一类随机偏微分方程的适定性和大偏差原理

刘伟^{1*}, 黄晓敏¹, 李石虎¹, 顾莉莉²

1. 江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116;

2. 苏州工业园区工业技术学校基础教学部, 苏州 215123

E-mail: weilu@jsnu.edu.cn, 1352628687@qq.com, shihuli@jsnu.edu.cn, 1528126618@qq.com

收稿日期: 2019-12-23; 接受日期: 2020-04-17; 网络出版日期: 2020-07-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11822106 和 11831014)、江苏高校统计学优势学科和江苏省研究生科研与实践创新计划 (批准号: KYCX20-2208) 资助项目

摘要 本文研究变分框架下一类带局部单调系数的随机偏微分方程, 首先通过证明方程解的存在性及轨道唯一性得到此类方程强解的存在唯一性; 然后运用随机控制和弱收敛方法证明该类方程的大偏差原理; 最后将本文主要结果应用到具体的随机偏微分方程模型, 包括随机 Cahn-Hilliard 方程、随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程和随机驯服 (tamed) 3 维 Navier-Stokes 方程.

关键词 随机偏微分方程 适定性 大偏差原理 局部单调性 弱收敛方法

MSC (2020) 主题分类 60H15, 60F10

1 引言

设 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ 是一个可分的 Hilbert 空间, H^* 表示其对偶空间. V 和 Y 表示带有范数 $\|\cdot\|_V$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 的可分且自反的 Banach 空间, 且 $V \subset Y \subset H$ 为连续和稠密嵌入. 记 $\mathcal{B}$ 表示对应空间上的 Borel σ 代数, 根据 Kuratowski 定理可知,

$$V \in \mathcal{B}(Y), \quad Y \in \mathcal{B}(H) \quad \text{且} \quad \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(H) \cap Y, \quad \mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(Y) \cap V,$$

且如下嵌入:

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*$$

均为连续和稠密嵌入. 设 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 为取值于可分 Hilbert 空间 U 上的柱 Wiener 过程, 令 $(L_2(U; H), \|\cdot\|_2)$ 表示 U 到 H 上的全体 Hilbert-Schmidt 算子所构成的空间. 考虑如下形式的随机偏微分方程 (stochastic partial differential equation, SPDE):

$$dX_t = A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t, \quad X(0) = x, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Liu W, Huang X M, Li S H, et al. Well-posedness and large deviation principle for a class of SPDEs (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 2025–2048, doi: 10.1360/SSM-2019-0319

其中

$$A : [0, T] \times V \rightarrow V^*, \quad B : [0, T] \times V \rightarrow L_2(U; H)$$

均为循序可测的.

当方程 (1.1) 的系数满足经典单调性和强迫性条件时, Pardoux^[1] 及 Krylov 和 Rozovskii^[2] 利用变分方法证明了该类方程解的存在唯一性. Liu 和 Röckner^[3] 把这个结果推广到了更一般的框架, 即系数满足某种局部单调性和广义的强迫性条件, 从而可以涵盖更多的 SPDE 模型, 如随机 2 维 Navier-Stokes 方程等流体力学模型, 参见文献 [4, 5]. 值得注意的是, 在文献 [3] 中需要假设系数满足如下形式的局部单调性条件, 即对任意的 $v_1, v_2 \in V$, 存在常数 K , 使得

$$2_{V^*} \langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle_V + \|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_2^2 \leq (K + \rho(v_2)) \|v_1 - v_2\|_H^2, \quad (1.2)$$

其中 $\rho : V \rightarrow [0, +\infty)$ 为局部有界可测函数 (只依赖于 v_2 一个变量), $_{V^*} \langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 表示 V^* 和 V 的对偶运算.

在应用到具体的 SPDE 模型时, 我们发现有许多随机偏微分方程不满足上述形式的局部单调性条件, 而是满足如下形式的更一般的局部单调性条件 (参见文献 [4–6]):

$$2_{V^*} \langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle_V + \|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_2^2 \leq (K + \rho(v_2) + \eta(v_1)) \|v_1 - v_2\|_H^2, \quad (1.3)$$

其中 $\rho, \eta : V \rightarrow [0, +\infty)$ 为局部有界可测函数. 相比条件 (1.2), (1.3) 更具一般性, 可以涵盖更多类型的 SPDE 模型, 如随机 Cahn-Hilliard 方程、随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程和随机驯服 (tamed) 3 维 Navier-Stokes 方程.

在可加噪声情形, Liu 和 Röckner^[6] 给出了带有局部单调性条件 (1.3) 的 SPDE 的适定性结果, 目前可乘噪声下的强解存在唯一性在文献中还没有直接的结果. Goldys 等^[7] 证明了一类抽象随机偏微分方程鞅解的存在性, Röckner 等^[8] 提供了一般框架解决了一类无穷维随机泛函偏微分方程的鞅解问题, 并证明了满足局部单调性条件的非线性带延迟 SPDE 解的存在唯一性. 本文在文献 [7, 8] 的基础上, 假设方程系数满足局部单调性条件 (1.3), 可以证明鞅解的存在性和轨道唯一性, 从而由 Yamada-Watanabe 定理可以得到方程强解的存在唯一性.

在方程强解存在唯一的基础上, 本文进一步研究如下小噪声情形的 Freidlin-Wentzell 型大偏差原理:

$$dX_t^\varepsilon = A(t, X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon B(t, X_t^\varepsilon)dW_t, \quad X_0^\varepsilon = x.$$

大偏差原理主要探究的是尾 (偏差) 事件 $\mathcal{A}$ 发生概率的渐近估计, 尤其是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $P(X^\varepsilon \in \mathcal{A})$ 能否以指数速度收敛到 0. 大偏差原理是现代概率论研究的热点问题, 目前文献中存在着非常丰富的研究成果, 相关的研究成果可以参见文献 [9–16]. 当探讨无穷维模型时, 在对方程的解进行指数概率估计上存在很多技术性困难, 而近年来文献中常用的弱收敛方法正好可以避免这一难题 (参见文献 [10–14, 17–19]). 所以, 本文也采用随机控制和弱收敛方法来证明上述方程的大偏差原理. 受文献 [10] 的启发, 本文将采用时间离散化的技巧, 假定扩散系数满足某种时间正则性 (见第 3 节条件 (B5)). 但与文献 [10, 13] 研究不同的是, 我们将漂移项系数 A 满足的局部单调性条件进一步弱化 (即 (1.3)), 从而将文献 [10, 12–14] 中的大偏差结果拓展到一类更广的带局部单调系数的随机偏微分方程的情形. 因此, 本文的结果可以应用到更多的 SPDE 模型, 如随机 Cahn-Hilliard 方程、随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程和随机驯服 3 维 Navier-Stokes 方程. 由于这些模型只满足更一般的局部单调性条件 (1.3), 因此已有的相关结果 (如文献 [10, 12, 13, 19]) 并不能应用于上述 SPDE 模型.

本文余下的内容安排如下: 第 2 节引进一些记号和假设, 并给出方程 (1.1) 解的存在唯一性结果; 第 3 节证明方程 (1.1) 的大偏差原理; 第 4 节将本文的主要结果应用到一些具体的 SPDE 模型.

2 适定性

首先介绍下面的函数类 $\mathfrak{U}^q, q \geq 1$. 称一个下半连续函数 $\mathcal{N}: Y \rightarrow [0, \infty)$ 属于 $\mathfrak{U}^q$, 如果 $\mathcal{N}(x) = 0$, 则 $x = 0$, 并且

$$\mathcal{N}(cy) \leq c^q \mathcal{N}(y), \quad \forall c \geq 0, \quad y \in Y,$$

以及

$$\{y \in Y : \mathcal{N}(y) \leq 1\} \text{ 在 } Y \text{ 内是紧的.}$$

假设 V 为一个 Hilbert 空间, 嵌入 $V \subset Y \subset H$ 均为连续和稠密嵌入, 且 $V \subset Y$ 是紧嵌入. 此外, 假设存在常数 C 使得对任意的 $v, v_1, v_2 \in V$ 和 $t \in [0, T]$, 方程 (1.1) 系数 A 和 B 满足如下的条件:

(B1) (弱连续性) 对于任意的 $x, u_n, u \in V$, 如果 u_n 在 Y 上强收敛到 u , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V^* \langle A(t, u_n), x \rangle_V = V^* \langle A(t, u), x \rangle_V,$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^*(t, u_n)(x) - B^*(t, u)(x)\|_U = 0,$$

这里 B^* 为 B 的共轭算子;

(B2) (强迫性) 存在 $\mathcal{N}_1 \in \mathfrak{U}^q, q \geq 2$, 使得

$$V^* \langle A(t, v), v \rangle_V \leq -\mathcal{N}_1(v) + C(1 + \|v\|_H^2);$$

(B3) (增长性) 对上述 (B2) 中的 $\mathcal{N}_1$, 存在常数 $\beta \geq \beta' > 1$, 使得

$$\begin{aligned} \|A(t, v)\|_{V^*}^{\beta'} &\leq C(1 + \mathcal{N}_1(v))(1 + \|v\|_H^\beta), \\ \|B(t, v)\|_2^2 &\leq C(1 + \|v\|_H^2). \end{aligned}$$

对于 $p \geq 1$, 令

$$\mathcal{N}_p(x) := \|x\|_H^{2(p-1)} \mathcal{N}_1(x), \quad x \in Y,$$

显然, $x \mapsto \mathcal{N}_p(x)$ 仍是 Y 上的下半连续函数.

令 $\Omega := C([0, \infty), V^*)$, 定义标准过程 $X: \Omega \rightarrow V^*$ 为 $X(t, \omega) := \omega(t)$. 对任意的 $t \geq 0$, 定义 σ -代数

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{X(r) : r \geq t\}, \quad \mathcal{F} := \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t.$$

令 $\mathcal{P}(\Omega)$ 表示 Ω 上所有概率测度的全体, 下面介绍方程鞅解的定义 (参见文献 [7]).

定义 2.1 (鞅解) 设 $x \in H$, 概率测度 $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ 称为初始值为 x 的方程 (1.1) 的鞅解, 如果如下条件成立:

(M1) $P(X_0 = x) = 1$, 并且对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$P\left\{X \in \Omega : \int_0^n \|A(s, X_s)\|_{V^*} ds + \int_0^n \|B(s, X_s)\|_2^2 ds < \infty\right\} = 1;$$

(M2) 对于 V 的可数稠子集 $\mathcal{E}$ 中任一元素 ℓ , 过程

$$M_\ell(t) := V^* \langle X_t, \ell \rangle_V - \int_0^t V^* \langle A(s, X_s), \ell \rangle_V ds$$

是一个关于 P 的连续的平方可积 $\mathcal{F}_t$ 鞅, 且二次变差过程为

$$\langle M_\ell \rangle(t) := \int_0^t \|B^*(s, X_s)(\ell)\|_U^2 ds,$$

其中 $B^*(s, X_s)$ 表示 $B(s, X_s)$ 的共轭算子.

