的有界序列, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{cases} \|u_n - u_n^1 - u_n^2\|_p \rightarrow 0, & \text{对任意 } p \in [2, 2^*), \\ \|u_n^1\|_2^2 - \gamma^2 \leq \varepsilon, \quad \|u_n^2\|_2^2 - (c^2 - \gamma^2) \leq \varepsilon, \\ \text{dist}(\text{supp } u_n^1, \text{supp } u_n^2) \rightarrow \infty, & \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^2 - |\nabla u_n^1|^2 - |\nabla u_n^2|^2] dx \geq 0. \end{cases}$$

这表明

$$e(c, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\lambda(u_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E_\lambda(u_n^1) + E_\lambda(u_n^2)) \geq e(\gamma, \lambda) + e(\sqrt{c^2 - \gamma^2}, \lambda).$$

这与引理 2.3 矛盾.

紧性: 由于消失与二分均不发生, 因此紧性发生, 则存在 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 使得在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有 $u_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup u$, 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中有 $u_n(\cdot + y_n) \rightarrow u$, 其中 $p \in [2, 2^*)$. 则有

$$e(c, \lambda) \leq E_\lambda(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_\lambda(u_n) = e(c, \lambda).$$

这表明 u 是问题 (1.1) 的一个极小解.

定理 1.2(2) 和 1.2(3) 的证明与 (1) 的证明类似, 这里省略. $\square$

注 3.1 由于问题 (1.1) 中的能量泛函含有两个非线性项, 因此本文很难利用文献 [4] 中能量估计的方法得到 $e(c, \lambda)$ 极小解的存在性和唯一性. 实际上, 利用文献 [4] 中的技巧, 由 (2.7) 有

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \frac{a}{2} c^2 t^2 + \frac{bc^4 t^4}{4} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx (c^2 t^2)^{\frac{N(q-2)}{4}} \\ &= f(c^2 t^2) + \lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} (c^2 t^2)^{\frac{N(q-2)}{4}} \left(\frac{1}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \right) \\ &= f(c^2 t^2) + \lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} (c^2 t^2)^{\frac{N(q-2)}{4}} \frac{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q - 2 \|Q_q\|_2^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx}{2q \|Q_q\|_2^{q-2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q}. \end{aligned}$$

如果有

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q \leq \frac{2}{q} \|Q_q\|_2^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx, \quad (3.1)$$

则可以得到

$$E_\lambda(u_t) \leq f(c^2 t^2). \quad (3.2)$$

若 $2 < q < 2 + \frac{4}{N}$ 且 $c \leq c^*$, 由引理 2.1 可以得到

$$e(c, \lambda) = \inf_{u \in S_c} E_\lambda(u) \geq f(s_1). \quad (3.3)$$

令 (3.2) 中 $c^2 t^2 = s_1$, 即 $t = s_1^{\frac{1}{2}}/c$, 可以得到

$$e(c, \lambda) \leq E_\lambda(u_t) \leq f(s_1). \quad (3.4)$$

结合 (3.3) 和 (3.4), 有

$$e(c, \lambda) = f(s_1), \quad \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q = \frac{2}{q} \|Q_q\|_2^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx.$$

易知

$$u_t = \frac{ct^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(tx)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2} = \frac{c(s_1^{1/2} c^{-1})^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(s_1^{1/2} c^{-1} x)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2}$$

是 $e(c, \lambda)$ 的一个极小解. 此处的条件 (3.1) 和 (1.8) 要么矛盾, 要么满足

$$\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q = \frac{2}{q} \|Q_q\|_2^{q-2} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx,$$

后面条件成立的证明应该是一个非常困难的事情.

