

在相对论平均场模型框架下利用大质量 中子星约束核物质状态方程

谢文杰^{1,2,3} 夏铖君⁴

1(运城学院 物理与电子工程系 运城 044000)

2(运城学院 山西省智能光电传感应用技术创新中心 运城 044000)

3(广西师范大学 广西核物理与核技术重点实验室 桂林 541004)

4(扬州大学 引力与宇宙学研究中心 扬州 225009)

摘要 随着天文观测数据日益增多,通过数据驱动的方法推断中子星物质的状态方程成为一种可行的方案。本文采用贝叶斯推断和天体物理观测约束相对论平均场(Relativistic Mean Field, RMF)模型,并以此为基础,研究了核状态方程(Equation of State, EOS)和中子星结构。通过分析不同交点密度下与耦合常数密度依赖行为,发现较高的交点密度加强了天体物理观测数据对物态方程的约束,导致大质量中子星的中等密度行为变软,中心能量密度增加。特别地,我们发现包括在大质量中子星核中,声速平方超过共形极限($v_s^2 > 1/3$)的概率很高。推断的最大中子星质量($M_{\text{max}} \geq 2.5 M_{\odot}$)与引力波事件(如GW190814)的解释一致,即其小质量伴星很可能对应于大质量中子星。此外,极端密度下的对称能和压强也表现出交点密度依赖性,符合多信使约束。

关键词 相对论平均场模型, 贝叶斯推断方法, 中子星, 状态方程, 引力波

中图分类号 O571

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2025.hjs.48.250167

CSTR: 32193.14.hjs.CN31-1342/TL.2025.48.250167

Constraining nuclear EOSs with massive neutron stars in the framework of RMF models

XIE Wenjie^{1,2,3} XIA Chengjun⁴

1(Department of Physics, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China)

2(Shanxi Province Intelligent Optoelectronic Sensing Application Technology, Innovation Center, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China)

3(Guangxi Key Laboratory of Nuclear Physics and Nuclear Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

4(Center for Gravitation and Cosmology, College of Physical Science and Technology, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

Abstract [Background] With the increasing number of astronomical observational data, it becomes feasible to constrain the equation of state of neutron star matter via data-driven method. [Purpose] Constrain nuclear EOSs

科技部平方公里阵列射电望远镜专项(No.2020SKA0120300)、国家自然科学基金(No.12275234)、山西省留学回国人员科研资助(No.20220037)、山西省基础研究计划项目(No.20210302123085)、广西重点实验室开放课题(No.NLK2023-03)和中央财政引导地方科技发展资金(No.Guiku ZY22096024)资助

第一作者: 谢文杰, 男, 1980年出生, 2014年于北京师范大学获博士学位, 研究领域为粒子物理与核物理

通信作者: 夏铖君, E-mail: cjxia@yzu.edu.cn

收稿日期: 2025-04-12, 修回日期: 2025-04-30

Supported by the National SKA Program of China (No.2020SKA0120300), National Natural Science Foundation of China (No.12275234), the Shanxi Provincial Foundation for Returned Overseas Scholars (No.20220037), the Natural Science Foundation of Shanxi Province (No.20210302123085), the Open Project of Guangxi Key Laboratory of Nuclear Physics and Nuclear Technology (No.NLK2023-03), and the Central Government Guidance Funds for Local Scientific and Technological Development, China (No.Guiku ZY22096024)

First author: XIE Wenjie, male, born in 1980, graduated from Beijing Normal University with a doctoral degree in 2014, focusing on particle physics and nuclear physics

Corresponding author: XIA Chengjun, E-mail: cjxia@yzu.edu.cn

Received date: 2025-04-12, revised date: 2025-04-30

(Equation of State) with massive neutron stars in the framework of relativistic mean field (RMF) models according to various astrophysical observations on neutron star properties. **[Methods]** This study investigated the nuclear EOS and neutron star structures using RMF models constrained by Bayesian inference and astrophysical observations. **[Results]** By analyzing density-dependent coupling constants across different critical densities, the work demonstrates that higher critical densities tighten constraints on the EOS, leading to softer intermediate-density behavior and increased central energy densities for massive neutron stars. Key findings include a high probability of the squared sound speed exceeding the conformal limit ($v_s^2 > 1/3$) in massive neutron star cores. The inferred maximum neutron star masses ($M_{\text{max}} \geq 2.5 M_\odot$) align with interpretations of gravitational wave events like GW190814, where secondary components may represent massive neutron stars. The symmetry energy and pressure profiles at supranuclear densities exhibit critical-density dependence, consistent with multi-messenger constraints. **[Conclusions]** These findings highlight the interplay between EOS stiffness, phase transitions, and observational constraints, providing critical insights for future studies to refine nuclear matter properties through multi-messenger data and advanced density functional analyses.

