中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 10 期: 1663 ~ 1670
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

带奇点的常 Gauss 曲率曲面

献给沈一兵教授 85 寿辰

汪徐家[1], 朱芮萱[2*]

1. Mathematical Sciences Institute, The Australian National University, Canberra, ACT 2601, Australia;
2. 清华大学数学科学系, 北京 100084
E-mail: Xu-Jia.Wang@anu.edu.au, zhurx19@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2023-06-09; 接受日期: 2023-08-14; 网络出版日期: 2024-01-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12141103) 资助项目

摘要 本文研究带奇点的常 Gauss 曲率闭凸超曲面, 并证明如下结论: (1) 这样的曲面不可能只含有一个奇点; (2) 当它具有两个奇点时, 该超曲面一定是旋转对称的; (3) 对任意凸多面体, 存在常 Gauss 曲率的闭凸超曲面, 使得当它的 Gauss 曲率充分小时, 该多面体的顶点恰好是这个超曲面的所有奇点.

关键词 常 Gauss 曲率 闭凸超曲面 奇点

MSC (2020) 主题分类 35J15, 35J96, 30F20

1 引言

Minkowski 问题是一个预定 Gauss 曲率问题. 它是凸几何中的一个经典问题: 给定一个定义在单位球面上的连续的正函数 f, 是否存在一个闭凸超曲面使其 Gauss 曲率作为法向量的函数恰好为 f. Minkowski [13] 证明了当 f 满足一定的积分条件时, 总是存在这样的超曲面, 使其广义 Gauss 曲率为 f. 他首先证明了当 f 对应一个离散测度时, 存在一个多面体使其顶点为对应的离散点; 然后利用逼近方法得到原问题的解. 之后, 多位学者研究了 Minkowski 问题, 其光滑解的存在唯一性最后在文献 [3,16] 中得到解决.

近年来, 预定 Gauss 曲率问题受到大量研究. 文献 [14,20,22] 研究了 Euclid 空间中 Gauss 曲率作为位置函数等于给定函数 f 的闭凸曲面的存在性. 文献 [5,11,12] 研究了一类推广的 Minkowski 问题. 另外, Spruck [18] 在 1994 年国际数学家大会 (ICM) 报告中提出带边的局部凸常 Gauss 曲率曲面的存在性. Spruck 的问题对应于平均曲率 Plateau 问题, 并在文献 [9,19] 中得到解决.

本文研究具有有限个奇点的常 Gauss 曲率闭凸超曲面. 用 K_0- 超曲面表示具有常 Gauss 曲率 K_0 的闭凸超曲面, 本文证明以下定理:

定理 1.1 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中, 不存在只有一个奇点的常 Gauss 曲率闭凸超曲面.

英文引用格式: Wang X-J, Zhu R X. Convex hypersurfaces of constant Gaussian curvature with singularities (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1663–1670, doi: 10.1360/SSM-2023-0176

定理 1.2 设 M 是一个具有两个奇点 p_1 和 p_2 的 K_0- 超曲面, 其中 $K_0>0$, 则 M 以过 p_1 和 p_2 的直线为轴旋转对称, 且这样的 M 唯一.

定理 1.3 设 Q 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的凸多面体, 顶点为 $p_1,\dots,p_m$ $(m\geqslant 3)$. 对任意足够小的 K_0, 存在一个具有奇点 $p_1,\dots,p_m$ 的 K_0- 超曲面 M, 并且 M 在这些奇点外是光滑且一致凸的.

定理 1.3 中的凸体 Q 可以是退化的, 即 Q 的维数可以小于 $n+1$. 另外, 如果 K_0 不是充分小的, 则一般不存在对应的 K_0- 超曲面使得所有顶点 $p_1,\dots,p_m$ 都位于 M 上. 例如, 当 $n=1$ 且 $m=3$ 时, 设连接 p_1 和 p_2 的线段长度为 ℓ, 若 $K_0>2/\ell$, 则不存在曲率为 K_0 且过 p_1 和 p_2 的曲线.

定理 1.3 的结果可以推广到一般的预定 Gauss 曲率问题. 有如下结论:

定理 1.4 设 Q 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的凸多面体, 顶点为 $p_1,\dots,p_m$ $(m\geqslant 3)$. 对于球面上的任意正函数 f, 当 $\sup_{\mathbb{S}^n} f$ 充分小时, 一定存在具有奇点 $p_1,\dots,p_m$ 的闭凸曲面 M, 使得 $M\backslash\{p_1,\dots,p_m\}$ 上任意一点的 Gauss 曲率作为单位外法向量的函数等于 f.