(M3) 对任意的 $p \in \mathbb{N}$, 存在一个连续的正实值函数 $t \mapsto C_{t,p}$ (仅依赖 p, A 和 B)、一个下半连续函数 $\mathcal{N}_p : Y \rightarrow [0, \infty]$ 和一个 Lebesgue 零测集 $T_p \subset (0, \infty)$, 使得对于 $0 \leq s \notin T_p$ 和任意的 $t \geq s$, 都有

$$\mathbb{E}^P \left(\sup_{r \in [s, t]} \|X_r\|_H^{2p} + \int_s^t \mathcal{N}_p(X_r) dr \middle| \mathcal{F}_s \right) \leq C_{t-s,p} \cdot (\|X_s\|_H^{2p} + 1).$$

由文献 [7, 定理 4.1] 可以给出方程鞅解的存在性结果.

定理 2.1 假设系数满足 (B1)–(B3), 则对初值 $x \in H$, 方程 (1.1) 存在鞅解 $P \in \mathcal{P}(\Omega)$, 使得对任意的 $p \in \mathbb{N}, T > 0$, 有

$$\mathbb{E}^P \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|_H^{2p} + \int_0^T \mathcal{N}_p(X_t) dt \right) < \infty. \quad (2.1)$$

注 2.1 注意到这里的增长性条件 (B3) 要比文献 [7, 定理 4.1] 中的增长性条件稍弱一些, 但是文献 [7, 定理 4.1] 的证明可以很容易地推广到定理 2.1 的情形, 因此, 定理 2.1 的具体证明过程不再赘述.

为了进一步证明强解的存在唯一性, 考虑如下条件:

(B4) (局部单调性) $\forall v_1, v_2 \in V$, 存在常数 K ,

$$\begin{aligned} & 2_{V^*} \langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle_V + \|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_2^2 \\ & \leq (K + \rho(v_2) + \eta(v_1)) \|v_1 - v_2\|_H^2, \end{aligned}$$

其中 $\rho, \eta : V \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个可测的半连续 (hemicontinuous) 函数, 并且存在 $C, \gamma \in [0, \infty), p \in \mathbb{N}$ 使得

$$\rho(v) + \eta(v) \leq \mathcal{N}_p(v) + C(1 + \|v\|_H^\gamma), \quad v \in V.$$

对 (B3) 中的常数 $\beta' > 1$, 令

$$\alpha = \frac{\beta'}{\beta' - 1},$$

假设存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|v\|_V^\alpha \leq C \mathcal{N}_1(v), \quad v \in V. \quad (2.2)$$

接下来给出方程强解的定义.

定义 2.2 (强解) 称方程 (1.1) 的强解存在, 如果对每一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 及其上的 $\mathcal{F}_t$ 适应的 Wiener 过程 $\{W_t\}$, 对任意给定初值 $x \in H$, 存在 $\mathcal{F}_t$ 适应过程 $\{X_t\} : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow H$, 使得对任意的 $T > 0$, 有

$$X \in L^\alpha([0, T] \times \Omega, dt \otimes P; V) \cap L^2([0, T] \times \Omega, dt \otimes P; H),$$

并且在 V^* 中 P -a.s. 有

$$X_t = x + \int_0^t A(s, X_s) ds + \int_0^t B(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, T].$$

定理 2.2 假设系数满足 (B1)–(B4) 并且 (2.2) 成立, 则对任意 $x \in H$, 方程 (1.1) 存在以 x 为初值的唯一强解 $X \in C([0, \infty); H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$, 并且对任意 $p \in \mathbb{N}$, $T > 0$, 有

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} \|X_t\|_H^{2p} + \int_0^T \mathcal{N}_p(X_t) dt \right) < \infty.$$

证明 利用定理 2.1 和鞅表示定理 (参见文献 [20, 定理 2]), 可以得到方程 (1.1) 弱解的存在性, 即对任意给定的初值 $x \in H$, 存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 及其上的 $\mathcal{F}_t$ 适应的 Wiener 过程 $\{W_t\}$ 和循序可测过程 $X_t : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow H$, 使得对任意 $T > 0$, (2.1) 成立, 并且在 V^* 中 P -a.s. 有

$$X_t = x + \int_0^t A(s, X_s) ds + \int_0^t B(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, T].$$

从而由 (2.2) 可得 $X \in L^\alpha([0, T] \times \Omega, dt \otimes P; V)$. 由 (B3) 和 (2.1) 可知, 对任意 $T > 0$, 有

$$E P \left(\int_0^T \|A(t, X_s)\|_{V^*}^{\beta'} ds + \int_0^T \|B(t, X_t)\|_2^2 dt \right) < \infty.$$

于是由 (2.2) 和文献 [4, 定理 4.2.5] 可知, $X \in C([0, \infty), H)$.

接下来证明解的轨道唯一性. 假设 X 和 Y 是方程 (4.1) 的两个解, 且初值 $X_0 = Y_0$, a.s., 即

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t A(s, X_s) ds + \int_0^t B(s, X_s) dW(s), \quad t \in [0, T], \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t A(s, Y_s) ds + \int_0^t B(s, Y_s) dW(s), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

由 Itô 公式和 (B4), 可得

$$\begin{aligned} & e^{-\int_0^t (K + \eta(X_s) + \rho(Y_s)) ds} \|X_t - Y_t\|_H^2 \\ &= \|X_0 - Y_0\|_H^2 + \int_0^t e^{-\int_0^s (K + \eta(X_r) + \rho(Y_r)) dr} \{ (2_{V^*} \langle A(s, X_s) - A(s, Y_s), X_s - Y_s \rangle_V \\ &\quad + \|B(s, X_s) - B(s, Y_s)\|_2^2 - (K + \eta(X_r) + \rho(Y_r)) \|X_s - Y_s\|_H^2) ds \\ &\quad + \langle X_s - Y_s, (B(s, X_s) - B(s, Y_s)) dW_s \rangle_H \} \\ &\leq \|X(0) - Y(0)\|_H^2 + \int_0^t e^{-\int_0^s (K + \eta(X_r) + \rho(Y_r)) dr} \langle X_s - Y_s, (B(s, X_s) - B(s, Y_s)) dW_s \rangle_H. \end{aligned}$$

对上式两边取期望, 由标准的停时技巧可得

$$E[e^{-\int_0^t (K + \eta(X_s) + \rho(Y_s)) ds} \|X_t - Y_t\|_H^2] \leq E\|X_0 - Y_0\|_H^2, \quad t \in [0, T].$$

又因为 $X(0) = Y(0)$, a.s., 于是,

$$\mathbb{E}[e^{-\int_0^t (K + \eta(X_s) + \rho(Y_s)) ds} \|X_t - Y_t\|_H^2] = 0, \quad t \in [0, T].$$

根据 (B4) 和 (2.1), 有

$$\int_0^T (\eta(X_s) + \rho(Y_s)) ds < \infty, \quad \text{P-a.s.}$$

因此, 对任意的 $t \in [0, T]$, 有

$$X_t = Y_t, \quad \text{P-a.s.}$$

由 X 和 Y 的轨道连续性可得方程解的轨道唯一性. 再根据 Yamada-Watanabe 定理 [21], 方程的强解存在唯一性得证. $\square$

3 大偏差原理

接下来考虑如下小噪声情形 SPDE 的大偏差:

$$dX_t^\varepsilon = A(t, X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon B(t, X_t^\varepsilon) dW_t, \quad \varepsilon > 0, \quad X_0^\varepsilon = x \in H. \quad (3.1)$$

大偏差原理研究的是尾 (偏差) 事件 $\mathcal{A}$ 发生概率的渐近估计, 尤其是当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\mathbb{P}(X^\varepsilon \in \mathcal{A})$ 能否以指数速度收敛到 0, 这种指数衰减的速度可以用速率函数来描述. 下面先给出速率函数和大偏差原理的定义.

设 $\{X^\varepsilon\}$ 为一族定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上取值于 Banach 空间 E 的随机变量.

定义 3.1 (速率函数) 如果函数 $I: E \rightarrow [0, +\infty]$ 是下半连续的, 即当 $x_n \rightarrow x$ 时有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I(x_n) \geq I(x),$$

则称函数 I 为速率函数. 如果对每个 $K < \infty$, 水平集 $\{x \in E: I(x) \leq K\}$ 是紧集, 则称 I 是好的速率函数.

定义 3.2 (大偏差原理) 称 $\{X^\varepsilon\}$ 满足速率函数为 I 的大偏差原理, 如果对于 E 中每个 Borel 集 A , 有

$$-\inf_{x \in A^\circ} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}(X^\varepsilon \in A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{P}(X^\varepsilon \in A) \leq -\inf_{x \in \bar{A}} I(x),$$

其中 A° 和 $\bar{A}$ 分别表示 A 在 E 中的内部和闭包.

本文主要应用弱收敛方法来证明大偏差原理. 弱收敛方法的基础是大偏差原理与 Laplace 原理之间的等价性, 下面给出 Laplace 原理的定义.

定义 3.3 (Laplace 原理) 称 $\{X^\varepsilon\}$ 满足具有速率函数为 I 的 Laplace 原理, 如果对 E 上所有的实值有界连续函数 h , 都有下式成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbb{E} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} h(X^\varepsilon) \right] \right\} = -\inf_{x \in E} \{h(x) + I(x)\}.$$

Pukhalskii [16] 指出如果 E 为 Polish 空间, I 为好的速率函数, 那么上述的大偏差原理与 Laplace 原理等价, 详细证明可参见文献 [22, 23].

令 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上取值于可分 Hilbert 空间 U 的柱 Wiener 过程 (即 W 的轨道取值于 $C([0, T]; U_1)$, 这里的 U_1 是 Hilbert 空间且 $U \subset U_1$ 是 Hilbert-Schmidt 嵌入). 假设 $g^\varepsilon : C([0, T]; U_1) \rightarrow E$ 是可测映射且 $X^\varepsilon = g^\varepsilon(W)$. 令

$$\mathcal{A} = \left\{ v : v \text{ 是 } U \text{ 值的 } \mathcal{F}_t\text{-可料过程且 } \int_0^T \|v_s(\omega)\|_U^2 ds < \infty \text{ a.s.} \right\},$$

$$S_M = \left\{ \phi \in L^2([0, T], U) : \int_0^T \|\phi_s\|_U^2 ds \leq M \right\}.$$

集合 S_M 被赋予弱拓扑后为一个 Polish 空间. 定义

$$\mathcal{A}_M = \{v \in \mathcal{A} : v(\omega) \in S_M, P\text{-a.s.}\}.$$

Budhiraja 和 Dupuis^[24] 给出了 Laplace 原理 (即大偏差原理) 成立的下述充分条件.

(A) 设存在一个可测映射 $g^0 : C([0, T]; U_1) \rightarrow E$ 使得以下两条件成立:

(i) 假设 $\{v^\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \mathcal{A}_M$, $M < \infty$. 如果 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, S_M 值随机变量 v^ε 依分布收敛到 v , 则有

$$g^\varepsilon\left(W + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\cdot v_s^\varepsilon ds\right) \xrightarrow{\text{依分布}} g^0\left(\int_0^\cdot v_s ds\right).$$

(ii) 对任意的 $M < \infty$, 集合

$$K_M = \left\{ g^0\left(\int_0^\cdot \phi_s ds\right) : \phi \in S_M \right\}$$

为 E 的紧子集.

