

K-拟阵交约束下单调 γ -次模函数最大化问题研究*

李娜, 方奇志**, 曲晓英

(中国海洋大学数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 次模函数最大化问题是有向图最大割问题、设施选址最大化问题等问题的一般化, 是组合优化中的核心问题, 次模率 $\gamma(0 \leq \gamma \leq 1)$ 是一种刻画集合函数次模性的度量。本文通过拟阵交换性质的刻画, 利用局部搜索算法, 研究了 K-拟阵交约束下非负单调 γ -次模函数最大化问题, 得到如下结论: 对任意的 $K \geq 2, \delta > 0$, 存在求解 K-拟阵交约束下非负单调 γ -次模函数最大化问题的多项式时间算法, 近似比为 $\frac{\gamma^3}{K+\delta}$, δ 为实参数。当 $\gamma=1$ 时(即目标函数为次模函数), 与 Nong 等给出的近似比 $\frac{1}{K+1}$ 相比, 本文得到更好的近似比 $\frac{1}{K+\delta}$ 。此外, 本文还将次模函数的两个性质推广到 γ -次模函数。

关键词: 函数最大化; γ -次模函数; 拟阵; K-拟阵交; 局部搜索算法; 交换性质

中图法分类号: O231.2

文献标志码: A

文章编号: 1672-5174(2021)07 II-101-07

DOI: 10.16441/j.cnki.hdxh.20200181

引用格式: 李娜, 方奇志, 曲晓英. K-拟阵交约束下单调 γ -次模函数最大化问题研究[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2021, 51(增 I): 101-107.

Li Na, Fang Qizhi, Qu Xiaoying. Submodular maximization under multiple matroids with generic submodularity ratio- γ [J]. Periodical of Ocean University of China, 2021, 51(Sup.I): 101-107.

1 准备知识

次模函数优化理论的研究已经成为组合优化中的一个重要研究领域, 该领域的研究始于 20 世纪 70 年代, 由于其特有的性质, 使得它们有许多应用。组合优化中的很多问题可以看作是定义在基础集 N 上的集合函数最大化问题。将单个元素 j 为集合 S 带来的边际效益记为 $f_S(j) = f(S+j) - f(S)$ 。函数 $f(\cdot)$ 称为次模函数, 如果对 $\forall S \subseteq T \subseteq N$ 及 $\forall j \in N \setminus T$, $f_S(j) \geq f_T(j)$ 。现实生活中, 很多集合函数被证明是次模函数。

无约束次模函数最小化问题已被证明是存在多项式时间算法的, 很多不同约束下的次模函数最大化问题被证明是 NP-难的。这一事实也促使次模函数最大化问题成为诸多研究方向的热门话题。研究次模函数最大化问题通常会带有某种约束, 例如: 基数约束、背包约束、拟阵约束、K-拟阵交约束等约束。近年来, 次模函数优化理论的研究得到了一系列深刻地结果。

在基数约束下, 对于非负单调次模函数最大化问题,

Fisher 等^[1-2]证明了通过贪婪算法(贪婪算法是基本的研究方法之一: 从空集开始, 在每一次迭代中, 加入对当前集合带来边际效益最大的满足约束的元素)可以得到近似比为 $1 - \frac{1}{e}$ 的可行解, 其中: 近似比为最坏情况下算法输出解的函数值与该问题最优解的函数值之间的比值。Feige 等^[3]证明了除非 $P=NP$, 没有多项式算法可以达到比 $1 - \frac{1}{e}$ 更好的近似比。对于非负非单调次模函数最大化问题, Buchbinder 等^[4]给出一个近似比为 $\frac{1}{e}$ 的确定性算法。

在背包约束下, 对于非负次模函数最大化问题 Svridenko 等^[5]给出近似比为 $1 - \frac{1}{e}$ 的确定性算法, 其中函数 f 为单调次模函数。同时, Feige 等^[3]证明了 $1 - \frac{1}{e}$ 的不可近似性。

对于 K-拟阵约束下的单调次模函数最大化问题,

* 基金项目: 中央高校基本科研基金项目(201961003, 201861001); 山东省自然科学基金项目(ZR2019MA052); 国家自然科学基金项目(11871442)资助

Supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities(201961003, 201861001); the Shandong Provincial Natural Science Basic Program(ZR2019MA052); the National Natural Science Foundation of China(11871442)

收稿日期: 2020-06-22; 修订日期: 2020-09-07

作者简介: 李娜(1996-), 女, 硕士生, 研究方向为运筹学与控制论。E-mail: Leelinayeah@163.com

** 通讯作者: E-mail: qfang@ouc.edu.cn

Fisher 等^[1]证明了贪婪算法可以得到 $\frac{1}{2}$ 的近似比。基于 non-oblivious 局部搜索 (Alimonti)^[6], Ward 等^[7]提出一个近似比为 $1 - \frac{1}{e}$ 的组合算法。