设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭凸超曲面. 不妨设原点包含在 M 的内部, 并且 M 可以由径向函数表示为 $M=\{x\rho(x):x\in\mathbb{S}^n\}$. 则在球面局部单位正交标架下, M 的 Gauss 曲率由

$$K=\frac{\det(-\rho\nabla^2\rho+2\nabla\rho\otimes\nabla\rho+\rho^2 I)}{\rho^{2n-2}(\rho^2+|\nabla\rho|^2)^{(n+1)/2}} \tag{1.1}$$

给出 (参见文献 [14,15]), 这里 I 是球面上的度量, ∇ 是球面上的协变导数.

M 的支撑函数定义在 $\mathbb{S}^n$ 上, 由

$$H(x)=\sup\{x\cdot p:p\in M\} \tag{1.2}$$

给定. 假设该定义中的极大值在点 p 处取得. 如果 M 在 p 处 C^1 光滑, 则 $x=G(p)$. 这里 G 是 M 的 Gauss 映射, 即 x 是 M 在 p 点的单位外法向量. 如果 M 在 p 处不是 C^1 的, 则称 p 是 M 的奇点. 此时, 存在一个包含多于一个点的闭凸集 $G_p\subset\mathbb{S}^n$, 使得对于任意 $x\in G_p$, (1.2) 中的极大值都在 p 处取得. 定义 $G(p)=G_p$ 并将 G 称为广义 Gauss 映射. 由此构造的 G 在 M 的奇点处是一个多值映射.

将 H 的定义域延拓到 $\mathbb{R}^{n+1}$, 使得

$$H(tx)=tH(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{S}^n,\quad t>0,$$

即 H 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 1 次齐次函数.

设 $p_1,\dots,p_m$ $(m\geqslant 1)$ 是 M 的奇点. 假设 $M\backslash\{p_1,\dots,p_m\}$ 是 C^2 光滑且局部一致凸的. 则对于 $M\backslash\{p_1,\dots,p_m\}$ 中的任意点 p, M 在 p 处的 Gauss 曲率为

$$K(p)=[\det(\nabla^2H+HI)(x)]^{-1},\quad x=G(p).$$

记 $U=\bigcup_{i=1}^m G(p_i)$. 超曲面 $M\backslash\{p_1,\dots,p_m\}$ 可以由支撑函数 H 来给定 (参见文献 [3,4,16]), 即

$$M\backslash\{p_1,\dots,p_m\}=\{DH(x):x\in\mathbb{S}^n\backslash U\}.$$

还有其他表示凸超曲面的方式. 通过适当选择坐标, 将 M 在局部上看作是一个凸函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 的图像, 则 M 的 Gauss 曲率给定为 $\det D^2u/(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}$. 反之, 如果考虑预定 Gauss 曲率方程的 Dirichlet 问题,

$$\begin{cases}\dfrac{\det D^2u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}}=K, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u=g, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases} \tag{1.3}$$

则在适当条件下, Perron 方法 [6] 保证了方程解的存在性. 根据文献 [2,6,16] 中关于 Monge-Ampère 方程的正则性结果, 如果 g 是连续的且 u 是严格凸的, 则 u 在 Ω 中是光滑的.

考虑右端项为常值 K_0 的方程 (1.3). 如果在 $\partial\Omega$ 上 $\tilde{u}=g$, 并且对于任意 Borel 集合 $\mathcal{B}\subset\Omega$, 有

$$\mu_{\tilde{u}}(\mathcal{B}) \geqslant K_0 \int_{\mathcal{B}} (1+|D\tilde{u}|^2)^{(n+2)/2} dx, \tag{1.4}$$

这里, $\mu_{\tilde{u}}$ 是由 $\mu_{\tilde{u}}(\mathcal{B}) = |\partial\tilde{u}(\mathcal{B})|$ 定义的 $\tilde{u}$ 的 Monge-Ampère 测度, $\partial\tilde{u}$ 是 $\tilde{u}$ 的次微分, $D\tilde{u}$ 对于凸函数 $\tilde{u}$ 是几乎处处良定义的, 则称凸函数 $\tilde{u}$ 是该方程的次解. 如果 (1.4) 中的等号对于任意 Borel 集 $\mathcal{B}$ 都成立, 则称凸函数 $\tilde{u}$ 是该方程的广义解.

本文余下内容的安排如下. 第 2 节使用移动平面法证明定理 1.1 和 1.2. 这种方法最初由 Alexandrov 发现, 用于研究常平均曲率闭超曲面是否为球面的问题 [1,10]. 后来该方法被应用于许多不同的问题, 如椭圆方程解的旋转对称性 [7,17]. 第 3 节用 Perron 方法证明定理 1.3. 对于局部凸的超曲面, 文献 [9,19] 也使用了 Perron 方法.

2 具有两个以下奇点的闭凸超曲面

2.1 单个奇点情形

考虑一个只具有一个奇点的闭凸超曲面 M. 通过坐标平移, 假设奇点是原点, 且 $U := G(O)$ 是上半球面内的球面凸集.