下面的结果来自 Budhiraja 和 Dupuis (参见文献 [24, 定理 4.4]).

定理 3.1 若 $X^\varepsilon = g^\varepsilon(W)$ 并且条件 (A) 成立, 则 $\{X^\varepsilon\}$ 在 E 上满足具有好的速率函数 I 的 Laplace 原理 (因而也满足大偏差原理), 其中 I 由下式定义:

$$I(f) = \inf_{\{\phi \in L^2([0, T]; U) : f = g^0(\int_0^\cdot \phi_s ds)\}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|_U^2 ds \right\}. \quad (3.2)$$

由定理 2.2 可知, 方程 (3.1) 存在唯一的强解 $\{X^\varepsilon\}$ 取值于 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$, 因此存在 Borel 可测函数

$$g^\varepsilon : C([0, T]; U_1) \rightarrow C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V),$$

使得 $X^\varepsilon = g^\varepsilon(W)$ a.s. 考虑方程 (3.1) 对应的骨架方程

$$\frac{dz_t^\phi}{dt} = A(t, z_t^\phi) + B(t, z_t^\phi)\phi_t, \quad z_0^\phi = x, \quad \phi \in L^2([0, T]; U). \quad (3.3)$$

若对任意的 $v \in V$, 存在元素 $z^\phi \in C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 且

$$\langle z_t^\phi, v \rangle_H = \langle x, v \rangle_H + \int_0^t \langle A(s, z_s^\phi) + B(s, z_s^\phi)\phi_s, v \rangle_V ds, \quad t \in [0, T], \quad (3.4)$$

则称 z^ϕ 为方程 (3.3) 的解.

为了证明大偏差原理成立, 还需要假设方程系数满足如下条件:

(B4') $\forall v_1, v_2 \in V$, 存在常数 K 和 $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} & 2_{V^*} \langle A(t, v_1) - A(t, v_2), v_1 - v_2 \rangle_V + \|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_2^2 \\ & \leq -\delta \|v_1 - v_2\|_V^\alpha + (K + \rho(v_2) + \eta(v_1)) \|v_1 - v_2\|_H^2, \end{aligned}$$

其中 $\rho, \eta: V \rightarrow [0, +\infty)$ 是一个可测的半连续函数, 并且存在 $C, \gamma \in [0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$ 使得

$$\rho(v) + \eta(v) \leq \mathcal{N}_p(v) + C(1 + \|v\|_H^\gamma), \quad v \in V, \quad (3.5)$$

以及存在常数 C , 使得

$$\|B(t, v_1) - B(t, v_2)\|_2^2 \leq C \|v_1 - v_2\|_H^2.$$

(B5) (时间正则性) 存在常数 $\nu > 0$, $L \geq 0$, 使得对任意的 $t_1, t_2 \in [0, T]$, 有

$$\|B(t_1, v) - B(t_2, v)\|_2 \leq L(1 + \|v\|_V) |t_1 - t_2|^\nu. \quad (3.6)$$

下面给出本文的一个主要定理, 即 Freidlin-Wentzell 型大偏差原理.

定理 3.2 假设条件 (B1)–(B3)、(B4')、(B5) 和 (2.2) 成立. 令 $X^\varepsilon = \{X_t^\varepsilon\}_{t \in [0, T]}$ 是方程 (3.1) 的解, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\{X^\varepsilon\}$ 满足 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 上的大偏差原理, 其中速率函数 I 由下式给出:

$$I(f) = \inf_{\{\phi \in L^2([0, T]; U): f = g^0(\int_0^\cdot \phi_s ds)\}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\phi(s)\|_U^2 ds \right\}.$$

接下来将证明定理 3.2, 为此始终假设定理 3.2 的条件成立. 首先需要证明骨架方程 (3.3) 解的存在唯一性.

引理 3.1 对任意的 $x \in H$ 和 $\phi \in L^2([0, T]; U)$, 方程 (3.3) 存在唯一解.

证明 设 $\phi \in L^\infty([0, T]; U)$, 令

$$\tilde{A}(s, v) := A(s, v) + B(s, v)\phi_s.$$

易证 $\tilde{A}$ 满足条件 (B1)–(B4), 由定理 2.2 可知, 方程 (3.3) 存在唯一解.

易知在 $L^2([0, T]; U)$ 内可以找到序列 ϕ^n 强收敛到 ϕ . 设 z^n 为方程 (3.3) 对应 ϕ^n 的唯一解, 下证 $\{z^n\}$ 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 内为一个 Cauchy 列. 对于 $z \in C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$, 令

$$\|z\| := \sup_{t \in [0, T]} \|z_t\|_H^2 + \delta \int_0^T \|z_t\|_V^\alpha dt.$$

设 z^n 为方程 (3.3) 对应 ϕ 替换成 ϕ^n 的唯一解, 下面证明 $\{z^n\}$ 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 中为一个 Cauchy 列. 由条件 (B4') 可知,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z_t^n - z_t^m\|_H^2 &= 2_{V^*} \langle A(t, z_t^n) - A(t, z_t^m), z_t^n - z_t^m \rangle_V \\ &\quad + 2 \langle B(t, z_t^n)\phi_t^n - B(t, z_t^m)\phi_t^m, z_t^n - z_t^m \rangle_H \\ &= 2_{V^*} \langle A(t, z_t^n) - A(t, z_t^m), z_t^n - z_t^m \rangle_V \\ &\quad + 2 \langle (B(t, z_t^n) - B(t, z_t^m))\phi_t^n, z_t^n - z_t^m \rangle_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\langle B(t, z_t^m)(\phi_t^n - \phi_t^m), z_t^n - z_t^m \rangle_H \\
& \leq 2_{V^*} \langle A(t, z_t^n) - A(t, z_t^m), z_t^n - z_t^m \rangle_V + \|B(t, z_t^n) - B(t, z_t^m)\|_2^2 \\
& \quad + \|\phi_t^n\|_U^2 \|z_t^n - z_t^m\|_H^2 + 2\langle z_t^n - z_t^m, B(t, z_t^m)(\phi_t^n - \phi_t^m) \rangle_H \\
& \leq (K + \rho(z_t^m) + \eta(z_t^n) + \|\phi_t^n\|_U^2 + \|B(t, z_t^m)\|_2^2) \|z_t^n - z_t^m\|_H^2 \\
& \quad - \delta \int_0^t \|z_t^n - z_t^m\|_V^\alpha dt + \|\phi_t^n - \phi_t^m\|_U^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

故由 Gronwall 引理可知,

$$\|z^n - z^m\| \leq \exp \left\{ \int_0^T (K + \rho(z_t^m) + \eta(z_t^n) + \|\phi_t^n\|_U^2 + \|B(t, z_t^m)\|_2^2) dt \right\} \int_0^T \|\phi_t^n - \phi_t^m\|_U^2 dt. \tag{3.8}$$

由条件 (B2) 可知,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|z_t^n\|_H^2 & = 2_{V^*} \langle A(t, z_t^n), z_t^n \rangle_V + 2\langle B(t, z_t^n)\phi_t^n, z_t^n \rangle_H \\
& \leq -2\mathcal{N}_1(z_t^n) + C(1 + \|z_t^n\|_H^2) + \|\phi_t^n\|_U^2 \|z_t^n\|_H^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

则根据 Gronwall 引理和 ϕ^n 在 $L^2([0, T]; U)$ 上的有界性可以得到

$$\|z^n\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{N}_1(z_t^n) dt \leq C \exp \left\{ \int_0^T (C + \|\phi_t^n\|_U^2) dt \right\} (\|x\|_H^2 + T) \leq C < \infty. \tag{3.10}$$

从而得到

$$\int_0^T \|B(t, z_t^m)\|_2^2 dt \leq C \int_0^T (1 + \|z_t^m\|_H^2) dt \leq C < \infty. \tag{3.11}$$

结合 (3.8)、(3.11) 和 $\phi^n \rightarrow \phi$ ($n \rightarrow \infty$), 可以得出 $\{z^n\}$ 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 上是 Cauchy 列, 其极限用 z^ϕ 表示. 接下来由经典的单调性技巧 (参见文献 [25, 定理 30.A]) 可知 (3.3) 对应于 ϕ 的解是 z^ϕ . $\square$

下一引理主要用于研究由方程 (3.1) 和 (3.3) 对应的随机控制问题解的时间增量. 考虑如下方程:

$$dz_t^{\phi^\varepsilon} = A(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dt + \varepsilon B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dW_t + B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})\phi_t dt, \quad z_0^{\phi^\varepsilon} = x, \tag{3.12}$$

其中 $\phi \in \mathcal{A}_M$, 并且由定理 2.2 可知, 对任意的 $x \in H$, 方程 (3.12) 存在唯一的解 $z_t^{\phi^\varepsilon}$.

先给出一些记号. 设 $\psi_n : [0, T] \rightarrow [0, T]$, $n \in \mathbb{Z}$ 为可测映射, 且对任意的 $s \in [0, T]$, 都有

$$s \leq \psi_n(s) \leq (s + c2^{-n}) \wedge T,$$

其中 $c \in \mathbb{R}_+$. 对给定 $N > 0$, $\phi \in \mathcal{A}_N$, 对任意的 $t \in [0, T]$, 定义

$$Q_N(t) = \left\{ \omega : \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \|z_s^{\phi, \varepsilon}(\omega)\|_H^2 \right) \vee \left(\int_0^t \mathcal{N}_1(z_s^{\phi, \varepsilon}(\omega)) ds \right) \leq N \right\}.$$

引理 3.2 令 $\varepsilon_0, M, N > 0$, 存在常数 $c \in \mathbb{R}_+$ (只依赖于 T, M, N 和 ε_0), 使得对任意的 $\phi \in \mathcal{A}_M$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, 有

$$H_n(\phi^\varepsilon) := \mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T \|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_{\psi_n(s)}^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 ds \right] \leq c2^{-\frac{n}{2}}. \tag{3.13}$$

证明 令 $\phi \in \mathcal{A}_M$, $\varepsilon \geq 0$, $\forall s \in [0, T]$, 由 Itô 公式可得

$$\|z_{\psi_n(s)}^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 = 2 \int_s^{\psi_n(s)} \langle z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}, dz_r^{\phi^\varepsilon} \rangle_H + \varepsilon^2 \int_s^{\psi_n(s)} \|B(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_2^2 dr.$$

故

$$H_n(\phi, \varepsilon) = \sum_{1 \leq i \leq 4} H_{n,i},$$

其中

$$\begin{aligned} H_{n,1} &= \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \|B(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_2^2 dr \right], \\ H_{n,2} &= 2\varepsilon \mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \langle B(r, z_r^{\phi^\varepsilon}) dW_r, z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon} \rangle_H \right], \\ H_{n,3} &= 2\mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \langle B(r, z_r^{\phi^\varepsilon}) \phi_r, z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon} \rangle_H dr \right], \\ H_{n,4} &= 2\mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} v^* \langle A(r, z_r^{\phi^\varepsilon}), z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon} \rangle_V dr \right]. \end{aligned}$$

又知 $Q_N(T) \subset Q_N(r)$, $r \in [0, T]$. 故在 $Q_N(r)$ 上有 $\|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H + \|z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H \leq 2\sqrt{N}$, $0 \leq s \leq r \leq T$.