定理 1.3 的证明 因为 u_λ 为 $e(c, \lambda)$ 当 $p > q > 4$ 时的极小解, 所以方程满足形如 (1.12) 的 Euler-Lagrange 方程. 任取 $v \in G_\lambda$, 利用方程 (1.12) 知

$$a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^2 = \mu \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx. \quad (3.5)$$

上式结合 (1.13) 有

$$I_\lambda(v) = \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx.$$

同样地, 由 u_λ 是方程 (1.12) 的解知

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^q dx.$$

于是利用 $v \in G_\lambda$ 得

$$I_\lambda(v) \leq I_\lambda(u_\lambda). \quad (3.6)$$

另一方面, 令 $\bar{v} = \frac{c}{r}v$, 其中 $r > 0$ 且 $r^2 \triangleq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx$, 则 $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{v}|^2 dx = c^2$. 再由 u_λ 的定义知

$$E_\lambda(\bar{v}) \geq E_\lambda(u_\lambda),$$

从而

$$I_\lambda(\bar{v}) = E_\lambda(\bar{v}) - \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{v}|^2 dx \geq E_\lambda(u_\lambda) - \frac{\mu}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 dx = I_\lambda(u_\lambda). \quad (3.7)$$

利用 (3.5) 知

$$\begin{aligned} I_\lambda(\bar{v}) &= \frac{ac^2}{2r^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{bc^4}{4r^4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx \right)^2 - \frac{\mu c^2}{2r^2} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx - \frac{c^p}{pr^p} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx - \frac{\lambda c^q}{qr^q} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx \\ &= \frac{ac^2}{4r^2} \left(2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu c^2}{4r^2} \left(2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^{\frac{p}{2}} \right] \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left[\frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{q} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^{\frac{q}{2}} \right] \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

结合 (3.6) 和 (3.7) 可得

$$I_\lambda(v) \leq I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(\bar{v}), \quad (3.9)$$

即

$$\begin{aligned} &\frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx \\ &\leq \frac{ac^2}{4r^2} \left(2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu c^2}{4r^2} \left(2 - \frac{c^2}{r^2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{p} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^{\frac{p}{2}} \right] \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left[\frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{q} \left(\frac{c^2}{r^2} \right)^{\frac{q}{2}} \right] \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

假设函数 $g(s) = s(2-s)$ ($s > 0$), 由 $g'(s) = 2-2s = 0$ 可得 $s = 1$ 是函数 $g(s)$ 的极大值点, 即对于任意 $s > 0$, 有 $g(s) \leq g(1)$, 其中等号成立当且仅当 $s = 1$. 假设函数 $h(s) = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{n}s^{\frac{n}{2}}$ ($s > 0$), 由 $h'(s) = \frac{1}{2}(s - s^{\frac{n}{2}-1}) = 0$ 可得 $s = 1$ 是函数 $h(s)$ 的极值点. 特别地, 当 $n > 4$ 时, $s = 1$ 是函数 $h(s)$ 的极大值点, 即对于任意 $s > 0$, 有 $h(s) \leq h(1)$, 其中等号成立当且仅当 $s = 1$. 与推论 1.1 类似, 可以证明 $\mu < 0$ 成立. 因此当 $p > q > 4$ 时, 令 $s = \frac{c^2}{r^2}$, (3.10) 等价于

$$\begin{aligned} &\frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx \\ &\leq \frac{a}{4} s(2-s) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu}{4} s(2-s) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{p} s^{\frac{p}{2}} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{q} s^{\frac{q}{2}} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx \\ &\leq \frac{a}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{\mu}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx + \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q dx. \end{aligned}$$

这意味着 $s = 1$, 即 $r^2 = c^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx = c^2$, 且 (3.9) 中均为等式. 因此有

$$I_\lambda(v) = I_\lambda(u_\lambda), \quad E_\lambda(v) = E_\lambda(u_\lambda),$$

即 $u_\lambda \in G_\lambda$, 且 $v \in G_\lambda$ 是 $e(c, \lambda)$ 的极小解. 证毕. $\square$

定理 1.4 的证明 若 $c < c^*$, 由 λ_q 的定义可得 $\lambda_{p^*} = \frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} [\frac{1}{c^{\frac{8}{N}-2}} - \frac{1}{c^{*\frac{8}{N}-2}}]$, 因此