Key words Relativity mean field model, Bayesian inference approach, Neutron stars, Equation of state, Gravitational waves

近年来,贝叶斯统计方法及其相关机器学习技术逐渐成为核物理研究的重要工具^[1-7]。通过与经典物理模型的深度融合,此类数据驱动方法能够系统化理论参数的统计不确定性,并构建多维参数空间的高效推断机制。这种融合范式不仅深化了对传统模型内在假设与局限性的理解,更通过不确定性传播分析为模型的迭代优化提供了定量指导。

尽管我们对饱和密度 $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ 附近的核物质性质已有较好理解^[8],但大密度下 ($n_r \geq 2n_0$) 强相互作用物质的性质仍不明确^[9]。这主要归因于量子色动力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) 的非微扰性质,而微扰计算仅在极大密度 $n_r \geq 40n_0$ 时才变得可靠^[10]。

幸运的是,对中子星的天体物理学观测已达到前所未有的精确度。作为宇宙中最致密的天体之一,中子星是揭示高密度下强相互作用物质特性的天然实验室。例如,为了复现脉冲星 PSR J1614-2230 ($(1.928 \pm 0.017) M_\odot$)^[11] 和 PSR J0348+0432 ($(2.01 \pm 0.04) M_\odot$)^[12] 的质量,中子星物质的物态方程 (Equation of State, EOS) 需要足够硬。然而,根据基于双中子星合并事件 GRB 170817A-GW170817-AT 2017gfo^[13] 对 $1.4 M_\odot$ 中子星的潮汐形变能力 ($70 \leq \lambda_{1.4} \leq 580$) 和半径 ($R = (11.9 \pm 1.4) \text{ km}$) 的测量,相应中子星物质的状态方程应足够软。利用 NICER 和 XMM-Newton 的数据进行脉冲轮廓建模,能够对 PSR J0030+0451、PSR J0740+6620 和 PSR J0437-4715 的质量-半径进行联合测量^[14-18],观测结果支持了其他观测对中子星物质物态方程的约束,即物态方程在低密度下较软,在大密度下变硬。这表明中子星物质的声速 v_s 存在一个独有的特征,即 v_s 可能存在一

个峰值,该峰值可能对应于可能的退禁相变^[19]。

此外,与白矮星的“钱德拉塞卡质量极限”不同,中子星的最大质量尚不得而知。除了质量为两倍太阳质量的中子星^[11],有迹象表明,中子星的最大质量可能更大。特别地,双致密星合并事件 GW190814 和 GW200210 表明,其伴星的质量分别为 $2.6 M_\odot$ 和 $2.8 M_\odot$ ^[20],这超出了两倍太阳质量的极限,且位于假定的低质量间隙 ($2.5 \sim 5$) $M_\odot$ 内^[21]。如果这些伴星是中子星,那么中子星物质的 EOS 预计会更硬,而声速 v_s 的峰值也可能不存在。

因此,我们当前的研究有两个目标,即基于中子星观测来约束核物质的 EOS,并研究质量最大的中子星的结构。为此,本研究采用了相对论平均场 (Relativistic Mean Field, RMF) 模型^[22]。具体而言,我们基于贝叶斯方法对点耦合 RMF 模型的密度依赖耦合常数进行了详细的统计分析,其中纳入了来自中子星观测的各种约束。然后,利用约束的耦合常数来确定核物质的 EOS,同时研究质量最大的中子星的质量和物质状态。

1 理论框架

1.1 RMF 模型

相对论平均场模型已被证明能对有限核^[23]和核物质^[24]给出令人满意的描述,其中介子交换的 RMF 模型的拉格朗日密度为:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\mu (g_\omega \omega + g_\rho \rho \tau_3) - M - g_\sigma \sigma \right] \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 -$$

$$\frac{1}{2} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho^2 + U(\sigma, \omega) \quad (1)$$