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式、条件 (B3)、Schwarz 不等式、 $\mathcal{A}_M$ 的定义、Fubini 定理和 (3.11) 可得, 对 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, 有

$$\begin{aligned} |H_{n,1}| &\leq \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) dr \right] \\ &\leq \varepsilon_0^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{Q_N(T)} C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) \left(\int_{(r-c2^{-n}) \vee 0}^r ds \right) dr \right] \\ &\leq \varepsilon_0^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{Q_N(T)} C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) \cdot c2^{-n} dr \right] \leq C_1 2^{-n}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} |H_{n,2}| &\leq 6\varepsilon \int_0^T ds \mathbb{E} \left(\int_s^{\psi_n(s)} \|B(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_2^2 1_{Q_N(r)} \|z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 dr \right)^{1/2} \\ &\leq 12\varepsilon_0 \sqrt{N} \int_0^T ds \mathbb{E} \left(\int_s^{\psi_n(s)} C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) dr \right)^{1/2} \\ &\leq 12\varepsilon_0 \sqrt{NT} \left(\mathbb{E} \int_0^T C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) \left(\int_{(r-c2^{-n}) \vee 0}^r ds \right) dr \right)^{1/2} \leq C_2 2^{-n/2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} |H_{n,3}| &\leq 2\mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \|B(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_2 \|\phi_r\|_U \|z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H dr \right] \\ &\leq 4\sqrt{N} \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{Q_N(T)} \|\phi_r\|_U \sqrt{C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2)} \left(\int_{(r-c2^{-n}) \vee 0}^r ds \right) dr \right] \\ &\leq 4\sqrt{N} c 2^{-n} \sqrt{M} \mathbb{E} \left(1_{Q_N(T)} \int_0^T C(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) dr \right)^{1/2} \leq C_3 2^{-n}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

由 (B3) 和 (2.2) 可得

$$|H_{n,4}| \leq 2\mathbb{E} \left[1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \|A(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_{V^*} \|z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}\|_V dr \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left(\mathbb{E} 1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \|A(r, z_r^{\phi^\varepsilon})\|_{V^*}^{\beta'} dr \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(\mathbb{E} 1_{Q_N(T)} \int_0^T ds \int_s^{\psi_n(s)} \|z_r^{\phi^\varepsilon} - z_s^{\phi^\varepsilon}\|_V^\alpha dr \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq C \left(2^{-n} \mathbb{E} 1_{Q_N(T)} \int_0^T (1 + \mathcal{N}_1(z_r^{\phi^\varepsilon})(1 + \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_H^\beta) dr) \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(2^{-n} \mathbb{E} 1_{Q_N(T)} \int_0^T \|z_r^{\phi^\varepsilon}\|_V^\alpha dr \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq C_4 2^{-n},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 均为只依赖于 T 、 M 、 N 和 ε_0 的常数.

综合 (3.14)–(3.17), 可知 (3.13) 成立. $\square$

结合 Girsanov 定理, 我们有如下引理, 即方程 (3.12) 存在唯一的解.

引理 3.3 设 $\{\phi^\varepsilon\} \subset \mathcal{A}_M$, $M < \infty$, 令

$$X^\varepsilon = g^\varepsilon \left(W + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\cdot \phi_s^\varepsilon ds \right),$$

则 X^ε 是方程 (3.12) 的唯一解.

引理 3.4 设 $\{\phi^\varepsilon\} \subset \mathcal{A}_M$, $M < \infty$, ϕ^ε 在 S_M 内依分布收敛到 ϕ , 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时有

$$g^\varepsilon \left(W + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\cdot \phi_s^\varepsilon ds \right) \xrightarrow{\text{依分布}} g^0 \left(\int_0^\cdot \phi_s ds \right).$$

证明 易知

$$d(z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi) = [A(t, z_t^{\phi^\varepsilon}) - A(t, z_t^\phi)]dt + [B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})\phi_t^\varepsilon - B(t, z_t^\phi)\phi_t]dt + \varepsilon B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dW_t. \tag{3.18}$$

现在要证当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $z_t^{\phi^\varepsilon}$ 依分布收敛于 z_t^ϕ . 设 $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, 由 Itô 公式、Young 不等式和条件 (B4'), 可得

$$\begin{aligned}
d\|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|_H^2 &= 2_{V^*} \langle A(t, z_t^{\phi^\varepsilon}) - A(t, z_t^\phi), z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi \rangle_V dt \\
&\quad + 2 \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, (B(t, z_t^{\phi^\varepsilon}) - B(t, z_t^\phi))\phi_t^\varepsilon + B(t, z_t^\phi)(\phi_t^\varepsilon - \phi_t) \rangle_H dt \\
&\quad + \varepsilon^2 \|B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})\|_2^2 dt + 2\varepsilon \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dW_t \rangle_H \\
&\leq (2_{V^*} \langle A(t, z_t^{\phi^\varepsilon}) - A(t, z_t^\phi), z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi \rangle_V + \|B(t, z_t^{\phi^\varepsilon}) - B(t, z_t^\phi)\|_2^2) dt \\
&\quad + 2\|\phi_t^\varepsilon\|_U^2 \|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|_H^2 dt + 2 \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, B(t, z_t^\phi)(\phi_t^\varepsilon - \phi_t) \rangle_H dt \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \|B(t, z_t^\phi)\|_2^2 dt + 2\varepsilon \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dW_t \rangle_H \\
&\leq (C + \rho(z_t^\phi) + \eta(z_t^{\phi^\varepsilon}) + \|\phi_t^\varepsilon\|_U^2) \|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|_H^2 dt - \delta \|z_t^n - z_t^m\|_V^\alpha \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \|B(t, z_t^\phi)\|_2^2 dt + 2 \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, B(t, z_t^\phi)(\phi_t^\varepsilon - \phi_t) \rangle_H dt \\
&\quad + 2\varepsilon \langle z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi, B(t, z_t^{\phi^\varepsilon})dW_t \rangle_H.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

于是有下面不等式成立:

$$\|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|^2 \leq \int_0^t (C + \rho(z_s^\phi) + \eta(z_s^{\phi^\varepsilon}) + \|\phi_s^\varepsilon\|_U^2) \|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi\|_H^2 ds + \sum_{i=1}^3 I_i(t, \varepsilon), \tag{3.20}$$

其中

$$I_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^2 \int_0^t \|B(s, z_s^\phi)\|_2^2 ds,$$

$$I_2(t, \varepsilon) = 2 \int_0^t \langle z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi, B(s, z_s^\phi)(\phi_s^\varepsilon - \phi_s) \rangle_H ds,$$

$$I_3(t, \varepsilon) = 2\varepsilon \int_0^t \langle z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi, B(s, z_s^{\phi^\varepsilon}) dW_s \rangle_H.$$

要证当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, z^{ϕ^ε} 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 上依分布收敛到 z^ϕ . 固定 $N > 0$, 对 $t \in [0, T]$, 令

$$Q_N(t) = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|z_s^\phi\|_H^2 \leq N \right\} \cap \left\{ \int_0^t \mathcal{N}_1(z_s^\phi) ds \leq N \right\},$$

$$Q_{N, \varepsilon}(t) = Q_N(t) \cap \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \|z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 \leq N \right\} \cap \left\{ \int_0^t \mathcal{N}_1(z_s^{\phi^\varepsilon}) ds \leq N \right\}.$$

固定 $N > 0$, $\phi, \phi^\varepsilon \in \mathcal{A}_M$ 使得当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 在 $L^2([0, T]; U)$ 的弱拓扑下有 $\phi^\varepsilon \rightarrow \phi$, a.s. 接下来将证明当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|_H^2 + \delta \int_0^T \|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi\|_V^\alpha ds \right) \right] \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

由 (3.20)、(3.11) 和 Gronwall 引理可得, 在 $Q_{N, \varepsilon}(T)$ 上有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|^2 \leq \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (I_2(t, \varepsilon) + I_3(t, \varepsilon)) + 2C\varepsilon^2 \right] \cdot \exp(M + CT).$$

由此可估计出对某常数 $\tilde{C} = C(T, M, N)$, $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{E}(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \|z_t^{\phi^\varepsilon} - z_t^\phi\|^2) \leq \tilde{C} \left(\varepsilon^2 + \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} (I_2(t, \varepsilon) + I_3(t, \varepsilon)) \right] \right). \quad (3.22)$$

由 $Q_{N, \varepsilon}(\cdot)$ 的递减性可得 $\mathbb{E}(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_3(t, \varepsilon)|) \leq \mathbb{E}(\lambda_\varepsilon)$, 其中

$$\lambda_\varepsilon := 2\varepsilon \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t 1_{Q_{N, \varepsilon}(s)} \langle z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi, B(s, z_s^{\phi^\varepsilon}) dW_s \rangle_H \right|.$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 标量值随机变量 λ_ε 在 L^1 中收敛到 0. 事实上, 由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式、条件 (B3) 和 $Q_{N, \varepsilon}(s)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda_\varepsilon) &\leq 6\varepsilon \mathbb{E} \left(\int_0^T 1_{Q_{N, \varepsilon}(s)} \|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi\|_H^2 \|B(s, z_s^{\phi^\varepsilon})\|_2^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 12\sqrt{N}\varepsilon \mathbb{E} \left(\int_0^T 1_{Q_{N, \varepsilon}(s)} C(1 + \|z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2) ds \right)^{1/2} \\ &\leq C(T, N)\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.23)$$

下面的计算应用引理 3.2, 并且对函数 ψ_n 做如下取值. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 定义 $[0, T]$ 上的阶梯函数 $s \mapsto \bar{s}_n$ 为

$$\bar{s}_n = t_{k+1} \equiv (k+1)T2^{-n}, \quad s \in [kT2^{-n}, (k+1)T2^{-n}), \quad (3.24)$$

则映射 $\psi_n(s) = \bar{s}_n$ 显然满足引理 3.2 中 $c = T$ 的情形. 若令 $t_k = kT2^{-n}$, $0 \leq k \leq 2^n$, $\forall n, N \geq 1$, 则有

$$\mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_2(t, \varepsilon)| \right) = 2\mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi, B(s, z_s^\phi)(\phi_s^\varepsilon - \phi_s) \rangle_H ds \right| \right)$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^5 \tilde{I}_i(N, n, \varepsilon), \quad (3.25)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(N, n, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle B(s, z_s^\phi)(\phi_s^\varepsilon - \phi_s), (z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi) - (z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi) \rangle_H ds \right| \right), \\ \tilde{I}_2(N, n, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle [B(s, z_s^\phi) - B(\bar{s}_n, z_{\bar{s}_n}^\phi)](\phi_s^\varepsilon - \phi_s), z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi \rangle_H ds \right| \right), \\ \tilde{I}_3(N, n, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle [B(\bar{s}_n, z_s^\phi) - B(\bar{s}_n, z_{\bar{s}_n}^\phi)](\phi_s^\varepsilon - \phi_s), z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi \rangle_H ds \right| \right), \\ \tilde{I}_4(N, n, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \sup_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \left| \left\langle B(t_k, z_{t_k}^\phi) \int_{t_{k-1}}^t (\phi_s^\varepsilon - \phi_s) ds, z_{t_k}^{\phi^\varepsilon} - z_{t_k}^\phi \right\rangle_H \right| \right), \\ \tilde{I}_5(N, n, \varepsilon) &= \mathbb{E} \left(1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sum_{k=1}^{2^n} \left| \left\langle B(t_k, z_{t_k}^\phi) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_s^\varepsilon - \phi_s) ds, z_{t_k}^{\phi^\varepsilon} - z_{t_k}^\phi \right\rangle_H \right| \right). \end{aligned}$$

