

偶合扩散方程生成的半群

钱 敏 张 彪 郭振纯

(北京大学数学系)

§ 1. 本文讨论由算子 $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}$ 生成的马氏半群

$$\left(\text{其中 } \mathcal{Q}_i = \frac{d}{dx} \left(a_i(x) \frac{d}{dx} \right) + b_i(x) \frac{d}{dx} + c_{ii}(x), i = 1, 2 \right),$$

即在适当的定义域上以 $\mathcal{Q}$ 为其生成元的半群. 问题的物理背景见文献[1]; 这问题除有其本身的物理意义外, 也是数学上进一步讨论相应马氏过程——偶合扩散的基础. 这种过程是单纯扩散过程与马氏链的复合. 因为一维扩散过程中的环流现象过于单纯, 我们希望用偶合扩散的模型来研究环流的问题. 本文所采用的方法见文献[2], 这种方法就是 Feller 处理一维扩散的方法的推广, 但在讨论偶合扩散时, Feller 的方法不能用, 文献[2]中所提出的方法却可以略加改动后采用.

我们所考虑的物理模型是, 粒子在两条直线上运动, 它可以从一条直线垂直无后效地跳跃到另一条直线, 且在两次跳跃之间粒子的无穷小概率转移与一维扩散运动相同. 因此为了得到无穷小生成元的具体形式, 将时间变量 t 与空间变量 x 离散化; 设空间步长为 δ , 时间步长为 η , 就象从随机徘徊取极限过渡到布朗运动的情况一样; 假设 $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\eta} = 2$ 并且转移概率有一定的光滑性, 令 $\eta \rightarrow 0$, 就得到 Fokker-Planck 方程, 以及局部无穷小算子

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{Q}f = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix} f,$$

其中 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ 而 f_i 是定义在 R^1 上的.

$$\mathcal{Q}_i = \frac{d}{dx} \left(a_i(x) \frac{d}{dx} \right) + b_i(x) \frac{d}{dx} + c_{ii}(x),$$

且满足下列条件 $a_i(x) > 0$, $c_{ii}(x) \leq 0$, $c_{ij}(x) \geq 0$, $c_{ii}(x) + c_{ij}(x) = 0$ $i, j = 1, 2, i \neq j$.

在下文中假设 $a_i(x)$, $b_i(x)$ 一阶连续可微, $c_{ij}(x)$ 有界连续 ($i, j = 1, 2$), 且仅要求 $c_{ii}(x) + c_{i,3-i}(x) \leq 0$.

§ 2. 若记

$$C \equiv \left\{ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, f_i(x) \text{ 是 } R^1 \text{ 上的有界连续函数} \right\},$$

定义范数 $\|f(x)\| = \max_{i=1,2} \sup_{x \in R^1} |f_i(x)|$, C 为 Banach 空间. 记

$$\tilde{C} \equiv \left\{ f(x) \in C, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

本文 1982 年 12 月 10 日收到.

它是 C 的闭子空间. $C^+ \equiv \{g(x) \in C, g_i(x) \geq 0, \forall x \in R', i = 1, 2\}$. I 是 C 上的恒同算子.

定理 2.1 设 $\lambda > 0$, 则对任意 $g(x) \in C^+$, 方程 $(\lambda I - Q)f = g(x)$ 有非负最小解, 记作 $R_\lambda g(x)$, 而且 $R_\lambda g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x)$, 其中 $f_N(x)$ 是零边值问题.

$$\begin{cases} (\lambda I - Q)f(x) = g(x), & \xi_N \leq x \leq \eta_N \\ f(\xi_N) = f(\eta_N) = 0, & \xi_N \searrow -\infty, \eta_N \nearrow +\infty \text{ (当 } N \rightarrow +\infty \text{)} \end{cases}$$

的解. 此外有不等式 $\|R_\lambda g(x)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|g(x)\|$ 成立.