式中： M 表示核子质量； τ_3 表示同位旋的第三分量， $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ 和 $\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu$ 是场张量。对于均匀核物质，拉格朗日密度可以简化为点耦合形式^[25]，即：

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi + \frac{1}{2} \alpha_S (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{1}{2} \alpha_V (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - \frac{1}{2} \alpha_{TV} (\bar{\psi} \gamma^\mu \tau_3 \psi)^2 \quad (2)$$

其中：耦合常数 $\alpha_S = g_\sigma^2/m_\sigma^2$ ， $\alpha_V = g_\omega^2/m_\omega^2$ ， $\alpha_{TV} = g_\rho^2/m_\rho^2$ 。核子的化学势由式(3)确定：

$$\mu_i = \sqrt{v_i^2 + M^{*2}} + \Sigma^R + \alpha_V n_V + \tau_{3,i} \alpha_{TV} n_{TV} \quad (3)$$

其中： $M^* = M - \alpha_S n_S$ 表示有效核子质量； v_i 表示费米动量，相应的粒子数密度 $n_i = v_i^3/3\pi^2$ ， $n_V = n_n + n_p$ 和 $n_{TV} = n_n - n_p$ 表示矢量密度。如果耦合常数密度依赖，则有：

$$\Sigma^R = -\frac{1}{2} \frac{d\alpha_S}{dn_V} n_S^2 + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_V}{dn_V} n_V^2 + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_{TV}}{dn_V} n_{TV}^2 \quad (4)$$

最后，核物质的标量密度、能量密度和压强由式(5~7)给出：

$$n_S = \frac{M^{*3}}{2\pi^2} \sum_{i=n,p} \left[x_i \sqrt{x_i^2 + 1} - \text{arcsinh}(x_i) \right] \quad (5)$$

$$E_{NM} = \frac{M^{*4}}{8\pi^2} \sum_{i=n,p} \left[x_i (2x_i^2 + 1) \sqrt{x_i^2 + 1} - \text{arcsinh}(x_i) \right] + \frac{1}{2} \alpha_S n_S^2 + \frac{1}{2} \alpha_V n_V^2 + \frac{1}{2} \alpha_{TV} n_{TV}^2 \quad (6)$$

$$P_{NM} = \sum_{i=n,p} \mu_i n_i - E_{NM} \quad (7)$$

其中： $x_i \equiv v_i/M^*$ 。

1.2 耦合常数的密度依赖形式

为了得到正确的核物质性质，需要考虑介质效应。在非线性相对论平均场模型^[26]中，介质内效应通过介子的非线性自耦合来处理，即：

$$U(\sigma, \omega) = -\frac{1}{3} g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4} g_3 \sigma^4 + \frac{1}{4} c_3 \omega^4 \quad (8)$$

这有效地引入了耦合常数的密度相关形式：

$$g_\sigma(n_V) = g_\sigma + \frac{1}{n_S} \left(\frac{1}{3} g_2 \sigma^2 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^3 \right) \quad (9)$$

$$g_\omega(n_V) = g_\omega - \frac{1}{4n_V} c_3 \omega^3 \quad (10)$$

$$g_\rho(n_V) = g_\rho \quad (11)$$

或者可以根据Typel-Wolter假设^[27]直接得到密度依赖的耦合常数，即：

$$g_{\sigma,\omega}(n_V) = g_{\sigma,\omega} a_{\sigma,\omega} \frac{1 + b_{\sigma,\omega} (n_V/n_0 + d_{\sigma,\omega})^2}{1 + c_{\sigma,\omega} (n_V/n_0 + d_{\sigma,\omega})^2} \quad (12)$$

$$g_\rho(n_V) = g_\rho \exp[-a_\rho (n_V/n_0 + b_\rho)] \quad (13)$$

图1展示了相对论密度泛函NL3^[28]、PK1^[26]、PK1r^[26]、TM1^[29]、DD-LZ1^[30]、DDMEX^[31]、PKDD^[26]、DD-ME2^[32]、DDV^[33]和TW99^[27]预测的对称核物质中同位旋标量-标量($\alpha_S = g_\sigma^2/m_\sigma^2$)、同位旋标量-矢量($\alpha_V = g_\omega^2/m_\omega^2$)和同位旋矢量-矢量($\alpha_{TV} = g_\rho^2/m_\rho^2$)通道的耦合常数变化。非线性自耦合项对应的耦合常数根据式(9)~(11)估算。值得一提的是，这些相对论密度泛函很好地描述了有限核的基态性质。这些泛函预测的核总结合能的不确定度在2~4 MeV，而电荷半径的不确定度在0.01~0.03 fm。如图1所示，这些相对论密度泛函对应的耦合常数通常随密度减小，且同位旋标量-标量(α_S)和同位旋标量-矢量(α_V)通道的耦合常数在饱和密度附近表现出相似的值。这可能主要对应于核物质的饱和性质，要求对称核物质在饱和密度附近压强为零。