利用 Schwarz 不等式、条件 (B3)、系数 B 的正则性和引理 3.2 (取 $\psi_n = \bar{s}_n$), 可以得到对某一常数 $\bar{C}_1 := C(T, M, N)$ 和任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(N, n, \varepsilon) &\leq \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T \|B(s, z_s^\phi)\|_2 \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U \|(z_s^{\phi^\varepsilon} - z_s^\phi) - (z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi)\|_H ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T \sqrt{C(1 + \|z_s^\phi\|_H^2)} \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U \sqrt{2(\|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 + \|z_s^\phi - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H^2)} ds \right] \\ &\leq \sqrt{2C(1 + N)} \left(\mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T (\|z_s^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 + \|z_s^\phi - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H^2) ds \right] \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \int_0^T \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \bar{C}_1 2^{-\frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

类似地, 由条件 (B3) 和引理 3.2 可得存在 $\bar{C}_3 := C(T, M, N)$ 和 $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{I}_3(N, n, \varepsilon) &\leq \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T \|B(\bar{s}_n, z_s^\phi) - B(\bar{s}_n, z_{\bar{s}_n}^\phi)\|_2 \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U \|z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H ds \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T C \|z_s^\phi - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U \|z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H ds \right] \\ &\leq 2\sqrt{N}C \left(\mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T \|z_s^\phi - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H^2 ds \right] \right)^{1/2} \cdot \left(\mathbb{E} \int_0^T \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \bar{C}_3 2^{-\frac{n}{4}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

由系数 B 的正则性 (条件 (B5)) 和 Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2(N, n, \varepsilon) &\leq \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T \|B(s, z_s^\phi) - B(\bar{s}_n, z_{\bar{s}_n}^\phi)\|_2 \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U \|z_{\bar{s}_n}^{\phi^\varepsilon} - z_{\bar{s}_n}^\phi\|_H ds \right] \\ &\leq L\sqrt{N}T2^{-n\nu} \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \int_0^T (1 + \|z_s^\phi\|_V) \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U ds \right] \end{aligned}$$

$$\leq \bar{C}_2 2^{-n\nu}, \quad (3.28)$$

其中 $\bar{C}_2 = C(T, M, N)$ 为常数.

由 Schwarz 不等式和条件 (B3) 可推导出对 $\bar{C}_4 = C(T, M, N)$ 和任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{I}_4(N, n, \varepsilon) &\leq \mathbb{E} \left[1_{G_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \|B(t_k, z_{t_k}^\phi)\|_2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U ds \|Z_\varepsilon(t_k)\|_H \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[1_{G_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \sqrt{C(1 + \|z_{t_k}^\phi\|_H^2)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U ds \|z_{t_k}^\varepsilon - z_{t_k}^\phi\|_H \right] \\ &\leq 2\sqrt{NCE} \left[\sup_{1 \leq k \leq 2^n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\phi_s^\varepsilon - \phi_s\|_U ds \right] \\ &\leq 4\bar{C}_4 2^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

最后, 由于 ϕ^ε 弱收敛到 ϕ , 因此, 对任意的 $a, b \in [0, T]$, $a < b$, 在 U 的弱拓扑下有

$$\int_a^b \phi_s^\varepsilon ds \rightarrow \int_a^b \phi_s ds.$$

因此, 由 $B(t_k, z_{t_k}^\phi)$ 是 U 到 H 上的紧算子可推导得对于任意的 k , 有

$$\left\| B(t_k, z_{t_k}^\phi) \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_s^\varepsilon ds - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_s ds \right) \right\|_H \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

因此, 由控制收敛定理可证得对任意固定的 n 和 N , $\tilde{I}_5(N, n, \varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. 故结合 (3.25)–(3.29) 可得对任意固定的 $N \geq 1$ 和任意整数 $n \geq 1$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[1_{Q_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_2(t, \varepsilon)| \right] \leq C_{N, T, M} 2^{-n(\nu \wedge \frac{1}{4})}.$$

由 n 的任意性可知, 对任意的 $N \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[1_{G_{N, \varepsilon}(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} |I_2(t, \varepsilon)| \right] = 0.$$

因此, 由 (3.22) 和 (3.23) 可得 (3.21). 对任意的 $\sigma > 0$, 有

$$\mathbb{P}(\|z^{\phi^\varepsilon} - z^\phi\| > \sigma) \leq \mathbb{P}(G_{N, \varepsilon}(T)^c) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}(1_{G_{N, \varepsilon}(T)} \|z^{\phi^\varepsilon} - z^\phi\|^2). \quad (3.30)$$

对 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\phi, \phi^\varepsilon \in \mathcal{A}_M$, 由 Chebyshev 不等式和 (3.10) 可知, 存在不依赖于 N 的常数 C 使得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q_{N, \varepsilon}(T)^c) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|z_s^\phi\|_H^2 > N \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 > N \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\int_0^T \mathcal{N}_1(z_s^\phi) ds > N \right) + \mathbb{P} \left(\int_0^T \mathcal{N}_1(z_s^{\phi^\varepsilon}) ds > N \right) \\ &\leq \frac{1}{N} \sup_{\phi, \phi^\varepsilon \in \mathcal{A}_M} \mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|z_s^\phi\|_H^2 + \sup_{0 \leq s \leq T} \|z_s^{\phi^\varepsilon}\|_H^2 + \int_0^T (\mathcal{N}_1(z_s^\phi) + \mathcal{N}_1(z_s^{\phi^\varepsilon})) ds \right) \\ &\leq \frac{C}{N}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

综合 (3.30)、(3.31) 和 (3.21) 可知, 对任意的 $N \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\|z^{\phi^\varepsilon} - z^\phi\| > \sigma) \leq C(T, M) N^{-1},$$

其中 $C(T, M)$ 为与 N 无关的常数, 从而, 对任意的 $\sigma > 0$, 有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\|z^{\phi^\varepsilon} - z^\phi\| > \sigma) = 0$. $\square$

下一引理主要证明紧性结果及速率函数为好的速率函数.

引理 3.5 固定 $M > 0$, 令 $K_M = \{z^\phi : \phi \in S_M\}$. 对初值 $x \in H$, 设 z^ϕ 是骨架方程 (3.3) 的唯一解, 则集合 K_M 为 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 中的紧子集.

证明 由于 S_M 是弱紧空间, 所以对任意一族序列 $\phi^n \in S_M$, 都存在 ϕ 使得 ϕ^n (或其子列) 在 $L^2([0, T]; U)$ 上弱收敛于极限. 设 z^n 和 z 分别是方程 (3.3) 关于 ϕ^n 和 ϕ 的解, 即

$$\begin{aligned} dz_t^n &= A(t, z_t^n)dt + B(t, z_t^n)\phi_t^n dt, \quad z_0^n = x, \\ dz_t &= A(t, z_t)dt + B(t, z_t)\phi_t dt, \quad z_0 = x. \end{aligned}$$

现在证明 z^n 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 中收敛到 z . 由 (3.7) 可得对 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \|z_t^n - z_t\|_H^2 + \delta \int_0^t \|z_s^n - z_s\|_V^\alpha ds &\leq \int_0^t (K + \rho(z_s) + \eta(z_s^n) + \|\phi_s^n\|_U^2) \|z_s^n - z_s\|_H^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle z_s^n - z_s, B(s, z_s)(\phi_s^n - \phi_s) \rangle_H ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

由 (3.10) 可知, 存在 $\bar{C} \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$\sup_n \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (\|z_t^n\|_H^2 + \|z_t\|_H^2) + \int_0^T (\mathcal{N}_1(z_t^n) + \mathcal{N}_1(z_t)) dt \right] = \bar{C}. \quad (3.33)$$

由 Gronwall 引理可得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|z_t^n - z_t\|_H^2 + \delta \int_0^t \|z_s^n - z_s\|_V^\alpha ds \leq 2 \exp(CT + M) \sum_{i=1}^5 T_i, \quad (3.34)$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^T | \langle B(s, z_s)(\phi_s^n - \phi_s), (z_s^n - z_s) - (z_{\bar{s}_N}^n - z_{\bar{s}_N}) \rangle_H | ds, \\ T_2 &= \int_0^T | \langle (B(s, z_s) - B(\bar{s}_N, z_s))(\phi_s^n - \phi_s), z_{\bar{s}_N}^n - z_{\bar{s}_N} \rangle_H | ds, \\ T_3 &= \int_0^T | \langle (B(\bar{s}_N, z_s) - B(\bar{s}_N, z_{\bar{s}_N}))(\phi_s^n - \phi_s), z_{\bar{s}_N}^n - z_{\bar{s}_N} \rangle_H | ds, \\ T_4 &= \sup_{1 \leq k \leq 2^N} \sup_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} \left| \left\langle B(t_k, z_{t_k}) \int_{t_{k-1}}^t (\phi_s^n - \phi_s) ds, z_{t_k}^n - z_{t_k} \right\rangle_H \right|, \\ T_5 &= \sum_{k=1}^{2^N} \left\langle B(t_k, z_{t_k}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_s^n - \phi_s) ds, z_{t_k}^n - z_{t_k} \right\rangle_H. \end{aligned}$$

根据引理 3.3、Schwarz 不等式和条件 (B3) 可知, 存在不依赖 n 和 N 的常数 C_i , 使得

$$T_1 \leq C \left(\int_0^T \|\phi_s^n - \phi_s\|_U^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T (\|z_s^n - z_{\bar{s}_N}^n\|_H^2 + \|z_s - z_{\bar{s}_N}\|_H^2) ds \right)^{1/2} \leq C_1 2^{-\frac{N}{4}}, \quad (3.35)$$

$$T_3 \leq C \left(\int_0^T \|z_s - z_{\bar{s}_N}\|_H^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^T \|\phi_s^n - \phi_s\|_U^2 ds \right)^{1/2} \leq C_3 2^{-\frac{N}{4}}, \quad (3.36)$$

$$T_4 \leq C \sup_{0 \leq t \leq T} (\|z_t^n\|_H + \|z_t\|_H) \cdot 2^{-\frac{N}{2}} \leq C_4 2^{-\frac{N}{2}}. \quad (3.37)$$

此外, 由条件 (B5) 知,

$$T_2 \leq C2^{-N\nu} \sup_{0 \leq t \leq T} (\|z_t^n\|_H + \|z_t\|_H) \cdot \int_0^T (1 + \|z_s\|_V)(\|\phi_s^n\|_U + \|\phi_s\|_U) ds \leq C2^{-N\nu}. \quad (3.38)$$

当 N 和 $k = 1, \dots, 2^N$ 为给定的数, $n \rightarrow \infty$, 由 ϕ^n 弱收敛到 ϕ 有 $\int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_s^n - \phi_s) ds$ 在 U 上弱收敛到 0. 因为 $B(t_k, z_{t_k})$ 为紧算子, 所以对固定的 k , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 H 上有 $B(t_k, z_{t_k}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_s^n - \phi_s) ds \rightarrow 0$.