对于 K -拟阵约束下的单调次模函数最大化问题, Fisher 等^[1]给出近似比为 $\frac{1}{K+1}$ 的贪婪算法。最近, Lee 和 Sviridenko 证明了对任意 $K \geq 2, \epsilon > 0$, 存在近似比为 $\frac{1}{K+\epsilon}$ 的局部搜索算法。对于非单调次模函数, Lee 和 Sviridenko^[8]得到的近似比为 $\frac{1}{K+1+\frac{1}{K-1}+\epsilon}$ 。

次模函数在组合优化中扮演重要角色。然而, 在很多实际问题中, $f(\cdot)$ 不是次模函数^[9], 包括实验设计和稀疏高斯过程^[10]。基于次模函数的等价定义, 有两种次模率的定义被提出。第一种是 Das 和 Kempe^[11]

提出的次模率: $\tilde{\gamma} = \min_{\Omega, S \subseteq \Omega} \frac{\sum_{j \in \Omega \setminus S} f_S(j)}{f_S(\Omega)}$, 参数 $\tilde{\gamma}$ 衡量了集合函数与次模函数的关系, 这是一种刻画集合函数次模性的度量。第二种次模率是由 Nong 等^[12]给出的另一种度量: 满足下列条件中最大的 γ : $f_S(j) \geq \gamma f_T(j)$, $\forall S \subseteq T \subseteq N, \forall j \in N \setminus T$ 。对于基数约束、背包约束、 K -拟阵约束下的非负单调 γ -次模函数最大化问题, Nong 等^[12]给出的近似比分别为 $1 - e^{-\gamma}$ 、 $1 - e^{-\gamma}$ 、 $\frac{\gamma}{K+\gamma}$ 的近似算法。本文所用的次模率为第二种次模率。本文是第一个用局部搜索算法研究 K -拟阵约束下非负单调 γ -次模函数最大化问题的。

定义 1^[12] (γ -次模函数) 给定基础集 N 和一个单调不减集合函数 $f: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$, 函数 f 的次模率是满足下列条件中最大的 γ :

$$\text{对 } \forall S \subseteq T \subseteq N \text{ 及 } \forall j \in N \setminus T, \\ f_S(j) \geq \gamma f_T(j).$$

注: (1) $f_S(j) = f(S + \{j\}) - f(S)$ 。

(2) $\gamma \in [0, 1]$ 。

(3) 函数 $f(\cdot)$ 是次模的当且仅当 $\gamma = 1$ 。

(4) 为了方便, 若函数 $f(\cdot)$ 的次模率为 γ , 我们称 $f(\cdot)$ 是 γ -次模函数。

定义 2 (拟阵) 给定基础集 N , 若 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 满足下列条件:

(1) 对 $\forall S' \subseteq S \subseteq N$, 若 $S \in \mathcal{I}$, 则 $S' \in \mathcal{I}$ 。(继承性)

(2) 对 $\forall S, T \subseteq N$, 且 $|T| > |S|$, 若 $S, T \in \mathcal{I}$, 则存在 $e \in T \setminus S$, 使得 $S \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ 。(扩充性)

则称它为拟阵。

定义 3 (K -拟阵交) 设 $\mathcal{M}_i = (N, \mathcal{I}_i) (1 \leq i \leq K)$ 是一个拟阵, 称满足下列条件的 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 为 K -拟阵交: 对 $\forall S \subseteq N$, 若 $S \in \mathcal{I}$ 当且仅当 $S \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$ 。

本文研究如下组合优化问题:

$$\max \{f(S) : S \in \mathcal{I}\}.$$

式中: 函数 f 是 γ -次模函数; $\mathcal{I}$ 为 K -拟阵交 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 中的 $\mathcal{I}$, 即 $\mathcal{I} = \{S : S \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i\}$ 。本文的主要结果是: 设 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 为一个拟阵, $D_{\mathcal{M}}(I)$ 为基于拟阵定义的有向图, 若 $I, J \in \mathcal{I}$ 且 $|I| = |J|$, 则 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 在 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间存在完美匹配; 对任意的 $K \geq 2, \delta > 0$, 存在求解 K -拟阵约束下非负单调 γ -次模函数最大化问题的多项式时间算法, 近似比为 $\frac{\gamma^3}{K+\delta}$, δ 为实参数。

2 拟阵的交换性质

2.1 两个拟阵的交

交换有向图通常是关于设计两个拟阵约束下线性函数最大化问题高效算法的一种构造^[13]。我们所感兴趣的是 K -拟阵约束下次模函数^[14-17]最大化问题的有效算法^[18-21]。尽管如此, 我们可以赋予交换有向图新的性质, 进而利用它设计算法。

定义 4^[8] 设 $\mathcal{M}_l = (N, \mathcal{I}_l), l = 1, 2$ 为基础集 N 上的两个拟阵, 对于给定独立集 $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, 定义点集 N 上的两个有向图, 分别记为: $D_{\mathcal{M}_1}(I), D_{\mathcal{M}_2}(I)$, 如下:

对任意元素 $i \in I, j \in N \setminus I$, 若 $I \cup \{j\} \setminus \{i\} \in \mathcal{I}_1$, 则定义 (i, j) 是 $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 上的有向弧;