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &\geq \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \\ &\geq \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}}}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}} \\ &= \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{b}{4} \frac{\lambda}{\lambda_q} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{N(q-2)}{4}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

记 $(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx)^2 = m$, 则有

$$l(m) \triangleq \frac{b}{4} \left(m - \frac{\lambda}{\lambda_q} m^{\frac{q-2}{p^*-2}} \right) \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right],$$

通过计算可知函数 l 有唯一的极小值点 $m := m_q$, 其中

$$m_q \triangleq \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}}.$$

由此, 可以得到

$$l(m) \geq l(m_q) = -\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right],$$

即有

$$e(c, \lambda) \geq -\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]. \quad (3.12)$$

这说明 $e(c, \lambda)$ 下方有界.

设

$$u_t = \frac{ct^{\frac{N}{2}} Q_{2+\frac{8}{N}}(tx)}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2},$$

则 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^2 dx = c^2$, 且

$$\begin{aligned} E_\lambda(u_t) &= \frac{a}{2} c^2 t^2 + \frac{b}{4} c^4 t^4 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{\lambda c^q t^{\frac{N(q-2)}{2}}}{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx \\ &= \frac{a}{2} c^2 t^2 + \frac{b}{4} c^4 t^4 \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] - \frac{b}{4} \frac{\lambda}{\lambda_q} (c^4 t^4)^{\frac{q-2}{p^*-2}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \\ &\quad + \lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} \left(\frac{1}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{1}{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx \right) (c^4 t^4)^{\frac{N(q-2)}{8}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

由引理 2.5 结合等式 (2.2) 可得

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \left(\frac{1}{2 \|Q_q\|_2^{q-2}} - \frac{1}{q \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^q} \int_{\mathbb{R}^N} |Q_{2+\frac{8}{N}}|^q dx \right) = 0.$$

进一步, 令 $c^4 t^4 = (\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)})^{\frac{p^*-2}{p^*-q}}$, 则有

$$E_\lambda(u_t) = \frac{a}{2} \left[\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right]^{\frac{p^*-2}{2(p^*-q)}} - \frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] \\ + o(1) \lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{N(q-2)(p^*-2)}{8(p^*-q)}}. \quad (3.14)$$

通过简单的计算可知

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\frac{a}{2} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{2(p^*-q)}}}{\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]} = \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{2(p^*-q)}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]} = 0, \\ \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\lambda c^{\frac{2q-N(q-2)}{2}} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{N(q-2)(p^*-2)}{8(p^*-q)}}}{\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right]} = 0.$$

上面两个估计结合 (3.14) 可得

$$e(c, \lambda) \leq E_\lambda(u_t) = -\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] (1 + o(1)). \quad (3.15)$$

综合 (3.12) 和 (3.15) 有

$$e(c, \lambda) = -\frac{b(p^*-q)}{4(q-2)} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \left[1 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{\frac{8}{N}-2} \right] (1 + o(1)).$$

容易计算当 $q \rightarrow p^*$ 时, 有 $e(c, \lambda) \rightarrow -\infty$. □

引理 3.1 假设 $u_q \geq 0$ 是 $e(c, \lambda)$ 当 $c < c^*$ 且 $\lambda > \lambda_{p^*}$ 时的一个极小值点, 则有下式成立:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx \right)^2 \approx \frac{4}{b} \left(\frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right) \approx \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} \triangleq m_q, \quad (3.16)$$

其中 $i \approx j$ 表示 $\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{i}{j} = 1$.

证明 与定理 1.4 的证明类似, 有 $l(m) \triangleq \frac{b}{4} (m - \frac{\lambda}{\lambda_q} m^{\frac{q-2}{p^*-2}}) [1 - (\frac{c}{c^*})^{\frac{8}{N}-2}]$. 接下来将用反证法来证明该引理. 对于某些 $\theta \geq 0$, 存在子序列使得

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2}{m_q} = \theta.$$

下面对 $\theta \in [0, 1)$ 和 $\theta > 1$ 分别进行验证, 推出矛盾, 从而得到定理的证明.