又因 $\sup_{n,k} \|z_{t_k}^n - z_{t_k}\|_H \leq 2\sqrt{C}$, 故有 $\lim_n T_5 = 0$. 由 (3.34)–(3.38) 可得, 对 $N \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \|z_t^n - z_t\|_H^2 + \delta \int_0^T \|z_t^n - z_t\|_V^\alpha dt \right] \leq C2^{-N(\nu \wedge \frac{1}{4})}.$$

根据 N 的任意性, 可知当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|z^n - z\| \rightarrow 0$, 即 K_M 内每一序列均存在收敛子列, 因此, K_M 为 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 内相对紧子集.

最后, 设 $z^n \in K_M$, 且在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 内, $z^n \rightarrow v$. 由上述论证可知, 在 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 的相同拓扑下, $\{z^{n_k}, k \geq 1\}$ 收敛到 $z^\phi \in K_M$. 故 $v = z^\phi$, K_M 为 $C([0, T]; H) \cap L^\alpha([0, T]; V)$ 内一闭子集. $\square$

定理 3.2 的证明 综合引理 3.4、3.5 和定理 3.1 可知定理 3.2 的结论成立. $\square$

4 应用

本文的主要结果可以应用到文献 [10, 12, 13, 19] 中所考虑的 SPDE 模型 (由 Wiener 噪声驱动的情形). 本节将主要结果应用于一些其他类型的随机偏微分方程模型, 得到对应 SPDE 的大偏差原理. 这里主要以随机 Cahn-Hilliard 型方程、随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程和随机驯服 3 维 Navier-Stokes 方程为例. 值得注意的是这些模型只满足更弱的局部单调性条件 (B4), 因此已有的一些结果 (如文献 [10, 12, 13, 19]) 并不能应用于这些 SPDE 模型.

4.1 随机 Cahn-Hilliard 方程

Cahn-Hilliard 方程是一类经典的模型, 可用于描绘合金的相位分离现象. 关于这一模型的研究可参见文献 [26] (随机情形可参见文献 [27, 28]). 令 Λ 为 $\mathbb{R}^d$ 上一个带光滑边界的有界开区域, $d \leq 3$, 考虑如下形式的 Cahn-Hilliard 方程:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\Delta^2 u + \Delta \varphi(u), \quad u(0) = u_0, \\ \nabla u \cdot n &= \nabla(\Delta u) \cdot n = 0, \quad \text{在 } \partial\Lambda \text{ 上,} \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 Δ 表示 Laplace 算子, ∇ 为梯度, n 为边界 $\partial\Lambda$ 上的外单位法向量, 非线性项 φ 为一类函数, 下面给出其需满足的条件.

令 $C^4(\Lambda)$ 表示 Λ 上所有 4 阶连续可导函数的集合, 定义

$$V_0 := \{u \in C^4(\Lambda) : \text{在 } \partial\Lambda \text{ 上满足 } \nabla u \cdot n = \nabla(\Delta u) \cdot n = 0\}.$$

考虑如下 Gelfand 三元组:

$$V \subset H := L^2(\Lambda) \subset V^*,$$

其中 V 表示 $H^{2,2}(\Lambda)$ 中 V_0 的闭包, $H^{2,2}$ 范数定义如下:

$$\|u\|_{H^{2,2}} := \left(\int_{\Lambda} |\Delta u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

在证明过程中还需要用到 Gagliardo-Nirenberg 不等式 (参见文献 [29, 定理 2.25 和 2.21]): 对于带光滑边界的有界开域 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, 如果 $m, j \in \mathbb{Z}$, 且 $m > j \geq 0$, $q \in [1, \infty]$, 使得

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{j}{d} - \frac{ma}{d}, \quad \frac{j}{m} \leq a \leq 1,$$

其中 $a \neq 1$, 如果 $m - j - \frac{d}{2} = 0$, 那么存在常数 $C \in (0, \infty)$, 使得

$$\|u\|_{H^{j,q}} \leq C \|u\|_{H^{m,2}}^a \|u\|_{L^2}^{1-a}, \quad u \in H^{m,2}(\Lambda), \quad (4.2)$$

这里对于非负整数 j 和 q , 空间 $H^{j,q}(\Lambda)$ 表示在 $L^q(\Lambda)$ 内经典的 Sobolev 空间. 当 $j = 0$, $q = 0$, $m = 2$, $a = \frac{d}{4}$ ($d \leq 3$), $H^{2,2}(\Lambda) \subset L^\infty(\Lambda)$ 为连续嵌入.

现在考虑如下随机 Cahn-Hilliard 方程:

$$du_t^\varepsilon = A(u_t^\varepsilon)dt + \varepsilon B(t, u_t^\varepsilon)dW_t, \quad u_0^\varepsilon = x \in H, \quad (4.3)$$

其中 $Au = -\Delta u + \Delta \varphi(u)$, W_t 是 Hilbert 空间 U 上的柱 Wiener 过程, $B: [0, T] \times V \rightarrow L_2(U, H)$ 是可测映射.

定理 4.1 假设 $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, 存在常数 $C \in (0, \infty)$, $p \in [2, \frac{d+4}{d}]$ 使得

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &\geq -C, \quad |\varphi(x)| \leq C(1 + |x|^p), \quad x \in \mathbb{R}, \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

当 B 满足条件 (B1)–(B3)、(B4') 和 (B5) 时, 方程 (4.3) 存在唯一的强解 $\{X^\varepsilon\}$ 且满足大偏差原理.

证明 令

$$A(u) := A_1(u) + A_2(u), \quad u \in V_0,$$

其中

$$A_1(u) := -\Delta u, \quad A_2(u) := \Delta \varphi(u), \quad u \in V_0.$$

若 $u \in V_0$, 则存在常数 C , 当 $v \in V_0$ 时, 有

$$|_{V^*} \langle A_1(u), v \rangle_V| = | \langle -\Delta u, \Delta v \rangle | \leq C \|v\|_V \|u\|_V.$$

故 A_1 可以延拓为 V 到 V^* 的线性连续映射, 使得

$$\|A_1(u)\|_{V^*} \leq \|u\|_V, \quad u \in V_0.$$

进一步, 利用 V_0 元素的边界条件、 φ 的局部 Lipschitz 性质和 (4.2), $\forall u_1, u_2 \in V_0$, 有

$$\begin{aligned} |_{V^*} \langle A_2(u_1) - A_2(u_2), v \rangle_V| &= \langle \varphi(u_1) - \varphi(u_2), \Delta v \rangle_{L^2} \\ &\leq \|v\|_V C \|(1 + |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1})|u_1 - u_2|\|_{L^2} \\ &\leq \|v\|_V C (1 + \|u_1\|_{L^\infty}^{p-1} + \|u_2\|_{L^\infty}^{p-1}) \|u_1 - u_2\|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\leq \|v\|_V \|u_1 - u_2\|_V C(1 + \|u_1\|_V^{p-1} + \|u_2\|_V^{p-1}). \quad (4.5)$$

于是, 由一致连续性, A_2 可延拓为 V 到 V^* 的连续映射, 取 $Y = V$, 可知 (B1) 成立.

下面只需验证 (B2)、(B3) 和 (B4'). 对任意的 $u, v \in V_0$, 有

$$-_{V^*} \langle \Delta^2 u - \Delta^2 v, u - v \rangle_V = -\|u - v\|_V^2.$$

另外, 根据 Young 不等式有

$$\begin{aligned} _{V^*} \langle \Delta \varphi(u) - \Delta \varphi(v), u - v \rangle_V &\leq \|u - v\|_V \|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_V^2 + C(1 + \|u\|_{L^\infty}^{2p-2} + \|v\|_{L^\infty}^{2p-2}) \|u - v\|_H^2, \quad u, v \in V_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

故当 $\eta(v) = \rho(v) = C\|v\|_{L^\infty}^{2p-2}$ 时, (B4') 成立.

同理, 再利用 φ' 的下界条件可知,

$$_{V^*} \langle \Delta \varphi(v), v \rangle_V = - \int_{\Lambda} \varphi'(v) |\nabla v|^2 d\xi \leq \frac{1}{2} \|v\|_V^2 + C\|v\|_H^2, \quad \forall v \in V_0.$$

因为 $Y = V$, 可定义函数 $\mathcal{N}_1$ 如下:

$$\mathcal{N}_1(u) := \frac{1}{2} \|v\|_V^2, \quad u \in V,$$

易知, $\mathcal{N}_1$ 是 Y 上的下半连续函数, 并且集合 $\{u \in Y, \mathcal{N}_1(u) \leq 1\}$ 在 Y 内是相对紧的, $\mathcal{N}_1 \in \mathfrak{U}^2$, (B2) 成立.

再利用不等式 (4.2), 当 $j = 0, q = 2p, m = 2$ 时 $a := \frac{(p-1)d}{4p}$, 对任意的 $v \in V_0$, 有

$$\|\Delta \varphi(v)\|_{V^*} \leq \|\varphi(v)\|_H \leq C(1 + \|v\|_{L^{2p}}^p) \leq C(1 + \|v\|_V^{ap} \|v\|_H^{(1-a)p}) = C(1 + \|v\|_V^{ap} \|v\|_H^{1-ap} \|v\|_H^{p-1}).$$

因为 $p \leq \frac{4}{d} + 1$ (即 $ap = \frac{(p-1)d}{4} \leq 1$) 且 $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$, 即对任意的 $v \in V_0$, 有

$$\|\Delta \varphi(v)\|_{V^*} \leq C(1 + \|v\|_V)(1 + \|v\|_H^{p-1}),$$

故当 $\beta' = 2$ 和 $\beta = 2p - 2$ 时, (B3) 成立, 此时 $\alpha = 2$ 且 (2.2) 成立.

进一步, 在不等式 (4.2) 中, 当 $j = 0, q = \infty, m = 2, a = \frac{d}{4}$ 时, $\forall v \in V$, 有

$$\eta(v) + \rho(v) = C\|v\|_{L^\infty}^{2p-2} \leq C\|v\|_V^{2a(p-1)} \|v\|_H^{2(1-a(p-1))} \|v\|_H^{2(p-1)-2} \leq C\|v\|_V^2 \|v\|_H^{2p-4},$$

因为 $a(p-1) = \frac{d}{4}(p-1) \leq 1$, 且 $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$, 所以, (B4') 中的 (3.5) 成立.

从而由定理 2.2 和 3.2, 定理 4.1 得证. $\square$

4.2 随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程

Kuramoto-Sivashinsky 方程结合了 Burgers 方程和 Cahn-Hilliard 方程的特点, 是描述反应扩散系统中湍流和波传播的模型, 由 Kuramoto^[30] 和 Sivashinsky^[31] 提出. 考虑如下的方程模型:

$$\partial_t u = -\partial_x^4 u - \partial_x^2 u - u \partial_x u, \quad (4.7)$$

其中右边前两项为 Cahn-Hilliard 方程 (其中 $\varphi(x) = x$), 最后一项是 Burgers 方程中非线性项.