对任意元素 $i \in I, j \in N \setminus I$, 且 $I \cup \{j\} \setminus \{i\} \in \mathcal{I}_2$, 则定义 (j, i) 是 $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 上的有向弧。

$D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 定义为有向图 $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 与 $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 的并图。

例 1 设 $\mathcal{M}_l = (N, \mathcal{I}_l), l = 1, 2$ 为基础集 N 上的两个拟阵, $N = \{A, B, C, D\}, \mathcal{I}_1 = \{\{A, B\}, \{B, D\}, \{A, C\}, \{C, D\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, D\}, \{C, D\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \emptyset\}$;

给定独立集 $I = \{A, B\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, 上述所定义有向图 $D_{\mathcal{M}_1}(I), D_{\mathcal{M}_2}(I), D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 见图 1。

定义 5 (匹配、完美匹配) 图 G 的一个匹配 M 是由其一组没有公共端点的边 (不包括环) 构成的集合。与匹配 M 中的边关联的那些顶点称为饱和点, 其余顶点称为未饱和点。若图 G 存在一个匹配 M , 其饱和点是图 G 的全体端点, 那么我们称匹配 M 是一个完美匹配。当提到有向图中的匹配 (或者完美匹配) 时, 我们把有向图中的有向边看作是无向边。

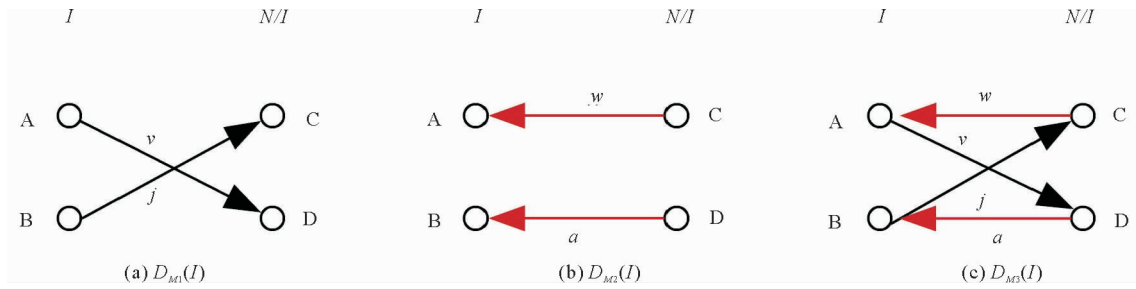


图 1 基于上述拟阵 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 及给定独立集 $I = \{A, B\}$ 定义的有向图 $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 和 $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 以及它们的并图 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$

Fig. 1 Digraphs $D_{\mathcal{M}_1}(I)$, $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ and the union of $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ and

$D_{\mathcal{M}_2}(I)$ on node N based on matroids $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ and independent set $I = \{A, B\}$

定义 6^[8] (不可约) 称有向图 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 中的有向圈 C 是不可约的, 如果它满足如下条件:

- (1) $C \cap D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 是有向图 $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 在点集 $V(C)$ 上的唯一完美匹配;
- (2) $C \cap D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 是有向图 $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 在点集 $V(C)$ 上的唯一完美匹配。

否则, 称它是可约的。

例 2 如例 1 有向图 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 中有向圈 $C = (A, D, B, C, A)$ 是不可约的。

定义 7 (对称差) 设 I, J 为两个集合, I 与 J 的对称差记为 $I \Delta J := (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$, 其中 $I \setminus J = \{i | i \in I \text{ 且 } i \notin J\}$ 。

定义 8^[8] (可行) 如果有向图 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 中的有向路或有向圈 A 满足:

- (1) $I \Delta V(A) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$;
- (2) $I \Delta V(A') \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, 其中 A' 是 A 的子有向路, 并且它的端点要么在 I 中要么是 A 的端点。

则称它是可行的。

文献[8]介绍了拟阵的交换性质及基于拟阵定义的有向图 $D_{\mathcal{M}_1}(I)$ 、 $D_{\mathcal{M}_2}(I)$ 、 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$,

并对有向图 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 的性质给出了如下引理, 这也是算法设计及近似比证明的基础。

引理 1^[8] $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 中的任何不可约有向圈都是可行的。

引理 2^[8] 设 $\mathcal{M}_1 = (N, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (N, \mathcal{I}_2)$ 是两个拟阵。若 $I, J \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, 则存在 $s \geq 0$ 和 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(I)$ 中一系列由 $I \Delta J$ 中元素构成的可行有向路或有向圈集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ (允许有重复), 使得 $I \Delta J$ 中的每个元素恰好出现在 2^s 个可行有向路或有向圈中。

2.2 Rota 交换性质的一般化

Rota 交换性质建立了一个拟阵的两个基之间的关系, 是一个非常有用的性质; 而一般化的 Rota 交换性质则将这种关系拓展到了拟阵的两个独立集上, 更具有普遍性。

引理 3^[8] 设拟阵 $\mathcal{M} = (N, \mathcal{I})$ 及 $I, J \in \mathcal{I}$, 令 $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ 为 I 的子集集合, 且 I 中的每个元素最多出现在 q 个 I_i 中, 那么存在 J 的子集集合 $\{J_1, J_2, \dots, J_m\}$, 使得 J 中的每个元素最多出现在 q 个 J_i 中, 且 $I_i \cup (J \setminus J_i) \in \mathcal{I}, \forall i = 1, 2, \dots, m$ 。