M 的支撑函数 H 满足如下 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 H + HI) = f(x), & \text{在 } \mathbb{S}^n \backslash U \text{ 内}, \\ H = 0, & \text{在 } \partial U \text{ 上}, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中, f 是 $\mathbb{S}^n$ 上的正函数且为 M 的 Gauss 曲率, 在 $\mathbb{S}^n\backslash U$ 上有 $H>0$.

设 $h(x_1,\dots,x_n) = H(x_1,\dots,x_n,-1)$, 则方程 (2.1) 改写为 (参见文献 [21])

$$\det D^2 h = \varphi(x) := (1+|x|^2)^{-n/2-1} f\left(\frac{(x,-1)}{\sqrt{1+|x|^2}}\right), \quad \text{在 } \mathbb{R}^n \text{ 中}. \tag{2.2}$$

类似地, 对于上半球面对应的 M, 令 $h(x) = H(x,1)$, 则有

$$\det D^2 h = \varphi(x) := (1+|x|^2)^{-n/2-1} f\left(\frac{(x,1)}{\sqrt{1+|x|^2}}\right), \quad \text{在 } \mathbb{R}^n\backslash D \text{ 中}, \tag{2.3}$$

其中 D 是在上述变换下对应于 U 的凸区域.

引理 2.1 假设 $f=f(x_{n+1})$, 即 f 不依赖于 $(x_1,\dots,x_n)$, 且 $f\in C^1$, 则 U 是以 $(0,\dots,0,1)$ 点为中心的测地球, 并且 M 围绕 x_{n+1} 轴旋转对称.

证明 设 P 是包含 x_{n+1} 轴的平面, Γ 是由 P 截取单位球面得到的大圆. 设 d 是 P 的法向量, n 是 M 在任意光滑点 p 处的内法向量. 将 M 分为以下 3 个部分: $A=\{p\in M : n\cdot d<0\}$, $B=\{p\in M : n\cdot d>0\}$ 和 $C=\{p\in M : n\cdot d=0\}$. 如果对于任意 $n\in U$, 有 $n\cdot d<0$ $(n\cdot d>0)$, 则定义 $O\in A$ $(O\in B)$, 否则 $O\in C$. 从而有 $\bar{A}=A\cup C$, $\bar{B}=B\cup C$.

将平面 P 从无穷远处沿着 d 方向移动. 设 M' 和 B' 分别是 M 和 B 关于 P 的镜像对称. 将 P 继续沿着 d 方向平移, 直到 $\bar{B}'$ 第一次接触 $\bar{A}$. 用 z 表示 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}'$ 的一个共同点, 设 O 关于平面 P 的对称点为 O'. 此时会出现以下 3 种情形之一.

情形 1 $z \in A \cap B'$ 且 $z \notin \{O, O'\}$. 此时 B' 和 A 在 z 点附近的曲面相切, 且在该邻域内 B' 位于 A 的凹的一侧.

情形 2 $z \in C$ 且 $z \notin \{O, O'\}$. 在 P 移动的过程中, B' 一直与 A 不相交, 直到 P 移动到 C 上的一点, 此时由集合 C 的定义知, M 和 M' 在 z 点的切平面重合, 且它们在 z 点的法向量在平面 P 内.

情形 3 $z \in \{O, O'\}$. 在上述两种情形中, 考虑 z 所在位置和 M 或 M' 的奇点重合的情形.

对于情形 1, 在 z 点附近建立一个新的坐标系 y, 使得 $z = 0$, $-d$ 与 y_{n+1} 轴正方向重合, y_1 轴与 x_{n+1} 轴方向相同. 则存在一个 $r > 0$, 使得在 $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ 内, A 与 B' 可以分别表示为凸函数 u 和 v 的图像. 由 f 的性质和平面 P 的取法知, A 和 B' 的 Gauss 曲率作为单位外法向量的函数等同, 即

$$\frac{\det D^2 u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = f\left(\frac{u_{y_1}}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right), \quad \frac{\det D^2 v}{(1+|Dv|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = f\left(\frac{v_{y_1}}{\sqrt{1+|Dv|^2}}\right).$$

令 $w = u - v$, $u_\theta = \theta u + (1-\theta) v$, 则 w 是一致椭圆方程

$$a^{ij} w_{ij} + b^i w_i = 0 \tag{2.4}$$

的解, 其中, $a^{ij}(y) = \int_0^1 \det(D^2 u_\theta) u_\theta^{ij}\, d\theta$, $b^i(y) = \int_0^1 (1+|Du_\theta|^2)^{n/2} (p(y)\partial_i u_\theta + q(y)\delta_1^i)\, d\theta$, 这里 u_θ^{ij} 表示 $D^2 u_\theta$ 的逆矩阵在 (i,j) 位置上的元素, $\delta_1^i = 0$ (若 $i \neq 1$) 且 $\delta_1^1 = 1$,

$$\begin{aligned} p(y) &= (n+2) f\left(\frac{\partial_{y_1} u_\theta}{\sqrt{1+|Du_\theta|^2}}\right) - (1+|Du_\theta|^2)^{-1/2} f'\left(\frac{\partial_{y_1} u_\theta}{\sqrt{1+|Du_\theta|^2}}\right) \partial_{y_1} u_\theta, \\ q(y) &= (1+|Du_\theta|^2)^{1/2} f'\left(\frac{\partial_{y_1} u_\theta}{\sqrt{1+|Du_\theta|^2}}\right). \end{aligned}$$