事实上, 若 $\theta \in [0, 1)$, 则存在 $\epsilon_1 > 0$ 使得 $\delta \triangleq \theta + \epsilon_1 < 1$ 并且 $\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2}{m_q} \leq \delta$. 因此,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{l(\delta m_q)}{l(m_q)} = \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\delta \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} - \frac{\lambda}{\lambda_q} \delta^{\frac{q-2}{p^*-2}} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{q-2}{p^*-q}}}{\left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q}} - \frac{\lambda}{\lambda_q} \left(\frac{\lambda(q-2)}{\lambda_q(p^*-2)} \right)^{\frac{q-2}{p^*-q}}} \\ = \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\delta \left(\frac{q-2}{p^*-2} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q} - \frac{q-2}{p^*-q}} - \delta^{\frac{q-2}{p^*-2}} \left(\frac{q-2}{p^*-2} \right)^{\frac{q-2}{p^*-q} - \frac{q-2}{p^*-q}}}{\left(\frac{q-2}{p^*-2} \right)^{\frac{p^*-2}{p^*-q} - \frac{q-2}{p^*-q}} - \left(\frac{q-2}{p^*-2} \right)^{\frac{q-2}{p^*-q} - \frac{q-2}{p^*-q}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{q \rightarrow p^*} \left[1 - (1 - \delta^{\frac{q-p^*}{p^*-2}}) \left(\frac{p^*-q}{p^*-2} \right)^{-1} \right] \delta \\
 &= \delta(1 - \ln \delta) \in (0, 1), \quad \forall \delta \in (0, 1).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17) 最后一个等式利用了 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-s-x}{x} = \ln s$. 由于 $\lim_{q \rightarrow p^*} (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2 \leq \delta m_q$, 并且 $l(m)$ 在 m_q 处取唯一极小值, 因此 $0 > e(c, \lambda) \geq l(\delta m_q)$. 此时可以得到

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{e(c, \lambda)}{l(m_q)} \leq \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{l(\delta m_q)}{l(m_q)} = \delta(1 - \ln \delta) < 1.$$

这与 (3.11) 矛盾.

类似地, 当 $\theta > 1$ 时, 存在 $\epsilon_2 > 0$ 使得 $\delta \triangleq \theta - \epsilon_2 > 1$ 并且 $\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2}{m_q} \geq \delta$. 与 (3.17) 类似, 可以得到

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{l(\delta m_q)}{l(m_q)} = \delta(1 - \ln \delta) < 1, \quad \forall \delta > 1.$$

$l(m)$ 在 m_q 处取唯一极小值, 则 $0 > e(c, \lambda) \geq l(\delta m_q)$, 此时可以得到

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{e(c, \lambda)}{l(m_q)} \leq \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{l(\delta m_q)}{l(m_q)} = \delta(1 - \ln \delta) < 1.$$

这同样与 (3.11) 矛盾.

综上, 有 $\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2}{m_q} = 1$. 此外, 由于 $\lim_{q \rightarrow p^*} m_q = +\infty$, 因此,

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx}{m_q} = \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx)^2}{m_q} \cdot \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx} = 0.$$

对于

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow p^*} \frac{e(c, \lambda)}{m_q} &= \lim_{q \rightarrow p^*} \left\{ \frac{a}{2m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx + \frac{b}{4m_q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{p^* m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx - \frac{\lambda}{q m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right\} \\
 &= \frac{b}{4} - \lim_{q \rightarrow p^*} \left\{ \frac{1}{p^* m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right\},
 \end{aligned}$$

结合定理 1.4 有

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \left\{ \frac{1}{p^* m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right\} = \frac{b}{4},$$

即

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \frac{4}{b} \left(\frac{1}{p^* m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q m_q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right) = 1.$$

证毕. □

定理 1.5 的证明 由引理 3.1, 设 $\epsilon_q = m_q^{-\frac{1}{4}}$, $\tilde{\omega}_q(x) = \epsilon_q^{\frac{N}{2}} u_q(\epsilon_q x)$, 计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{\omega}_q|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^2 dx = c^2, \tag{3.18}$$