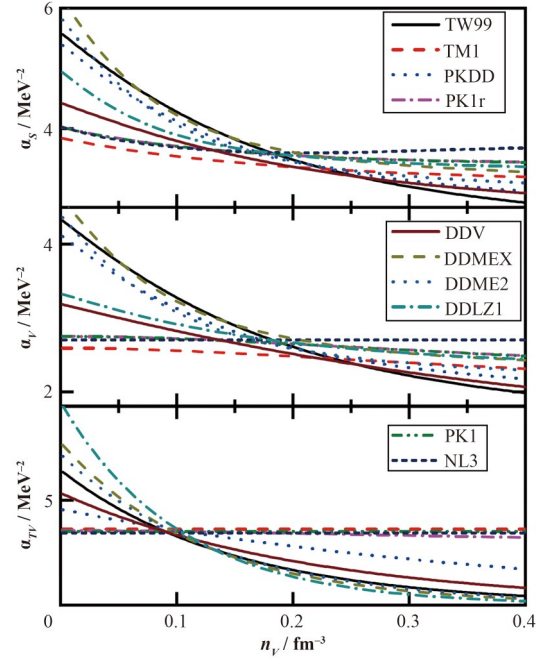


图1 用各种相对论密度泛函预测对称核物质同位旋标量($\alpha_S = g_\sigma^2/m_\sigma^2$)、同位旋标量-矢量($\alpha_V = g_\omega^2/m_\omega^2$)和同位旋矢量-矢量($\alpha_{TV} = g_\rho^2/m_\rho^2$)道中耦合常数关于密度的函数

Fig.1 The effective density-dependent coupling constants in the isoscalar-scalar ($\alpha_S = g_\sigma^2/m_\sigma^2$), isoscalar-vector ($\alpha_V = g_\omega^2/m_\omega^2$), and isovector-vector ($\alpha_{TV} = g_\rho^2/m_\rho^2$) channels in symmetric nuclear matter predicted by various relativistic density functionals

事实上，通过假设同位旋标量-标量通道的贡献足够小，我们可以将核物质的动能密度展开为 $E_k(M^*) = E_k(M) - \alpha_S n_S^2$ 。然后可以根据式(6)得到核物质的势能密度，即：

$$U = E_{NM} - E_k(M) = \frac{1}{2} \alpha_V n_V^2 + \frac{1}{2} \alpha_{TV} n_{TV}^2 - \frac{1}{2} \alpha_S n_S^2 \quad (14)$$

对于对称核物质 $n_{TV} = 0$ 。然后可以将核物质的

标量密度展开到二阶 n_V^2 , 得到:

$$n_S = n_V - 0.04 \frac{n_V^2}{n_{on}} \quad (15)$$

其中: $n_{on} = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ 。该公式很好地描述了对称核物质的标量密度 n_S 与矢量密度 n_V 之间的关系。结合图 1 中给出的耦合常数, 可以确定对称核物质的势能密度。图 2 展示了由各种相对论密度泛函预测的对称核物质每个重子的势能之间的关系。可以看出, 尽管各种相对论密度泛函中 α_S 和 α_V 的密度依赖行为大不相同, 但由式 (14) 给出的势能密度却彼此一致, 特别是在饱和密度 ($n_V \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$) 附近, U/n_V 达到其最小值 ($U/n_V \approx -30 \text{ MeV}$)。