注意到 $w(0) = 0$ 且在 $B_r(0)$ 内 $w \leqslant 0$, 由椭圆方程的强极大值原理 [8] 知, 在 $B_r(0)$ 上 $w \equiv 0$, 即 $u \equiv v$. 因此 A 和 B' 在 z 点附近重合. 由于 M 在 $\mathbb{S}^n \backslash U$ 上的解析性使得 $A = B'$, 因此 M 关于 P 对称. 这里所描述的对称性并不强调 P 所处的位置.

对于情形 2, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}'$ 在 z 处的内法向量 n 重合, 且都在平面 P 内. 由移动平面法, 考虑在 z 点附近的平面 P 的 d 方向一侧, 可知 B' 在 A 的凹的一侧. 在 z 点附近建立新的坐标系 y, 使得 $z = 0$, n 为 y_{n+1} 轴正方向, d 为 y_1 轴正方向. 取充分小的 $r > 0$, 使得 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}'$ 在 $B_r(0)$ 内可以表示为凸函数 u 和 v 的图像. 与情形 1 类似, 仍然令 $w = u - v$, 则 w 在 $B_r(0)$ 上满足椭圆方程 $a^{ij} w_{ij} + b^i w_i = 0$. 考虑区域 $W = B_{\frac{r}{2}}(\frac{r}{2} e_1)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, 则 $0 \in \partial W$, 在 W 内 $w < 0$, 在 0 点处 $w = 0$. 由 Hopf 引理 [8] 可知, $\partial_1 w(0) < 0$, 即 $\partial_1 u(0) < \partial_1 v(0)$. 但由于 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}'$ 在 0 点处相切, $Du(0) = Dv(0) = 0$. 这与前面证明的 $\partial_1 u(0) < \partial_1 v(0)$ 矛盾.

在情形 3 下, 当 $\Gamma \cap U \neq \emptyset$ 时, $C \ni O$ 是 M 上的一个闭曲线, 则 $z = O = O'$. 因此, B' 本身位于 A 的凹的一侧. 如果沿着与 d 相反的方向移动 P, 则必然会在 P 经过 O 之前发生情形 1 或 2. 因此, 仍然可以得到 M 关于 P 对称. 当 $\Gamma \cap U = \emptyset$ 时, 要么 $O \in A$, 要么 $O \in B$. 由于 O 是奇点, 情形 3 只能发生在 $O \in B$ 且 $z = O' \in A$ 的情形下. 设 $\tilde{z} \in P \cap M$. 此时一定有 $P \cap A = \emptyset$, 否则在 P 移动到这个位置之前, 一定存在某个时刻使得 $P \cap C \neq \emptyset$, 会出现情形 2. 因此, 如果从远处沿着 $-d$ 的方向移动平面 P, 一定会在 P 经过 $\tilde{z}$ 之前发生情形 1 或 2. 由之前的证明可知, M 关于平面 P 对称.

由此证明了 P 是 M 的一个对称平面. 由 P 的任意性知, M 在与 x_{n+1} 轴垂直的任意方向上都是镜面对称的. 由于每两个镜面反射的复合是一个旋转映射, 因此 M 相对于 x_{n+1} 轴具有旋转对称性. 那么, U 是 $\mathbb{S}^n$ 上的一个测地球. □

定理 1.1 的证明　将 M 绕着 x_i 轴旋转一个小角度, 其中 $i=1,2,\dots,n$. 由于 M 具有常 Gauss 曲率, 所以上述引理仍然使得 M 围绕 x_{n+1} 轴是旋转对称的. 这表明 M 是一个 n- 球面, 与 O 是奇点相矛盾. 由此证明了定理 1.1 的结论. □