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{\omega}_q|^2 dx \right)^2 = \lim_{q \rightarrow p^*} \epsilon_q^4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx \right)^2 = m_q^{-1} \cdot m_q = 1, \tag{3.19}$$

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \left(\frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{\omega}_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{\omega}_q|^q dx \right) = m_q^{-1} \lim_{q \rightarrow p^*} \left(\frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right) = \frac{b}{4}. \quad (3.20)$$

由于 u_q 是 $e(c, \lambda)$ 的一个极小值点, 因此可知存在 $\mu_q \in \mathbb{R}$ 使得

$$-\left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx\right) \Delta u_q = \mu_q u_q + |u_q|^{p^*-2} u_q + \lambda |u_q|^{q-2} u_q. \quad (3.21)$$

将 u_q 作用到上式两端并积分, 有

$$\begin{aligned} \mu_q c^2 &= a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \\ &= 4e(c, \lambda) - a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx - \frac{p^* - 4}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx - \frac{q - 4}{q} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx. \end{aligned}$$

由定理 1.4、引理 3.1 和 (1.16) 可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow p^*} \mu_q \epsilon_q^4 c^2 &= \lim_{q \rightarrow p^*} \left(4e(c, \lambda) m_q^{-1} - a \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_q|^2 dx m_q^{-1} \right) \\ &\quad - (p^* - 4) \lim_{q \rightarrow p^*} \left\{ \left(\frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^{p^*} dx + \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_q|^q dx \right) m_q^{-1} \right\} \\ &= -\frac{b}{2} \frac{4 - N}{N}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(3.20) 结合集中紧引理知, 存在序列 $\{\tilde{y}_{\epsilon_q}\} \subset \mathbb{R}^N$ 以及 $R, r > 0$ 使得

$$\liminf_{q \rightarrow p^*} \int_{B_{R(\tilde{y}_{\epsilon_q})}} |\tilde{\omega}_q|^2 dx \geq r > 0.$$

令

$$\omega_q(x) = \epsilon_q^{\frac{N}{2}} u_q(\epsilon_q x + \epsilon_q \tilde{y}_{\epsilon_q}) = \tilde{\omega}_q(x + \tilde{y}_{\epsilon_q}), \quad (3.23)$$

则有

$$\liminf_{q \rightarrow p^*} \int_{B_{R(0)}} |\omega_q|^2 dx \geq r > 0. \quad (3.24)$$

已知 u_q 满足 (3.21), 通过计算可知 $\omega_q(x)$ 对应满足

$$-a\epsilon_q^2 \Delta \omega_q - b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_q|^2 dx \Delta \omega_q = \mu_q \epsilon_q^4 \omega_q + \omega_q^{p^*-1} + \lambda \epsilon_q^{4 - \frac{N(q-2)}{2}} \omega_q^{q-1}. \quad (3.25)$$

利用 (1.16) 可得

$$\lim_{q \rightarrow p^*} \lambda \epsilon_q^{4 - \frac{N(q-2)}{2}} = \lim_{q \rightarrow p^*} \lambda \epsilon_q^{\frac{N}{2}(p^*-q)} = \lim_{q \rightarrow p^*} \lambda (m_q^{\frac{p^*-q}{p^*-2}})^{-1} = \lambda_{p^*}. \quad (3.26)$$

对于任意 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, 由 $\lim_{q \rightarrow p^*} m_q = +\infty$ 和 Hölder 不等式得

$$\lim_{q \rightarrow p^*} |\epsilon_q^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \omega_q \nabla \eta dx| \leq \lim_{q \rightarrow p^*} C \epsilon_q^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_q|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{q \rightarrow p^*} C m_q^{-\frac{1}{2}} (1 + o(1)) = 0. \quad (3.27)$$

结合 (3.18)、(3.19) 和 (3.23) 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_q|^2 dx = c^2, \quad \lim_{q \rightarrow p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_q|^2 dx = \lim_{q \rightarrow p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{\omega}_q|^2 dx = 1. \quad (3.28)$$