引理 2.1 由定理 2.1 中所定义的 R_λ 是 $C^+ \rightarrow C^+$ 上的线性映射.

引理 2.2 (扩充 R_λ 到 C 上) 设 $g(x) \in C$, 则可定出方程 $(\lambda I - Q)f(x) = g(x)$ 的唯一解 $f(x)$, 且满足 $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|g(x)\| (\lambda > 0)$. 映射 $g(x) \mapsto f(x)$ 是线性的, 记为 R_λ . 它在 C^+ 上与引理 2.1 中的 R_λ 重合.

§ 3. 在下文中我们沿用文献[2]中的定义和结论. $+\infty$ (或 $-\infty$) 是 Q_i 的正则、流入、流出和自然边界的定义完全按照文献[2].

定义 3.1 称 Q 具有第 I 类边界点, 如果 $\pm\infty$ 皆非 Q_i 的自然边界点 ($i = 1, 2$).

称 Q 具有第 II 类边界点, 如果 $\pm\infty$ 皆是 Q_i 的自然边界点 ($i = 1, 2$).

称 Q 具有第 III 类边界点, 如果 Q 不是上述两种情况之一.

引理 3.1 集合 $R_\lambda C^\#$ 与 λ 无关, 即 $\{R_\lambda g | g \in C^\#\} = \{R_{\tilde{\lambda}} g(x) | g(x) \in C^\#\}$, $\forall \lambda, \tilde{\lambda} > 0, \lambda \neq \tilde{\lambda}$, 其中 $C^\# \equiv \{f \in C, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \text{ 存在且有限}\}$.

定理 3.1 1°. 当 Q 具有第 I 类边界点时有: $R_\lambda: C^\# \rightarrow C^\#$; 2°. 当 Q 具有第 II 类边界点时有 $R_\lambda: \hat{C} \rightarrow \hat{C}$; 3°. 当 Q 具有第 III 类边界点时, 且 $c_{ij}(x) \in C^\# (i, j = 1, 2)$, 则有 $R_\lambda: C^\# \rightarrow C^\#$, 其中 $C^\# = \{f(x) | f(x) \text{ 有界连续且 } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \text{ 存在有限}\}$.

注. 定理 3.1 中对于 $c_{ij} \in C^\#$ 的假设是重要的. 我们给出下述反例: 有 $c_{11}(x) \in C^\#, g(x) \in C^\#$. 但 $R_\lambda g(x) = f(x) \notin C^\#$ 即 $R_\lambda: C^\# \not\rightarrow C^\#$.

取 $a_1(x) = e^{-\sin x}, b_1(x) = -a_1'(x), c_{11}(x) = -[e^{-\sin x} (12 + \cos^2 x - \sin x) - 1]$ $c_{11}(x) < 0, c_{11}(x) \in C^\#, c_{12}(x) \equiv 1$, 显然 $-c_{11}(x) > c_{12}(x) > 0$, 由文献[2]结果, 知 $\pm\infty$ 是 Q_1 的自然边界点.

取 $a_2(x) = e^{e^x}, b_2(x) = e^{-x+e^x}, c_{22}(x) = -1$ 当 $x \geq -1$ 时. 当 $x \leq -2$ 时, 令 $a_2(x) = e^{e^{-x}}, b_2(x) = e^{x+e^{-x}}$, 在 $[-2, -1]$ 中取 a_2, b_2 使其满足连续可微, $c_{22}(x) \equiv -1, c_{21}(x) \equiv 0$.