2.2　两个奇点情形

设 M 是具有两个奇点 p_1 和 p_2 的闭凸超曲面. 记 $U_1=G(p_1)$, $U_2=G(p_2)$ 和 $U=U_1\cup U_2$. 通过选择合适的坐标, 可以假设 $p_1=(0,\dots,0,1)$ 和 $p_2=(0,\dots,0,-1)$. 那么 U_1 包含在上半球面中, U_2 包含在下半球面中. 假设 M 的 Gauss 曲率仅依赖于 x_{n+1}. 利用与之前类似的方法, 可以证明 U_1 是以 p_1 为中心的测地球, U_2 是以 p_2 为中心的测地球, 且 M 围绕 x_{n+1} 轴旋转对称. 由此可以证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明　设 P 是与 x_{n+1} 轴平行的平面, 其法向量为 d. 如前定义 M 的子集 A、B 和 C. 将 P 从无穷远处沿着 d 方向移动, 直到 $\bar{B}'$ 第一次与 $\bar{A}$ 相交, 并设它们的交点为 z. 当 z 不等于任何一个奇点或奇点关于 P 的对称点时, M 的对称性的证明与上述情形 1 和 2 类似. 对于情形 3, 只需要将 P 沿着 $-d$ 的方向移动, 就将问题转化为前两种情形. 因此, M 沿着 x_{n+1} 轴旋转对称. 利用移动平面法, 类似于之前的证明可知, M 关于平面 $\{x_{n+1}=0\}$ 上下对称.

下面证明 M 的唯一性. 沿用 M 所嵌入的 $\mathbb{R}^{n+1}$ 空间中的坐标. 由于 M 的对称性, 所以仅考虑单位外法向位于下半球面的 M 的部分, 将其表示为 $x_{n+1}=u(x)$ 的图像. M 具有旋转对称性, 所以可以设 $u=v(r)$, 其中 $r=|x|$. 如果 M 具有常 Gauss 曲率 K_0, 则方程 (1.3) 变为 $K_0=\frac{v''|v'|^{n-1}}{|x|^{n-1}(1+|v'|^2)^{(n+2)/2}}$. 为了求解这个方程, 设 $w=1+(1/v')^2$, 则 $w'=-2K_0r^{n-1}w^{(n+2)/2}$. 因此, $w=(K_0r^n+C)^{-2/n}$, 其中 C 是常数. 因此,

$$v'=((K_0r^n+C)^{-2/n}-1)^{-1/2}=:\zeta(r),\tag{2.5}$$

并且边界条件为 $v(0)=-1$. (2.5) 自然要求 $C<1$. 注意到当 $r\to r_{\max}=(\frac{1-C}{K_0})^{1/n}$ 时, $v'\to\infty$. r 定义在 $[0,r_{\max})$ 上, 这要求 $C>0$. 对 (2.5) 积分, 得到 v 的表达式:

$$v(r)=\int_0^r\zeta(s)\,ds-1.\tag{2.6}$$

(2.5) 中常数 C 的值由 $v(r_{\max})=0$ 来确定, 与 K_0 有关. 当 K_0 充分小时, 这样的 C 存在且唯一. 对于一般的 K_0, 不一定存在满足要求的常数 C. 因此对于固定的 K_0, 以 p_1 和 p_2 为奇点的 K_0- 超曲面 M 至多只能有一个.

设 $\gamma=M\cap\{x:x_{n+1}=0\}$. 对于 M 上除去 γ 及点 p_1 和 p_2 的任意区域, 由 v 的光滑性得到 M 的光滑性. 考虑任意一点 $p\in\gamma$, 取 p 在 M 上的充分小邻域 W. 根据 M 的对称性, 不妨设 p 在 x_1 负半轴上, 且 W 表示为函数 $x_1=G(x_2,\dots,x_{n+1})$ 在区域 V 上的图像. 这里 $G=-\sqrt{(v^{-1}(x_{n+1}))^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$, 其中 v^{-1} 是 v 的逆函数. 当 $r\to r_{\max}$ 时 $v'\to\infty$, 所以有 $\partial_{x_{n+1}}G\to0$, $x_{n+1}\to0$. 根据 M 的对称性, DG 在 V 上是连续的, 所以 $\mu_G(V\cap\gamma)=0$. 在 $V\cap\{x_{n+1}>0\}$ 和 $V\cap\{x_{n+1}<0\}$ 这两部分, 由 M 的对称性和 v 的光滑性知, G 分别是常 Gauss 曲率方程 (1.3) 在这两部分区域上的经典解. 因此, G 是 V 上常 Gauss 曲率方程 Dirichlet 问题的广义解. 由方程的正则性理论 [6] 知, G 是局部光滑的. 所以 M 在 γ 的邻域上是光滑的. 由于 $C<1$, $v'(0)\neq0$, 所以 M 在 p_1 和 p_2 处不是 C^1 光滑的. 故 (2.6) 给出的 M 是唯一的以 p_1 和 p_2 为奇点的 K_0- 超曲面. □

3 具有多重奇点的闭凸超曲面

设 Q 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的多面体, 顶点为 $p_1,\ldots,p_m$ ($m\geqslant 3$). 通过坐标平移, 不妨设原点是 Q 的内点. 如果存在满足 $\sum_{i=1}^m\alpha_i=1$ 的正常数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, 使得 $p=\sum_{i=1}^m\alpha_i p_i$, 则称点 p 是 Q 的内点.