因此序列 $\{\omega_q\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界. 若 q 趋于 p^* 时, 存在 $\omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\omega_0 \neq 0$, 则在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有

$$\omega_q \rightharpoonup \omega_0 \geq 0. \quad (3.29)$$

此外, 由 (3.22) 和 (3.25)–(3.29) 可知, ω_0 应该满足下式:

$$-b\Delta\omega_0 = -\frac{b}{2} \frac{4-N}{Nc^2} \omega_0 + (1 + \lambda_{p^*}) \omega_0^{p^*-1}. \quad (3.30)$$

将 ω_0 作用到上式两端并积分, 可以得到

$$b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0|^2 dx = -\frac{b}{2} \frac{4-N}{Nc^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx + (1 + \lambda_{p^*}) \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^{p^*} dx. \quad (3.31)$$

若 ω_0 是方程 (3.30) 的解, 则有如下 Pohozaev 恒等式:

$$b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \left(-\frac{b(4-N)}{4Nc^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx + \frac{(1 + \lambda_{p^*})}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^{p^*} dx \right). \quad (3.32)$$

(3.31) 结合 (3.32) 可以得到

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0|^2 dx = c^{-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx = \frac{2Nc^2}{b(N+4)} (1 + \lambda_{p^*}) \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^{p^*} dx. \end{cases} \quad (3.33)$$

另一方面, 由 λ_{p^*} 的定义有

$$\lambda_{p^*} = \frac{b}{2} \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}} \left[\frac{1}{c^{\frac{8}{N}-2}} - \frac{1}{c^{*\frac{8}{N}-2}} \right] = \frac{b \|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}}{2c^{\frac{8}{N}-2}} - 1.$$

上式结合 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 (3.33), 有

$$\begin{aligned} \frac{N \|Q_{p^*}\|_2^{\frac{8}{N}}}{N+4} &\leq \frac{(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0|^2 dx)^2 (\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx)^{\frac{4-N}{N}}}{\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^{p^*} dx} \\ &= \frac{N}{4+N} \frac{\|Q_{p^*}\|_2^{\frac{8}{N}}}{c^{\frac{8}{N}}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx \right)^{\frac{4}{N}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx \geq c^2.$$

结合 (3.28) 和 (3.29) 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_0|^2 dx = c^2. \quad (3.35)$$

由此可以得到当 q 趋于 p^* 时, 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中有 $\omega_q \rightarrow \omega_0$. 同时结合 (3.28) 和 (3.33) 知 q 趋于 p^* 时, 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_q|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_0|^2 dx.$$

由此, 当 q 趋于 p^* 时, 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有 $\omega_q \rightarrow \omega_0$.

进一步, (3.29) 和强极大值原理表明 $\omega_0 > 0$. 已知 ω_0 是 (3.30) 的一个正解, 可以得到

$$-\Delta\omega_0 = -\frac{4-N}{2Nc^2}\omega_0 + \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}}{2c^{\frac{8}{N}-2}}\omega_0^{p^*-1}. \quad (3.36)$$

将 $\omega_0 = \mu u(\lambda x)$ 代入 (3.36), 可以得到 $\Delta\omega_0(x) = \lambda^2\mu\Delta u(\lambda x)$, 于是

$$-\Delta u = -\frac{4-N}{2N\lambda^2c^2}u + \frac{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2^{\frac{8}{N}}}{2\lambda^2c^{\frac{8}{N}-2}}\mu^{\frac{8}{N}}u^{p^*-1}. \quad (3.37)$$

同时, 假设 u 是 (1.2) 当 $r = p^*$ 时的解, 则 u 满足方程

$$-\Delta u = -\frac{4-N}{2N}u + \frac{1}{2}|u|^{p^*-1}. \quad (3.38)$$

对比 (3.37) 和 (3.38) 各项系数可以得到, 在满足条件

$$\lambda^2 = c^{-2}, \quad \mu = \frac{c^{\frac{2-N}{2}}}{\|Q_{2+\frac{8}{N}}\|_2}$$