以上所刻画的拟阵的交换性质^[22-25] (包括两个拟阵和一个拟阵) 是局部搜索算法的基础, 并且为近似比的证明提供了保证。

3 主要结果

3.1 γ -次模函数基本性质的探讨

在本节, 根据 γ -次模函数的定义及特性, 我们得到了它的两个性质。

引理 4 设函数 $f(\cdot)$ 为定义在基础集 N 上的 γ -次模函数, $S, T \subseteq N$ 且 $\{T_l\}_{l=1}^t$ 为 $T \Delta S$ 的子集族, 并使得对 $\forall e \in T \setminus S$ 恰好出现在 k 个 T_l 中, 那么

$$\sum_{l=1}^t (f(S \cup T_l) - f(S)) \geq \gamma k (f(S \cup T) - f(S)).$$

证明 记 $|S| = s, |S \cup T| = c$. 对 $S \cup T$ 中的元素进行排序, 不妨设 $S = \{1, 2, \dots, s\}, T \setminus S = \{s+1, \dots, c\}$ 。

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^t (f(S \cup T_l) - f(S)) \geq \\ & \gamma \sum_{l=1}^t \sum_{p \in T_l} (f([p]) - f([p-1])) = \\ & \gamma k \sum_{p=s+1}^c (f([p]) - f([p-1])) = \\ & \gamma k (f(S \cup T) - f(S)). \end{aligned}$$

第一个不等式由函数 $f(\cdot)$ 的 γ -次模性可得; 由已知条件 $\{s+1, \dots, c\}$ 的每个元素恰好属于 k 个集合 T_l 可以得到第一个等式; 第二个等式累加可得。

引理 5 设函数 $f(\cdot)$ 为定义在基础集 N 上的 γ -次模函数, $S' \subseteq S \subseteq N$ 且 $\{T_l\}_{l=1}^t$ 为 $S \setminus S'$ 的子集族, 并使得对 $\forall e \in S \setminus S'$ 恰好出现在 k 个 T_l 中, 那么

$$\sum_{l=1}^t (f(S) - f(S \setminus T_l)) \leq \frac{k}{\gamma} (f(S) - f(S')).$$

证明 记 $|S|=s, |S'|=c$ 。不失一般性, 假设 $S' = \{1, 2, \dots, c\} = [c] \subseteq \{1, 2, \dots, c, c+1, \dots, s\} = [s] = S$ 。由 γ -次模性可得, 对任意的 $T \subseteq S$,

$$f(S) - f(S \setminus T) \leq$$

$$\frac{1}{\gamma} \sum_{p \in T_l} (f([p]) - f([p-1])).$$

由此可得,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^t (f(S) - f(S \setminus T_l)) &\leq \\ \frac{1}{\gamma} \sum_{l=1}^t \sum_{p \in T_l} (f([p]) - f([p-1])) &= \\ \frac{1}{\gamma} k \sum_{p=c+1}^s (f([p]) - f([p-1])) &= \\ \frac{1}{\gamma} k (f(S) - f(S')). \end{aligned}$$

由已知条件 $\{c+1, \dots, s\}$ 的每个元素恰好属于 k 个集合 T_l 可以得到第一个等式; 第二个等式累加可得。

以上两个引理刻画了 γ -次模函数的两个性质, 将被应用到近似比的证明过程。

3.2 拟阵基本性质的探讨

对于拟阵的交换性质, 文献[8]给出了如下引理(未进行证明):

若 $|I|=|J|$ 且 $I, J \in \mathcal{I}_l, l=1, 2$, 则 $D_{M_l}(I)$ 在 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间存在完美匹配。

在本节, 对于该性质, 我们给出了引理 6 及其证明:

引理 6 设 $\mathcal{M}=(N, \mathcal{I})$ 是一个拟阵, 若 $I, J \in \mathcal{I}$ 且 $|I|=|J|$, 则 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 在 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间存在完美匹配。

证明 对 $|I \setminus J|$ 作数学归纳法。

当 $|I \setminus J|=0$ 时, 显然成立。

当 $|I \setminus J|=1$ 时, 此时 $|J \setminus I|=1$, 不妨设 $I \setminus J = \{i\}, J \setminus I = \{j\}$ 。根据拟阵的可扩性, $\exists e \in J \setminus I \setminus \{i\} = \{j\}, s.t. I \setminus \{i\} \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, 即 $I \setminus \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{I}$, 此时 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 在 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间存在完美匹配。

假设 $|I \setminus J|=t$ 时, 结论成立。接下来分两种情况证明 $|I \setminus J|=t+1$ 时结论仍成立:

情况一 若 I, J 为定义在 $I \cup J$ 的拟阵 $\mathcal{M}'=(I \cup J, \mathcal{I}')$ ($\mathcal{I}' = \{S: S \in \mathcal{I}, S \subseteq I \cup J\}$) 上的基。根据文献[13]中定理 39.12 (设 $\mathcal{M}=(N, \mathcal{I})$ 是一个拟阵, 若 I, J 是该拟阵的两个基, 则 $\exists e \in I \setminus J, b \in J \setminus I, s.t. I \setminus \{e\} \cup \{b\}$ 和 $J \setminus \{b\} \cup \{e\}$ 均为该拟阵的基。)及 $I' \subseteq I, \exists e \in I \setminus J, b \in J \setminus I, s.t. I \setminus \{e\} \cup \{b\} \in \mathcal{I}$ 且 $J \setminus \{b\} \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ 。令 $J' = J \setminus \{b\} \cup \{e\}$, 那么 $|I \setminus J'| = |I \setminus J \setminus \{e\}| = t$, 根据归纳假设, 则 $I \setminus J'$ 与 $J' \setminus I$ 之间存在完美匹配 M 。又

因为 $I \setminus \{e\} \cup \{b\} \in \mathcal{I}$, 所以 $M \cup (e, b)$ 构成 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 上 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间的一个完美匹配。

情况二 若 I, J 不是定义在 $I \cup J$ 的拟阵 $\mathcal{M}'$ 上的基, 则将 I, J 分别扩充为拟阵 $\mathcal{M}'$ 上的两个基 I', J' 。注意, 此时 $|I' \setminus J'| \leq t+1$, 那么根据归纳假设 $I' \setminus J'$ 与 $J' \setminus I'$ 之间存在完美匹配 M , 不妨设 $M = \{(a_i, b_i): a_i \in I' \setminus J', b_i \in J' \setminus I'\}$ 。对 $\forall (a_i, b_i) \in M$, 由 $I' \setminus \{a_i\} \cup \{b_i\} \in \mathcal{I}$ 及 $I \subseteq I'$, 可得 $I \setminus \{a_i\} \cup \{b_i\} \in \mathcal{I}$ 。由 $I' \setminus I \subseteq J \setminus I$ 及 $J' \setminus J \subseteq I \setminus J$ 可得, 对 $\forall a_i' \in (I \setminus J) \setminus (I' \setminus J')$ 及 $\forall b_j' \in (J \setminus I) \setminus (J' \setminus I')$, $I \cup \{b_j'\} \in \mathcal{I}$, 再由继承性得 $I \setminus \{a_i'\} \cup \{b_j'\} \in \mathcal{I}$, 则 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 在 $(I \setminus J) \setminus (I' \setminus J')$ 与 $(J \setminus I) \setminus (J' \setminus I')$ 之间存在完美匹配 M' 。所以, $M \cup M'$ 构成 $D_{\mathcal{M}}(I)$ 上 $I \setminus J$ 与 $J \setminus I$ 之间的一个完美匹配。

3.3 局部搜索算法

在局部搜索算法的每一次迭代中, 给定一个可行解 $S \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$, 算法试图在多项式时间内通过从集合 S 中去掉若干个元素并从集合 $N \setminus S$ 中加入若干元素来获得一个更好的可行解。如果算法寻找到了一个更好的可行解, 则进入下一个迭代过程; 否则算法停止。具体地, 给定当前的可行解 $S \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$, 我们考虑下列局部移动:

p -交换操作: 如果存在 $S' \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$, 满足 (i) $|S' \setminus S| \leq 2p, |S \setminus S'| \leq 2Kp$; (ii) $f(S') \geq f(S)$, 则 $S \leftarrow S'$ 。

算法 1 局部搜索算法

输入: 基础集 $N := [n]$, γ -次模函数 f , 拟阵 $\mathcal{M}_i = (N, \mathcal{I}_i), i \in [K]$, 假设函数值 $f(S)$ 通过询问黑匣子可得。

1. 令 $S = \emptyset$ 。

2. 若下列局部操作是可行的, 那么根据 p -交换操作来更新 S , 即:

若存在可行的集合 S' , 满足:

(i) $|S' \setminus S| \leq 2p, |S \setminus S'| \leq 2Kp$, 且

(ii) $f(S') \geq f(S)$ 。

则 $S \leftarrow S'$ 。

输出 S 。

注意到函数 $f(\cdot)$ 是单调不减的, 所以 p -交换操作中不包含 $S' \subseteq S$ 这种情况。我们得出局部最优解的一个下界如下, 如下:

引理 7 对 $\forall K \geq 2$ 及 $C \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$, 通过 p -交换操作得到的局部最优解 S 满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\gamma^3} \left(K-1 + \frac{1}{p} \right) + 1 \right) f(S) &\geq \\ f(S \cup C) + \frac{1}{\gamma^3} \left(k-1 + \frac{1}{p} \right) f(S \cap C). \end{aligned}$$

证明 因为 $S, C \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i$, 由引理 2 得, 在点集 $S \Delta C$ 上, 存在 $D_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}(S)$ 中的可行有向路或有向圈集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ (可能有重复) 及 $s > 0$, 且 $S \Delta C$ 中的每个元素恰好出现在 2^s 个可行有向路或有向圈中。基于有向路或有向圈集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 我们来定义局部搜索算法中可交换元素集合, 然而存在一个问题: 可能 $\exists i, s, t. |A_i \cap (C \setminus S)| > 2p$ (不符合算法要求)。于是, 我们进行以下处理:

(1) 对集合 $C \setminus S$ 中的元素, 在每个 A_i 上进行标号, 使得 A_i 上点的标号是连续的。 $S \setminus C$ 中的点不标号。因为 $S \Delta C$ 中的每个点恰好出现在 2^s 个可行有向路或有向圈中, 所以 $C \setminus S$ 中的每个点可能有不同的标号。

(2) 将 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 复制共得到 $p+1$ 份, 我们分别记为第 $q=0, 1, 2, \dots, p$ 份, 且 $C \setminus S$ 中的每个点的标号如 (1)。对于第 $q=0, 1, 2, \dots, p$ 份 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 我们从每个 A_i 上去掉那些标号为 $x \equiv q \pmod{p+1}$ 的那些点。

通过上述处理, 我们得到新的有向路或有向圈集合 $\{A_{qi} | q=0, 1, \dots, p; i=1, \dots, m_q\}$ 。我们说 A_{qi} 是可行的, 因为 A_i 中去的点是 $C \setminus S$ 的点, 那么 A_{qi} 的端点要么是 A_i 的端点, 要么是 S 中的点, 由 A_i 是可行的得 A_{qi} 是可行有向路或有向圈。所以, $S \Delta V(A_{qi}) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $\{q=0, 1, \dots, p; i=1, \dots, m_q\}$ 。同时, 我们得到 $|A_{qi} \cap (C \setminus S)| \leq p \leq 2p$, $|A_{qi} \cap (S \setminus C)| \leq p+1 \leq 2p+1$ 。

由上述处理可得, $\forall e \in S \setminus C$ 恰好出现在 $(p+1)2^s$ 个 A_{qi} 中; $\forall e \in C \setminus S$ 恰好出现在 $p2^s$ 个 A_{qi} 中 (因为每次出现恰好被去掉一次 $(p+1)2^s - 2^s = p2^s$)。

令 $L_{qi} = S \cap V(A_{qi})$, $W_{qi} = C \cap V(A_{qi})$, 则 $(S \setminus L_{qi}) \cup W_{qi} = S \Delta V(A_{qi}) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$; 对于 $M_i, i=3, \dots, K, S, C \in \mathcal{I}_i$, 令 $\{W_1, \dots, W_t\} := \{W_{qi} | q=0, 1, \dots, p; i=1, \dots, m_q\}$, 其中 $t = \sum_{q=0}^p m_q$ 。

由引理 3 得, 对每个拟阵 $M_i, i=3, \dots, K$, $\exists \{X_{1i}, \dots, X_{ti}\}, s.t. W_j \cup (S \setminus X_{ji}) \in \mathcal{I}_i$, 且 S 中的每个元素最多出现在 $p2^s$ 个 X_{ji} 中。

记 $\Lambda_j = L_j \cup (\bigcup_{i=3}^K X_{ji})$, $j=1, \dots, t$, 注意到, $|\Lambda_j| \leq |L_j| + |\bigcup_{i=3}^K X_{ji}| \leq (2p+1) + (K-2)2p = (K-1)2p+1 \leq 2Kp$ 。

由引理 2 和引理 3 可以得到, $W_j \cup (S \setminus \Lambda_j) \in \bigcap_{i=1}^K \mathcal{I}_i, j=1, 2, \dots, t$ 。

由 S 为局部最优解, 我们可以得到

$$f(S) \geq f(W_j \cup (S \setminus \Lambda_j)), \forall j=1, 2, \dots, t.$$

由 $f(\cdot)$ 的单调性, 可得

$$f(S) \geq f(S \setminus \{e\}).$$

由引理 5 及 $\forall e \in S \setminus C$ 出现在 $n_e \leq (p+1)2^s +$

$(k-2)p2^s$ 个 Λ_j 中, 可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^t [f(S \cup W_j) - f(S)] \leq \\ & \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^t [f((S \setminus \Lambda_j) \cup W_j) - f(S \setminus \Lambda_j)] \leq \\ & \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^t [f(S) - f((S \setminus \Lambda_j))] \leq \\ & \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{j=1}^t [f(S) - f(S \setminus \Lambda_j)] + \right. \\ & \left. \sum_{e \in S \setminus C} ((p+1)2^s + (K-2)p2^s - n_e) \right. \\ & \left. (f(S) - f(S \setminus \{e\})) \right] = \\ & \frac{1}{\gamma} \sum_{l=1}^{\lambda} [f(S) - f(S \setminus T_l)] \leq \\ & \frac{1}{\gamma^2} ((p+1)2^s + (K-2)p2^s) (f(S) - f(S \cap C)). \end{aligned} \quad (1)$$

式中: 第一个不等式由 $f(\cdot)$ 的 γ -次模性可得; 第二个不等式是因为 $f(S) \geq f(W_j \cup (S \setminus \Lambda_j)) \forall j=1, 2, \dots, t$; 第三个不等式由 $f(S) \geq f(S \setminus \{e\})$ 可得; 第四个不等式由引理 5 可得。