定义 3.1 如果在 $\mathbb{S}^n$ 上 $\alpha\leqslant\beta$, 则对于由径向函数 α 和 β 给出的两个闭凸超曲面 S 和 N, 记 $S\prec N$.

定义 3.2 如果对于 M 上的任意点 x, 存在一个顶点为 x、半径为 r、张角为 α 的锥体, 除顶点外完全包含在 M 内部, 则称 M 满足半径为 r、张角为 α 的一致锥条件.

定理 1.3 的证明 首先证明存在一个闭的、光滑的、一致凸的超曲面 M_0, 使得 $p_1,\ldots,p_m\in M_0$. 对于任意 p_i, 存在一个足够大的半径为 r_i 的开球 B_i, 使得 $p_i\in\partial B_i$, 且对于所有的 $j\neq i$, 有 $p_j\in B_i$. 令 $B=\bigcap_{i=1}^m B_i$, 则 $p_i\in\partial B$ ($i=1,\ldots,m$). 在任意两个球面交线附近, 对 ∂B 磨光, 得到的曲面仍然是一致凸的. 由此构造了所需要的超曲面 M_0, 且 $K(M_0)\geqslant\min\{1/r_i^n, i=1,\ldots,m\}=:\epsilon_0$. 固定一个任意的正常数 $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$.

假设 M_0 由径向函数 ρ_0 给出. 令 $z_i=\frac{p_i}{|p_i|}$ ($i=1,\ldots,m$). 由定理 1.2 知, 存在一个具有奇点 p_1 和 p_2 的 ϵ_1- 超曲面 N, 且 $\epsilon_1<\epsilon$ 充分小, 使得 $N\prec M_0$. 故 M_0 满足一致锥条件, 且存在半径为 δ 的球 $B_\delta\prec N\prec M_0$.

设 $E_0\subset\mathbb{S}^n$ 是一个测地凸的开集, 满足 $\operatorname{diam}(E_0)\leqslant\frac{1}{10}\delta$, 且对于任意 $i=1,\ldots,m$, 都有 $z_i\notin E_0$. 由于 M_0 满足一致锥条件, 所以对于充分小的 δ, 总可以选择合适的坐标系, 使得 $\rho_0(E_0)$ 可以表示为有界区域 $D_0\subset\mathbb{R}^n$ 上的图像: $x_{n+1}=u_0(x_1,\ldots,x_n)$.

根据方程 (1.3) 的一致梯度估计 (参见文献 [16]), 当存在某个 z_i 处于 E_0 的边界上时, u_0 和它满足的方程 (1.3) 依然是良定义的. 若 $u_1=L(u_0,D_0)$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\det D^2u_1}{(1+|Du_1|^2)^{\frac{n+2}{2}}}=\epsilon, & \text{在 } D_0 \text{ 内},\\ u_1=u_0, & \text{在 } \partial D_0 \text{ 上},\end{cases}\tag{3.1}$$

则定义它为 u_0 的 Perron 提升. 方程 (3.1) 存在一个次解 u_0, 因此由经典的 Perron 方法可知, 存在一个凸函数解 u_1 (参见文献 [19]). 由比较原理知, $u_1\geqslant u_0$ 在 D_0 中成立. 设 F_0 和 F_1 分别为 u_0 和 u_1 的图像. 将 F_0 和 F_1 的曲面面积分别表示为 A_{u_1} 和 A_{u_0}, 由文献 [19, 第 5.1 小节] 中的结论, 可以得到 $A_{u_1}\leqslant A_{u_0}$. 令 $M_1=F_1\cup(M_0\backslash F_0)$, 则 $M_1\prec M_0$. 此外, 在弱意义下, 有 $K(M_1)\geqslant\epsilon$.

记 $\Delta A(E_0)=A_{u_0}-A_{u_1}$ 为 E_0 上的原函数与其 Perron 提升所对应的曲面面积的差. 选择足够 "高效" 的 E_0, 以使得

$$\Delta A(E_0)\geqslant\frac{1}{2}\sup\left\{\Delta A(E):E\subset\mathbb{S}^n,\operatorname{diam}(E)\leqslant\frac{1}{10}\delta \text{ 且 } z_i\notin E,\forall i=1,\ldots,m\right\}.\tag{3.2}$$

用 M_{k-1} 替换 M_0 并重复上述过程以得到 M_k ($k\geqslant 2$). 由此得到了一个闭凸超曲面序列 $\{M_k\}_{k\geqslant 0}$, 其中, $M_{k+1}\prec M_k$, 且点 $p_1,\ldots,p_m$ 在所有 M_k 上.