下, ω_0 是方程 (1.2) 的正解. 由 (1.2) 正解的唯一性可知

$$\omega_0 = \frac{1}{\|Q_{p^*}\|_2}Q_{p^*}(|x - x_0|), \quad \text{对于某些 } x_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (3.39)$$

证毕. □

致谢 非常感谢审稿人对本文提出的宝贵意见, 让本文的结论更严谨, 同时感谢曾小雨副教授在本文引理 2.5 及收敛性的证明中提供的帮助和意见.

参考文献

- Li H W, Yang Z, Zou W M. Normalized solutions for nonlinear Schrödinger equations (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2020, 50: 1023–1044 [李厚旺, 杨佐, 邹文明. 非线性 Schrödinger 方程的正规化解. *中国科学: 数学*, 2020, 50: 1023–1044]
- Ye H Y. The sharp existence of constrained minimizers for a class of nonlinear Kirchhoff equations. *Math Methods Appl Sci*, 2015, 38: 2663–2679
- Guo H L, Wang Y B. A remark on a constrained variational problem (in Chinese). *Acta Math Sci*, 2017, 37: 1125–1128 [郭合林, 王云波. 关于一个约束变分问题的注记. *数学物理学报*, 2017, 37: 1125–1128]
- Zeng X Y, Zhang Y M. Existence and uniqueness of normalized solutions for the Kirchhoff equation. *Appl Math Lett*, 2017, 74: 52–59
- Ye H Y. The mass concentration phenomenon for L^2 -critical constrained problems related to Kirchhoff equations. *Z Angew Math Phys*, 2016, 67: 29
- Ye H Y. The existence of normalized solutions for L^2 -critical constrained problems related to Kirchhoff equations. *Z Angew Math Phys*, 2015, 66: 1483–1497
- Zeng Y L, Chen K S. Remarks on normalized solutions for L^2 -critical Kirchhoff problems. *Taiwanese J Math*, 2016, 20: 617–627
- Guo H L, Zhang Y M, Zhou H S. Blow-up solutions for a Kirchhoff type elliptic equation with trapping potential. *Commun Pure Appl Anal*, 2018, 17: 1875–1897
- Liu Z. Multiple normalized solutions for Choquard equations involving Kirchhoff type perturbation. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 2019, 54: 297–319
- Huang X M, Zhang Y M. Existence and uniqueness of minimizers for L^2 -constrained problems related to fractional Kirchhoff equation. *Math Methods Appl Sci*, 2020, 43: 8763–8775
- Weinstein M I. Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation. *Comm Partial Differential Equations*, 1987, 12: 1133–1173

- 12 Agueh M. Sharp Gagliardo-Nirenberg inequalities via p -Laplacian type equations. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2008, 15: 457–472
- 13 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 223–283
- 14 Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 109–145

Existence and limit behavior of minimizers of Kirchhoff-type constrained variational problems with constrained critical exponent

Huahua Yang & Yimin Zhang

Abstract There are no minimizers for nonlinear Kirchhoff-type constrained variational problems when the nonlinear term only includes an exponential term and the exponent is the constrained critical exponent $p = 2 + \frac{8}{N}$. In this paper, a perturbation functional is added to the Kirchhoff-type constrained variational problem with constrained critical exponent. Then, for this functional, a complete classification with respect to the exponent and the coefficient in the perturbation term for its normalized critical points is obtained by using the scaling technique, the concentration-compactness principle and the Pohozaev identity. Under some conditions, we also prove that the minimizer is the ground state solution of the corresponding Kirchhoff equation. Furthermore, by using the energy estimation, the limit behaviors of the minimum energy and the minimizer are discussed when the perturbation term exponent tends to the constrained critical exponent.

Keywords Kirchhoff-type, constrained variational problem, minimizer, concentration-compactness principle

MSC(2020) 35J20, 35J60

doi: 10.1360/SSM-2021-0117