由引理 4 及 $\forall e \in C \setminus S$ 恰好出现在 $p2^s$ 个 W_j 中, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^t [f(S \cup W_j) - f(S)] \geq \\ & \gamma p 2^s (f(S \cup C) - f(S)). \end{aligned} \quad (2)$$

由不等式 (1), (2) 得,

$$\begin{aligned} & \gamma p 2^s (f(S \cup C) - f(S)) \leq \\ & \frac{1}{\gamma^2} ((p+1)2^s + (K-2)p2^s) (f(S) - f(S \cap C)). \end{aligned}$$

整理可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma^3} \left(K-1 + \frac{1}{p} \right) + 1 \right) f(S) \geq \\ & f(S \cup C) + \frac{1}{\gamma^3} \left(K-1 + \frac{1}{p} \right) f(S \cap C). \end{aligned}$$

若令引理 7 中的 C 取最优解 S^* , 结合函数 f 的单调性可得,

$$f(S) \geq \frac{\gamma^3}{K-1 + \frac{1}{p} + \gamma^3} f(S^*).$$

定理 1 对 K -拟阵交约束下的非负单调 γ -次模函数最大化问题, 算法 2 是近似比为 $\frac{\gamma^3}{K+\delta}$ 的多项式时间算法, 其中 $K \geq 2, \delta > 0$ 。

本节开始定义的局部搜索算法, 在找到局部最优解时所运行的时间可能会达到指数阶。为保证多项式时间内找到局部最优解, 对上面的标准局部搜索算法进行改进, 加入了参数 ϵ , 得到的算法称之为近似局部搜索算法。

算法2 近似局部搜索算法

输入: 基础集 $N := [n]$, γ -次模函数 f , 拟阵 $\mathcal{M}_i = (N, \mathcal{I}_i)$, $i \in [K]$, 假设函数值 $f(S)$ 通过询问黑匣子可得。

1. 令 $v = \operatorname{argmax}\{f(u) | u \in N\}$ 且 $S = \{v\}$ 。

2. 若下列局部操作是可行的, 那么根据 p -交换操作来更新 S , 即:

若存在可行的集合 S' , 满足:

(i) $|S' \setminus S| \leq 2p$, $|S \setminus S'| \leq 2Kp$, 且

(ii) $f(S') \geq \left(1 + \frac{\epsilon}{n(K+1)}\right) f(S)$ 。

则 $S \leftarrow S'$ 。

输出 S 。

证明 求算法2运行时间的上界很容易。算法2中参数 ϵ 的值至多是 n 的多项式。首先来计算算法2迭代的次数: 由函数 $f(\cdot)$ 的 γ -次模性可得 $f(v) \geq \frac{\gamma f(\text{opt})}{n}$, 在更新集合 S 的过程中, 相应的函数值增加

为 $\left(1 + \frac{\epsilon}{n(K+1)}\right) f(S)$ 。由此可得, 算法2运行的次数

$$\text{为 } \log_{1+\frac{\epsilon}{n(K+1)}} \frac{f(\text{OPT})}{f(v)} \leq \log_{1+\frac{\epsilon}{n(K+1)}} \frac{f(\text{OPT})}{\frac{\gamma f(\text{opt})}{n}} =$$

$\frac{1}{\epsilon} n(K+1)(\log n - \log \gamma)$ 。其次, 对于 $\forall S \subseteq N$, 其局部邻居个数至多为 $O(n^{2(K+1)p})$ 。因此, 算法2是一个多项式时间算法。

设 S 为近似局部搜索算法得到的局部最优解, S^* 为问题最优解, 由引理7的证明方法可得

$$\left(\frac{1}{\gamma^3} \left(K + \frac{1}{p} + \epsilon\right)\right) f(S) \geq f(S \cup S^*) +$$

$$\frac{1}{\gamma^3} \left(K - 1 + \frac{1}{p}\right) f(S \cap S^*),$$

又因为 $f(\cdot)$ 是单调不减的, 所以

$$f(S) \geq \frac{\gamma^3}{\left(K + \frac{1}{p} + \epsilon\right)} f(S^*),$$

令 $\delta = \frac{1}{p} + \epsilon$,

$$f(S) \geq \frac{\gamma^3}{(K + \delta)} f(S^*).$$

4 结语

本文通过对拟阵交换性质的分析以及对 γ -次模函数的性质的研究, 对于 K -拟阵交约束下非负单调 γ -次模函数最大化问题, 得到一个多项式时间的局部搜索算法(Local search), 近似比为 $\frac{\gamma^3}{K + \delta}$ 。而对于同样的问

题, Nong 等给出的是近似比为 $\frac{\gamma}{K + \gamma}$ 的贪婪算法。注意到: 当 $\gamma = 1$ 时(即目标函数为次模函数), 与 Nong 等给出的近似比 $\frac{1}{K + 1}$ 相比, 本文得到更好的近似比 $\frac{1}{K + \delta}$, 这也是目前对于 K -拟阵交约束下非负单调次模函数最大化问题可以得到的最好的近似比。

参考文献:

- [1] Fisher M L, Nemhauser G L, Wolsey L A. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions II[J]. Mathematical Programming Study, 1978, 8: 73-87.
- [2] Nemhauser G L, Wolsey L A, Fisher M L. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions-I[J]. Mathematical Programming Study, 1978, 14(1): 265-294.
- [3] Feige U. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover[J]. Journal of the ACM (JACM), 1998, 45(4): 634-652.
- [4] Buchbinder N, Feldman M. Deterministic algorithms for submodular maximization problems[J]. ACM Transactions on Algorithms, 2018, 14(3): 392-403.
- [5] Sviridenko M. A note on maximizing a submodular set function subject to a knapsack constraint[J]. Operations Research Letters, 2004, 32(1): 41-43.
- [6] Alimonti P. New local search approximation techniques for maximum generalized satisfiability problems[J]. Information Processing Letters, 1996, 57(3): 151-158.
- [7] Filmus Y, Ward J. A tight combinatorial algorithm for submodular maximization subject to a matroid constraint. Proceedings of 53rd annual[J]. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2012: 659-668.
- [8] Lee J, Sviridenko M, Vondrák J. Submodular maximization over multiple matroids via generalized exchange properties[J]. Mathematics of Operations Research, 2010, 35(4): 795-806.
- [9] Krause A, Singh A, Guestrin C. Nearoptimal sensor placements in gaussian processes: Theory, efficient algorithms and empirical studies[J]. The Journal of Machine Learning Research, 2008, 9(1): 235-284.
- [10] Lawrence N, Seeger M, Herbrich R. Fast sparse gaussian process methods: The informative vector machine[J]. Proceedings of the International Conference on Neural Information Processing Systems, 2002, 15: 625-632.
- [11] Das A, Kempe D. Submodular meets spectral: Greedy algorithms for subset selection, sparse approximation and dictionary selection [C]. Bellevue: Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning, 2011: 1057-1064.
- [12] Nong Q Q, Sun T, Gong S N. Maximize a monotone function with a generic submodularity ratio[C]. Chan: Algorithmic Aspects in Information and Management, 2019: 249-260.
- [13] Schrijver A. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [14] Khodabakhsh A, Nikolova E. Maximizing non-monotone DR-submodular functions with cardinality constraints[J]. Data Structures and Algorithms, 2016, arXiv: 1611.09474.

- [15] Topkis D M. Minimizing a submodular function on a lattice[J]. Operations Research, 1978, 26(2): 305-321.
- [16] Conforti M, Cornuéjols G. Submodular set functions, matroids and the greedy algorithm: Tight worst-case bounds and some generalizations of the rado-edmonds theorem[J]. Discrete Applied Mathematics 1984, 7(3): 251-257.
- [17] Crawford V, Kuhnle A, Thai M T. Submodular cost submodular cover with an approximate oracle[J]. Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning, 2019, 97: 1426-1435.
- [18] Boykov Y, Veksler O, Zabih R. Fast approximate energy minimization via graph cuts[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(11): 1222-1239.
- [19] Hochbaum D S, Hong S P. About strongly polynomial time algorithms for quadratic optimization over submodular constraints[J]. Mathematical Programming, 1995, 69(1): 269-309.
- [20] Hausmann D, Korte B. K -greedy algorithms for independence systems[J]. Zeitschrift für Operations Research, 1978, 22(5): 219-228.
- [21] Hausmann D, Korte B, Jenkyns T. Worst case analysis of greedy type algorithms for independence system[J]. Mathematical Programming Study, 1980, 12: 120-131.
- [22] Greene C. A multiple exchange property for bases[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1973, 39(1): 45-50.
- [23] Reichel J, Skutella M. Evolutionary algorithms and matroid optimization problems[J]. Algorithmica, 2010, 57: 187-206.
- [24] Woodall D. An exchange theorem for bases of matroids[J]. Journal of Combinatorial Theory, 1974, 16(3): 227-228.
- [25] Oxley J. Matroid Theory[M]. USA: Oxford University Press, 1992.

Submodular Maximization Under Multiple Matroids with Generic Submodularity Ratio- γ

Li Na, Fang Qizhi, Qu Xiaoying

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: The Submodular function maximization problem is central in combinatorial optimization, generalizing max cut in digraphs, maximum facility location problems and so on. Generic submodularity ratio γ is a general measurement to characterize how close a nonnegative monotone set function is to be submodular, where $0 \leq \gamma \leq 1$. In this paper, we make a systematic analysis of local search algorithms for maximizing a monotone and normalized set function with a generic submodularity ratio- γ under K -intersection constraints. The algorithm, which bases on properties of matroid, yields a ratio of $\frac{\gamma^3}{K+\delta}$ for the problem, for any constant $K \geq 2, \delta > 0$. This result improves upon the $\frac{1}{K+1}$ -approximation of Nong et al. obtained in 2019, when $\gamma=1$. Besides, we generalize two properties of submodular function to γ -submodular function.

Key words: submodular maximization; γ -submodular function; matroid; K -matroid constraints; local search algorithm; exchange properties

AMS Subject Classification: O231.2

责任编辑 朱宝象