下面用递推法证明, 对于所有的 M_k ($k\geqslant 1$), 都有 $N\prec M_k$. 首先 $N\prec M_0$, 在第 $k-1$ 步, 有 $N\prec M_{k-1}$. 设 M_k 是由 M_{k-1} 在球面凸集 E_{k-1} 对应区域上的 Perron 提升所构造的, 同时设 N、M_{k-1} 和 M_k 分别由径向函数 ρ_N、ρ_{k-1} 和 ρ_k 给出. 设 $\rho_{k-1}(E_{k-1})$ 是函数 u_{k-1} 在区域 $D_{k-1}\subset\mathbb{R}^n$ 上的图像, $u_k=L(u_{k-1},D_{k-1})$. 不妨设原点在 N 的内部, N 可以表示为 u_N 在 D_{k-1} 上的图像. 根据假设可

知, $u_N \geqslant u_{k-1}$, 在 ∂D_{k-1} 上 $u_k = u_{k-1}$. 在 D_{k-1} 上, u_N 和 u_k 分别满足如下方程:

$$\frac{\det D^2 u_N}{(1+|Du_N|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \epsilon_1, \quad \frac{\det D^2 u_k}{(1+|Du_k|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \epsilon.$$

由于 $\epsilon_1 < \epsilon$, 在 D_{k-1} 边界上 $u_N \geqslant u_k$, 由方程的比较原理 [8] 可知, 在 D_{k-1} 上有 $u_N \geqslant u_k$. 在 D_{k-1} 以外的部分, M_k 与 M_{k-1} 相同, 因此 $N \prec M_k$.

由于 M_0 是有界的, 假设 $M_0 \subset B_R$, 其中 $R > 0$, 则对于所有 $k \geqslant 0$, 有 $M_k \subset B_R$. 根据 Blaschke 选择定理 [16], 存在 M 为一个凸体的边界, 使得当 $k \to \infty$ 时, M_k 在 Hausdorff 拓扑下收敛到 M. 对于任意 $k \geqslant 0$, 都有 $N \prec M_k$, 因此有 $N \prec M$, 即 M 至少有一个内点.

接下来证明 M 是一个 ϵ- 超曲面. 反之, 设在 M 的某个局部坐标表示 u 中, 存在一个球 B_σ, 使得 $\mu_u(B_\sigma) > \epsilon \int_{B_\sigma} (1+|Du|^2)^{(n+2)/2} dx$. 设 $u_k^* = L(u_k, B_\sigma)$, $u^* = L(u, B_\sigma)$. 这里 M_k 和 M 分别是 u_k 和 u 在 B_σ 上的图像. 则有 $A_{u^*} < A_u - c$, 其中 $c > 0$ 是某个常数. 由于 $u_k^* \to u^*$ 和 $u_k \to u$ 局部一致收敛, 所以对于充分大的 k, 有 $A_{u_k^*} < A_{u_k} - \frac{1}{2}c$. 根据 (3.2), 得到 $A_{u_k} - A_{u_{k+1}} \geqslant \frac{1}{4}c$ 对于任意充分大的 k 成立, 这与 A_{u_k} 的收敛性矛盾.

对于任意两点 p_i 和 p_j $(i \neq j)$, 类似于之前的证明, 当 ϵ_1 充分小时, 以 p_i 和 p_j 为奇点的 ϵ_1- 超曲面包含在 M 所包围的凸体内. 因此, 连接 p_i 和 p_j 的开线段也包含在 M 的内部. 根据 Caffarelli [2] 关于 Monge-Ampère 方程的结论, M 在 $p_1, \ldots, p_m$ 之外必须是严格凸的. 因此, 由文献 [6] 中的正则性理论可知 M 在奇点外是光滑的.

从构造过程可知 $p_1, \ldots, p_m \in M$. 最后证明 M 在 $p_1, \ldots, p_m$ 处不是 C^1 光滑的. 令 $z_1 = p_1/|p_1|$, 设 $\omega = B_{\frac{1}{10}\delta}(y_0)$ 是以 y_0 为中心、$\frac{1}{10}\delta$ 为半径的 $\mathbb{S}^n$ 上的测地球, 取合适的 y_0 使得 $z_1 \in \partial\omega$. 以 $\rho_0(y_0)$ 为原点, $-y_0$ 为 y_{n+1} 轴正方向建立一个新的直角坐标系 y, 使得 $\rho_0(\omega)$ 是函数 $u_0(y_1, \ldots, y_n)$ 在一致凸区域 $W \subset \mathbb{R}^n$ 上的图像, W 是 $\rho_0(\omega)$ 在 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 上的投影. 设 p_1 在 $\{y_1, \ldots, y_n\}$ 平面上的投影为 x_0, M 在 W 上表示为函数 u 的图像, 则 u 和 u_0 满足方程

$$\frac{\det D^2 u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \epsilon, \quad \frac{\det D^2 u_0}{(1+|Du_0|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = K(y).$$