令 $\Lambda = (-L, L)$, $L > 0$, $p \leq 2$. 关于随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程的研究有很多, 可以参见文献 [5, 32–34]. 本文考虑如下更一般的随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程:

$$du = (-\partial_x^4 u - \partial_x^2 \varphi(u) - u \partial_x u) dt + B(t, u) dW_t,$$

以及边界条件

$$\partial_x^i u(-L, t) = \partial_x^i u(L, t), \quad i = 0, \dots, 3,$$

初值 $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Lambda$. 令

$$H = \left\{ u \in L^2(\Lambda) : \int_{\Lambda} u(x) dx = 0 \right\}, \quad V = H_{\text{per}}^{2,2} \cap H.$$

记

$$A(u) := \mathcal{L}u + \mathcal{N}(u) + \mathcal{B}(u) := -\partial_x^4 u + \partial_x^2 \varphi(u) - u \partial_x u, \quad u \in H^{4,2}(\Lambda).$$

可以得到如下抽象形式的随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程:

$$du_t^\varepsilon = A(u_t^\varepsilon) dt + \varepsilon B(t, u_t^\varepsilon) dW_t, \quad u_0^\varepsilon = x \in H, \quad (4.8)$$

其中 W_t 是 Hilbert 空间 U 上的柱 Wiener 过程, $B: [0, T] \times V \rightarrow L_2(U, H)$ 是可测映射.

定理 4.2 假设 $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, 存在常数 $C \in (0, \infty)$, $p \in [2, 5]$ 使得 φ 满足条件 (4.4). 当 B 满足条件 (B1)–(B3)、(B4') 和 (B5) 时, 方程 (4.8) 存在唯一的强解 $\{X^\varepsilon\}$ 并且满足大偏差原理.

证明 令 $Y = V$, 由定理 4.1 的证明可知, $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{N}$ 可以延拓为 V 到 V^* 的连续映射, 并且满足条件 (B1)–(B3) 和 (B4'). 接下来, 只需要验证 (4.8) 中另一项 $\mathcal{B}(u) = u \partial_x u$ 满足定理 3.2 的条件. 又因为

$$|_{V^*} \langle u \partial_x u, v \rangle_V| = \frac{1}{2} |\langle \partial_x(u^2), v \rangle_{L^2}| \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^4}^2 \|\partial_x v\|_{L^2} \leq C \|u\|_V \|u\|_H \|v\|_V,$$

所以条件 (B1) 和 (B2) 成立. 对于局部单调性, 由于 $H^{2,2} \subseteq H^{1,2} \subseteq W^{1,1} \subseteq L^\infty$, 因此有

$$2_{V^*} \langle u \partial_x u - v \partial_x v, u - v \rangle_V = \int_{\Lambda} (u - v)^2 \partial_x v dx \leq C \|\partial_x v\|_{L^\infty} \|u - v\|_H^2,$$

从而 (B4') 成立, 并且比定理 4.1 中增加一个局部有界函数 $\rho_B(v) = \|\partial_x v\|_{L^\infty}$.

注意到 $_{V^*} \langle \mathcal{B}(v), v \rangle_V = 0$, 所以易知 (B3) 成立.

从而由定理 2.2 和 3.2, 定理 4.2 得证. □

4.3 随机驯服 3 维 Navier-Stokes 方程

考虑如下形式的驯服 3 维 Navier-Stokes 方程, 该类模型由 Röckner 等 [35] 及 Röckner 和 Zhang [36, 37] 作为一类正则化 Navier-Stokes 方程引入:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= \nu \Delta u(t) - (u(t) \cdot \nabla) u(t) + \nabla p(t) - g_N(\|u(t)\|_{L^\infty}^2) u(t) + f(t), \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad u|_{\partial\Lambda} = 0, \quad u(0) = u_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 Λ 是 $\mathbb{R}^3$ 上带光滑边界的有界开区域; $u(t, \xi) = (u^1(t, \xi), u^2(t, \xi), u^3(t, \xi))$, $\xi \in \Lambda$, 表示流体的速度场; $\nu > 0$ 是流体的黏性系数; $p(t, \xi)$ 为压力; f 表示流体所受到的外力. 此外这里的驯服函数 $g_N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是光滑的, 并且对于某个 $N > 0$, 有

$$\begin{cases} g_N(r) = 0, & r \leq N, \\ g_N(r) = \frac{r - N}{\nu}, & r \geq N + 1, \\ 0 \leq g'_N(r) \leq C, & r \geq 0. \end{cases}$$

令 $C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 表示所有从 Λ 到 $\mathbb{R}^3$ 带有紧支撑散度为 0 的光滑向量场集合, 规定如下的范数:

$$\|u\|_{H^{1,2}} := \left(\int_{\Lambda} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}; \quad \|u\|_{H^{2,2}} := \left(\int_{\Lambda} |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

对于任意的 $p \geq 1$, 由 Poincaré 不等式知, 存在 $C \in (0, \infty)$, 使得 $\|u\|_{H^{1,2}} \leq C\|u\|_{H^{2,2}}$.

现在定义 L_σ^2 为 $C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{L^2}$ 完备化的空间, H 为 $C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^{1,2}}$ 完备化的空间, V 为 $C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^{2,2}}$ 完备化的空间.

考虑 Gelfand 三元组 $V \subset H \subset V^*$, 对任意的 $u \in V$, 有如下不等式成立 (参见文献 [38, 定理 2.1]):

$$\sup_{\Lambda} |u|^2 \leq C \|\Delta u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (4.10)$$

由于任意的 $v \in V$, $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$, 有

$$V^* \langle v, \varphi \rangle_V = \langle v, \varphi \rangle_H = \langle v, -\Delta \varphi \rangle_{L^2},$$

故

$$|V^* \langle v, \varphi \rangle_V| \leq \|v\|_{L_\sigma^2} \|\varphi\|_V.$$

令 P_H 是从 $L^2(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 到 L_σ^2 的正交投影, 驯服 3 维 Navier-Stokes 方程可以表示为下面的形式:

$$\partial_t u = Au + F(u) - g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)u + \tilde{f}, \quad u(0) = u_0 \in H, \quad (4.11)$$

其中

$$\begin{aligned} F(u) &:= F(u, u), \quad \tilde{f} := [0, T] \rightarrow L_\sigma^2, \quad \tilde{f} := P_H f, \\ Au &:= A(u) = \nu P_H \Delta u, \quad F(u, v) := P_H[(u \cdot \nabla)v], \quad u, v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

注意到对于 $u \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$, 有 $\Delta u \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$ 成立, 所以 $Au = \nu \Delta u$. 于是,

$$|V^* \langle Au, v \rangle_V| = |\langle Au, v \rangle_H| = |\langle Au, (-\Delta)v \rangle_{L^2}| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad u, v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda).$$

因此, A 可由连续性延拓为如下映射:

$$A : V \rightarrow V^*,$$

使得 $\|Au\|_{V^*} \leq \|u\|_V$, $u \in V$. 此外, 对于所有的 $u, v, \varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$, 有

$$\|F(u, v)\|_{V^*} \leq \|F(u, v)\|_{L_\sigma^2}.$$

存在常数 $C \in (0, \infty)$ (不依赖于 u 和 v), 使得

$$\int_{\Lambda} |F(u, v)|^2 dx \leq \int_{\Lambda} |(u, \nabla v)|^2 dx \leq C \|u\|_{L^\infty}^2 \|v\|_V^2.$$

根据 (4.10) 可知, 上式可被 $\|u\|_V \|u\|_H \|v\|_V^2$ 控制. 所以存在 $C_1, C_2, C_3 \in (0, \infty)$, 使得

$$\begin{aligned} \|F(u, v)\|_{V^*} &\leq C_1 \|u\|_{L^\infty} \|v\|_H \leq C_2 \|u\|_V^{1/2} \|u\|_H^{1/2} \|v\|_H \\ &\leq C_3 \|u\|_V \|v\|_H, \quad \forall u, v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (4.12)$$

又因为 $F: C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3) \times C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3) \rightarrow V^*$ 是双线性映射, 所以对于 $u, v \in V$, F 可以唯一地连续延拓到 $V \times V \rightarrow V^*$, 并使得 (4.12) 成立.

注 4.1 在目前的 Gelfand 三元组下, 对 $u, v, w \in V$, 有

$$V^* \langle F(u, v), v \rangle_V = V^* \langle F(u, v), (-\Delta)v \rangle_{L^2},$$

一般情况下上式不等于 0.

考虑如下随机驯服 3 维 Navier-Stokes 方程:

$$dX_t^\varepsilon = (AX_t^\varepsilon + F(t, X_t^\varepsilon) - g_N(\|X_t^\varepsilon\|_{L^\infty}^2)X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon B(t, X_t^\varepsilon)dW_t, \quad X_0^\varepsilon = x \in H, \quad (4.13)$$

其中 W 是 Hilbert 空间 U 上的柱 Wiener 过程.

定理 4.3 若 $B: [0, T] \times V \rightarrow L_2(U, H)$ 满足条件 (B1)–(B3)、(B4') 和 (B5), 则方程 (4.13) 存在唯一的强解 $\{X^\varepsilon\}$ 并且满足大偏差原理.

证明 不失一般性, 假设黏性系数为 $\nu = 1$. 取空间 $Y = V$, 由定理 3.2 可知, 只需要验证方程 (4.13) 的漂移系数满足条件 (B1)–(B3) 和 (B4') 即可.