考虑 $+\infty, w_2(x) = e^{\int_0^x \frac{b_2(s)}{a_2(s)} ds} = \exp\left(\int_0^x e^{-s} ds\right) = e^{1-e^x}$, 所以

$$\frac{1}{a_2(x)w_2(x)} = e^{-1} \in L[0, +\infty),$$

$$m_2(+\infty) = \int_0^\infty (1 - c_{22}(s))w_2(s)ds = \int_0^\infty 2e^{1-e^x} dx < \infty,$$

又

$$\frac{1}{a_2(x)w_2(x)} \int_x^{+\infty} (1 - c_{22}(s))w_2(s)ds = e^{-1} \int_x^{+\infty} 2e^{1-e^x} dx \in L[0, +\infty),$$

所以由文献[2]结果 $+\infty$ 是流入边界点, 同理 $-\infty$ 也是 $\mathcal{Q}_1$ 的流入边界点.

令 $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - c_{22}(x) \end{pmatrix}$ 显然 $f_2 \equiv 1$ 是方程 $(1 \cdot I_2 - \mathcal{Q}_2)f_2(x) = g_2(x)$ 的解. 其中 I_2 是 $C(R')$ 上的恒同算子. 此时 $\lambda = 1$. 所以 $1 = s_1^{(2)}(g_2(x)) + d_1^{(2)}u_1^{(2)} + d_2^{(2)}u_2^{(2)}$, 其中 u_1, u_2, s_1 的记号同文献 [2]. $d_1^{(2)}, d_2^{(2)}$ 是常数. 当 u_1, u_2 无界而 $s_1^{(2)}g_2(x)$ 有界, 所以 $d_1^{(2)} = d_2^{(2)} = 0$, $f_1(x) = \frac{1}{12} e^{\sin x} \in C^\#$, 这说明了 $g(x) \in C^\#$ 而 $R_1 g(x) \notin C^\#, \lambda = 1$.

§ 4. 令

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \overline{R_1 C^\#}, & \text{当 } \mathcal{Q} \text{ 具有第 I、III 类边界时} \\ \hat{C}, & \text{当 } \mathcal{Q} \text{ 具有第 II 类边界时} \end{cases}$$

令 $R_\lambda^0 \equiv R_\lambda|_{\mathcal{E}}, A \equiv \mathcal{Q}|_{R_\lambda^0 \mathcal{E}}$, 即 $\mathcal{D}(A) = R_\lambda^0 \mathcal{E}$.

引理 4.1 $R_\lambda^0 \mathcal{E} \subset \mathcal{E} \quad \overline{R_\lambda^0 \mathcal{E}} = \mathcal{E}$.

定理 4.1 $\{T_\lambda^0, \lambda > 0\}$ 是 $\mathcal{E}$ 上某强连续收缩正半群 T_t^0 的预解式, T_t^0 的生成元是 A , $C_0^+ \subset \mathcal{D}(A)$, 且 T_t^0 在如下含义下最小, 若另有一个在 C 的子空间 $\mathcal{E}'$ 上强连续的收缩正半群 T_t' , 满足 $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$, 且对其生成元 A' 有 $\mathcal{D}(A') \subset C_2$ 及 $A' = \mathcal{Q}|_{\mathcal{D}(A')}$, 那么对 $\forall f \in \mathcal{E}$, 且 $f \in C^+$, 必有 $T_t^0 f \leq T_t' f$, 即 $T_t' f - T_t^0 f \in C^+$, 其中 $C_0^+ = \{f \in C, f_i(x) \in C_0^+(R^1)\}$, $C_2 = \{f \in C, f_i(x) \in C_2(R^1)\}$.

我们所考虑的模型, 可以推广到可列条直线, 它给出了一般马氏过程的一个很好的例子. 给出两条直线上半群的构造是我们研究这类模型的第一步. 对于这模型还有许多很有趣的问题, 例如, 它的轨道性质, 可逆性以及已有的 $\mathcal{Q}$ 过程的构造论在这方面的推广等一系列问题. 关于它的轨道性质我们将在另一文章中给出.

参 考 文 献

- [1] Amal. K., *Zeit für Physik B*, 40(1980), 4: 353.
- [2] 钱敏、侯振挺, 可逆马尔可夫过程, 湖南人民出版社, 1979.