设 $\bar{u} = u - u_0$, 类似于 (2.4), 将上面两个方程相减得到 $\bar{u}$ 满足的方程. 注意到 $K(y) > \epsilon$, 有

$$\bar{a}^{ij}\bar{u}_{ij} + \bar{b}^i \bar{u}_i < 0 \tag{3.3}$$

在 W 上成立, 这里 $\bar{a}^{ij}$ 和 $\bar{b}^i$ 的定义与 (2.4) 类似, 故不展开罗列. M 和 M_0 的一致严格凸性保证了 (3.3) 是一个一致椭圆方程. 注意到 $\bar{u}(x_0) = 0$, 由强极大值原理知, 或者 $\bar{u} \equiv 0$, 或者 $\bar{u}$ 不能在 W 内部取到最小值. 前者由于方程 (3.3) 不成立. 后者结合 $\bar{u} \geqslant 0$ 和 $\bar{u}(x_0) = 0$ 可知, 在 W 内部一定有 $\bar{u} > 0$. 对于方程 (3.3), 在凸区域 W 上 $\bar{u} > 0$, 在 $x_0 \in \partial W$ 上 $\bar{u}(x_0) = 0$. 根据 Hopf 引理可知, 在 x_0 处, $\bar{u}$ 的外法向导数 $\partial_\nu \bar{u} < 0$, 即 $\partial_\nu u < \partial_\nu u_0$. 根据区域 ω 取法上的任意性可知, M 在 p_1 处不是 C^1 光滑的. 因此, $p_1, \ldots, p_m$ 是 M 的奇点. □

定理 1.4 的证明与定理 1.3 类似, 这里省略.

致谢 感谢审稿人对本文提出的诸多修改建议.

参考文献

1 Alexandrov A D. A characteristic property of spheres. Ann Mat Pura Appl (4), 1962, 58: 303–315

2 Caffarelli L A. A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity. Ann of Math (2), 1990, 131: 129–134
3 Cheng S Y, Yau S T. On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 495–516
4 Chou K S, Wang X J. A logarithmic Gauss curvature flow and the Minkowski problem. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2000, 17: 733–751
5 Chou K S, Wang X J. The L_p-Minkowski problem and the Minkowski problem in centroaffine geometry. Adv Math, 2006, 205: 33–83
6 De Philippis G, Figalli A. The Monge-Ampère equation and its link to optimal transportation. Bull Amer Math Soc (NS), 2014, 51: 527–580
7 Gidas B, Ni W M, Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle. Comm Math Phys, 1979, 68: 209–243
8 Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1983
9 Guan B, Spruck J. The existence of hypersurfaces of constant Gauss curvature with prescribed boundary. J Differential Geom, 2002, 62: 258–287
10 Hopf H. Differential Geometry in the Large. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
11 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems. Acta Math, 2016, 216: 325–388
12 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. The L_p-Aleksandrov problem for L_p-integral curvature. J Differential Geom, 2018, 110: 1–29
13 Minkowski H. Volumen und Oberfläche. Math Ann, 1903, 57: 447–495
14 Oliker V I. Hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampère type. Comm Partial Differential Equations, 1984, 9: 807–838
15 Oliker V I. The problem of embedding $\mathbb{S}^n$ into $\mathbb{R}^{n+1}$ with prescribed Gauss curvature and its solution by variational methods. Trans Amer Math Soc, 1986, 295: 291–303
16 Pogorelov A V. The Minkowski Multidimensional Problem. New York: Wiley, 1978
17 Serrin J. A symmetry problem in potential theory. Arch Ration Mech Anal, 1971, 43: 304–318
18 Spruck J. Fully nonlinear elliptic equations and applications to geometry. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994). Basel: Birkhäuser, 1995, 1145–1152
19 Trudinger N S, Wang X J. On locally convex hypersurfaces with boundary. J Reine Angew Math, 2002, 551: 11–32
20 Tso K S. Convex hypersurfaces with prescribed Gauss-Kronecker curvature. J Differential Geom, 1991, 34: 389–410
21 Urbas J. An expansion of convex hypersurfaces. J Differential Geom, 1991, 33: 91–125
22 Wang X J. Existence of convex hypersurfaces with prescribed Gauss-Kronecker curvature. Trans Amer Math Soc, 1996, 348: 4501–4524

Convex hypersurfaces of constant Gaussian curvature with singularities

Xu-Jia Wang & Ruixuan Zhu

Abstract In this paper, we prove that a closed convex hypersurface of constant Gaussian curvature cannot possess only one singular point. If it has two singular points, it must be rotationally symmetric. We also show that for any convex polyhedron, there exist closed convex hypersurfaces of constant Gaussian curvature K_0 such that the vertices of the polyhedron are the singular points of the hypersurface when K_0 is sufficiently small.

Keywords **constant Gaussian curvature, closed convex hypersurface, singularity**

MSC(2020) **35J15, 35J96, 30F20**

doi: 10.1360/SSM-2023-0176