根据 $A: V \rightarrow V^*$ 和 $F: V \times V \rightarrow V^*$ 的连续性, $A + F$ 是半连续的, g_N 是 Lipschitz 连续的, 显然半连续性条件 (B1) 成立. 下面证明对于 $u, v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Lambda; \mathbb{R}^3)$, (B2)、(B3) 和 (B4') 都成立. 由 (4.10) 和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned} V^* \langle A(u) - A(v), u - v \rangle_V &= \langle A(u - v), (-\Delta)(u - v) \rangle_{L^2} = -\|u - v\|_V^2, \\ V^* \langle F(u) - F(v), u - v \rangle_V &= V^* \langle F(u, u - v), u \rangle_V + V^* \langle F(u - v, v), u - v \rangle_V \\ &\leq C \|u - v\|_V (\|u\|_{L^\infty} \|u - v\|_H + \|u - v\|_V^{1/2} \|u - v\|_H^{1/2} \|v\|_H) \\ &\leq \frac{1}{4} \|u - v\|_V^2 + C(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_H^4) \|u - v\|_H^2, \end{aligned}$$

又因为 $g_N \geq 0$, $0 \leq g'_N \leq C$, 所以有

$$\begin{aligned} &-V^* \langle g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)u - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v, u - v \rangle_V \\ &= -\langle g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)u - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v, (-\Delta)(u - v) \rangle_{L^2} \\ &= -\langle g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)\nabla u - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)\nabla v, \nabla(u - v) \rangle_{L^2} \\ &= -g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)\nabla\|u - v\|_H^2 - \langle (g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)u - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v)\nabla v, \nabla(u - v) \rangle_{L^2} \\ &\leq |g_N(\|u\|_{L^\infty}^2) - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)| \|v\|_H \|u - v\|_H \\ &\leq C \|u - v\|_{L^\infty} (\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}) \|v\|_H \|u - v\|_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C\|u-v\|_{L^\infty}(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_H^2 + \|v\|_{L^\infty}\|v\|_H)\|u-v\|_H \\
 &\leq C\|u-v\|_V(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_H^2 + \|v\|_{L^\infty}\|v\|_H)\|u-v\|_H \\
 &\leq \frac{1}{4}\|u-v\|_V^2 + C(\|u\|_{L^\infty}^4 + \|v\|_H^4 + \|v\|_{L^\infty}^2\|v\|_H^2)\|u-v\|_H^2.
 \end{aligned}$$

故有下式成立:

$$\begin{aligned}
 &V^*\langle Au + F(u) - g_N(\|u\|_{L^\infty}^2)u - Av - F(v) + g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v, u-v \rangle_V \\
 &\leq -\frac{1}{2}\|u-v\|_V^2 + C(1 + \|u\|_{L^\infty}^4 + \|v\|_H^4 + \|v\|_{L^\infty}^4)\|u-v\|_H^2.
 \end{aligned}$$

令 $\eta(u) := C\|u\|_{L^\infty}^4$, $\rho(v) := C(\|v\|_H^4 + \|v\|_{L^\infty}^4)$, 可知 (B4') 成立. $\forall v \in C_{0,\sigma}(\Lambda; \mathbb{R}^3)$, 有

$$V^*\langle Av, v \rangle_V = \langle P_H \Delta v, (-\Delta v) \rangle_{L^2} = -\|v\|_V^2.$$

根据 (4.12), 有

$$V^*\langle F(v), v \rangle_V \leq \|F(v)\|_{V^*}\|v\|_V \leq \frac{1}{4}\|v\|_V^2 + \|v\|_{L^\infty}^2\|v\|_H^2,$$

此外, 再利用不等式 $g_N(r) \geq r - (N+1)$ 可得

$$\begin{aligned}
 -V^*\langle g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v, v \rangle_V &= -g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)\langle v, (-\Delta)v \rangle_{L^2} \\
 &= -g_N(\|v\|_{L^\infty}^2) \cdot \int_{\Lambda} |\nabla v|^2 dx \\
 &\leq -\|v\|_{L^\infty}^2\|v\|_H^2 + (N+1)\|v\|_H^2.
 \end{aligned}$$

从而综合上面不等式, 可得

$$V^*\langle Av + F(v) - g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v, v \rangle_V \leq -\frac{3}{4}\|v\|_V^2 + (N+1)\|v\|_H^2, \quad v \in V.$$

因为 $Y = V$, 定义函数 $\mathcal{N}_1$ 如下:

$$\mathcal{N}_1(u) := \frac{3}{4}\|u\|_V^2, \quad u \in V.$$

显然 $\mathcal{N}_1$ 是 Y 上的下半连续函数, 并且集合 $\{u \in Y, \mathcal{N}_1(u) \leq 1\}$ 在 Y 内是相对紧的, $\mathcal{N}_1 \in \mathfrak{U}^2$, (B2) 成立. 同时根据 (4.10), 可知

$$\|g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v\|_{V^*} \leq \|g_N(\|v\|_{L^\infty}^2)v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{L^\infty}^2\|v\|_{L^2} \leq C\|v\|_V\|v\|_H^2, \quad v \in V,$$

于是, 结合 (4.12), 当 $\beta' = 2$ 和 $\beta = 4$ 时 (B3) 成立, 此时 $\alpha = 2$ 且 (2.2) 成立. 再由 (4.10) 可以得到

$$\|u\|_{L^\infty}^4 \leq C\|u\|_H^2\|u\|_V^2,$$

因此 ρ 和 η 满足 (3.5).

从而由定理 2.2 和 3.2, 定理 4.3 得证. $\square$

注 4.2 Röckner 等 [35] 在不同的假设条件下也证明了随机驯服 3 维 Navier-Stokes 方程的大偏差原理, 这里应用我们的主要结果可以直接得到该类模型的大偏差结果. 由于采用了不同的证明技巧, 对于噪声系数 B 不需要假设文献 [35] 中的技术性条件 (H2), 这里的时间正则性条件 (B5) 比较容易验证, 例如, 对于时间齐次的系数是自然成立的.

致谢 作者对编委和两位审稿人提出的很多宝贵意见和建议表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Pardoux E. Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. PhD Thesis. Paris: Université Paris XI, 1975
- 2 Krylov N V, Rozovskii B L. Stochastic evolution equations. *Current Problems Math*, 1979, 14: 71–146
- 3 Liu W, Röckner M. SPDE in Hilbert space with locally monotone coefficients. *J Funct Anal*, 2010, 259: 2902–2922
- 4 Liu W, Röckner M. *Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction*. Universitext: Springer, 2015
- 5 Gess B, Liu W, Schenke A. Random attractors for locally monotone stochastic partial differential equations. *J Differential Equations*, 2020, 269: 3414–3455
- 6 Liu W, Röckner M. Local and global well-posedness of SPDE with generalized coercivity conditions. *J Differential Equations*, 2013, 254: 725–755
- 7 Goldys B, Röckner M, Zhang X. Martingale solutions and Markov selections for stochastic partial differential equations. *Stochastic Process Appl*, 2009, 119: 1725–1764
- 8 Röckner M, Zhu R, Zhu X. Existence and uniqueness of solutions to stochastic functional differential equations in infinite dimensions. *Nonlinear Anal*, 2015, 125: 358–397
- 9 Chow P L. Large deviation problem for some parabolic Itô equations. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 97–120
- 10 Chueshov I, Millet A. Stochastic 2D hydrodynamical type systems: Well posedness and large deviations. *Appl Math Optim*, 2010, 61: 379–420
- 11 Li S, Liu W, Xie Y. Large deviations for stochastic 3D Leray- α model with fractional dissipation. *Commun Pure Appl Anal*, 2019, 18: 2491–2510
- 12 Liu W. Large deviations for stochastic evolution equations with small multiplicative noise. *Appl Math Optim*, 2010, 61: 27–56
- 13 Liu W, Tao C, Zhu J. Large deviation principle for a class of SPDE with locally monotone coefficients. *Sci China Math*, 2020, 63: 1181–1202
- 14 Ren J, Zhang X. Freidlin-Wentzell's large deviations for stochastic evolution equations. *J Funct Anal*, 2008, 254: 3148–3172
- 15 Stroock D W. *An Introduction to the Theory of Large Deviations*. New York: Springer, 1984
- 16 Pukhalskii A A. On the theory of large deviations. *Theory Probab Appl*, 1993, 38: 490–497
- 17 Budhiraja A, Dupuis P, Maroulas V. Large deviations for infinite dimensional stochastic dynamical systems. *Ann Probab*, 2008, 36: 1390–1420
- 18 Zhai J, Zhang T. Large deviations for 2-D stochastic Navier-Stokes equations driven by multiplicative Lévy noises. *Bernoulli*, 2015, 21: 2351–2392
- 19 Xiong J, Zhai J. Large deviations for locally monotone stochastic partial differential equations driven by Lévy noise. *Bernoulli*, 2018, 24: 2842–2874
- 20 Ondřejat M. Brownian representations of cylindrical local martingales, martingale problem and strong Markov property of weak solutions of SPDEs in Banach spaces. *Czechoslovak Math J*, 2005, 55: 1003–1039
- 21 Röckner M, Schmuland B, Zhang X. Yamada-Watanabe theorem for stochastic evolution equations in infinite dimensions. *Condens Matter Phys*, 2008, 11: 247–259
- 22 Dadashi-Arani H, Zangeneh B Z. Large deviation principle for semilinear stochastic evolution equations with monotone nonlinearity and multiplicative noise. *Differential Integral Equations*, 2010, 23: 747–772
- 23 Dupuis P, Ellis R. *A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations*. New York: Wiley, 1997
- 24 Budhiraja A, Dupuis P. A variational representation for positive functionals of infinite dimensional Brownian motion. *Probab Math Statist*, 2000, 20: 39–61
- 25 Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B, Nonlinear Monotone Operators*. New York: Springer-Verlag, 1990
- 26 Novick-Cohen A. The Cahn-Hilliard equation: Mathematical and modeling perspectives. *Adv Math Sci Appl*, 1998, 8: 968–985
- 27 Da Prato G, Debussche A. Stochastic Cahn-Hilliard equation. *Nonlinear Anal*, 1996, 26: 241–263
- 28 Elezović N, Mikić A. On the stochastic Cahn-Hilliard equation. *Nonlinear Anal*, 1991, 16: 1169–1200
- 29 Taira K. *Analytic Semigroups and Semilinear Initial-Boundary Value Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 30 Kuramoto Y. Diffusion-induced chaos in reaction systems. *Progr Theoret Phys Suppl*, 1978, 64: 346–367
- 31 Sivashinsky G I. On flame propagation under conditions of stoichiometry. *SIAM J Appl Math*, 1980, 39: 67–82
- 32 Duan J, Ervin V J. On the stochastic Kuramoto-Sivashinsky equation. *Nonlinear Anal*, 2001, 44: 205–216

- 33 Bo L, Jiang Y. Large deviation for the nonlocal Kuramoto-Sivashinsky SPDE. *Nonlinear Anal*, 2013, 82: 100–114
- 34 Yang D. Dynamics for the stochastic nonlocal Kuramoto-Sivashinsky equation. *J Math Anal Appl*, 2007, 330: 550–570
- 35 Röckner M, Zhang T, Zhang X. Large deviations for stochastic tamed 3D Navier-Stokes equations. *Appl Math Optim*, 2010, 61: 267–285
- 36 Röckner M, Zhang X. Stochastic tamed 3D Navier-Stokes equations: Existence, uniqueness and ergodicity. *Probab Theory Related Fields*, 2009, 145: 211–267
- 37 Röckner M, Zhang X. Tamed 3D Navier-Stokes equation: Existence, uniqueness and regularity. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2009, 12: 525–549
- 38 Heywood J. On a conjecture concerning the Stokes problem in nonsmooth domains. In: *Mathematical Fluid Mechanics. Advances in Mathematical Fluid Mechanics*. Basel: Birkhäuser, 2001, 195–205

Well-posedness and large deviation principle for a class of SPDEs

Wei Liu, Xiaomin Huang, Shihu Li & Lili Gu

Abstract In this paper, we study a class of stochastic partial differential equations with general locally monotone coefficients under the variational framework. By proving the existence of martingale solutions and pathwise uniqueness, we first get the existence and uniqueness of strong solutions. Then we prove the large deviation principle by using the stochastic control and weak convergence approach. The main results are applicable to various concrete SPDE models, such as stochastic Cahn-Hilliard equation, stochastic Kuramoto-Sivashinsky equation and stochastic 3D tamed Navier-Stokes equation.

Keywords stochastic partial differential equations, well-posedness, large deviation principle, local monotonicity, weak convergence approach

MSC(2020) 60H15, 60F10

doi: 10.1360/SSM-2019-0319