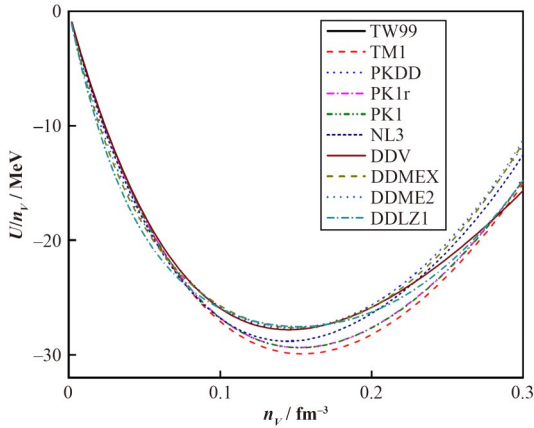


图 2 用各种相对论密度泛函预测得到的对称核物质每重子势能

Fig.2 The potential energy per baryon in symmetric nuclear matter predicted by various relativistic density functionals

此外, 根据式 (14), 同位矢量-矢量通道中的势能密度为:

$$U_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \alpha_{TV} n_V^2 \quad (16)$$

因此, 核物质的对称能随耦合常数 α_{TV} 的增大而增加。特别是在 $n_{on} = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ 附近, 各种相对论密度泛函预测的 $\alpha_{TV}(n_{on})$ 值彼此一致。事实上, 通过再现有限核的性质, 发现各种密度泛函理论预测的对称能在饱和密度附近几乎相同^[34], 这表明在 $n_V = n_{on}$ 时 α_{TV} 受到良好约束。 α_{TV} 在 n_{on} 处的导数决定了对称能的斜率 L , 而 L 可通过原子核的中子皮厚度来确定。然而, 对 ^{208}Pb 和 ^{48}Ca 的中子皮厚度的测量在 L 值上给出了相互矛盾的结果^[35-36], 这需要在未来进行更详细的理论和实验研究。

表 1 中密度泛函 DD-ME2 预测了饱和密度 $n_0 = 0.152 \text{ fm}^{-3}$, 每个核子的能量 $\varepsilon_0 = -16.13 \text{ MeV}$, 不可压缩性 $K = 250.8 \text{ MeV}$, 偏度系数 $J = 477 \text{ MeV}$, 对称能量 $\varepsilon_{\text{sym}} = 32.3 \text{ MeV}$, 斜率 $L = 51.2 \text{ MeV}$ 和核对称能量的曲率参数 $K_{\text{sym}} = -87 \text{ MeV}$ 。相应的核子质量为 $M =$

表 1 采用式 (17)~(19)、亚饱和密度 $n_{on} \leq n_V \leq n_0$ 时, 由相对论密度泛函 DD-ME2 确定的耦合常数的零阶、一阶和二阶导数^[32]

Table 1 The adopted zeroth, first, and second order derivatives for the coupling constants in Eqs.(17)~(19) at subsaturation density $n_{on} \leq n_V \leq n_0$, which are fixed by the relativistic density functional DD-ME2^[32]

Coupling	Zeroth order / 10^{-4} MeV^{-2}	First order / $10^{-10} \text{ MeV}^{-5}$	Second order / $10^{-16} \text{ MeV}^{-8}$
$\alpha_S(n_{on})$	4.068 95	-1.316 29	1.949 90
$\alpha_V(n_{on})$	3.077 85	-1.018 83	1.408 85
$\alpha_{TV}(n_{on})$	0.342 884	-0.331 735	0.320 949

938.5 MeV。

本文根据天体物理观测结果对耦合常数进行了约束, 其中将整体密度划分为三个区域, 即 $n_{on} \leq n_V \leq n_0$ 、 $n_0 \leq n_V \leq n_{\text{crit}}$ 和 $n_V > n_{\text{crit}}$, 其中 $n_{on} = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ 。在每个区域, 我们采用以下表达式来表示耦合常数, 即:

$$\alpha_S = \frac{\alpha'_S(n_1)^2}{\alpha''_S(n_1)} \left[e^{\frac{\alpha'_S(n_1)}{\alpha''_S(n_1)}(n_V - n_1)} - 1 \right] + \alpha_S(n_1) \quad (17)$$

$$\alpha_V = \frac{\alpha'_V(n_1)^2}{\alpha''_V(n_1)} \left[e^{\frac{\alpha'_V(n_1)}{\alpha''_V(n_1)}(n_V - n_1)} - 1 \right] + \alpha_V(n_1) \quad (18)$$

$$\alpha_{TV} = \frac{\alpha'_{TV}(n_1)^2}{\alpha''_{TV}(n_1)} \left[e^{\frac{\alpha'_{TV}(n_1)}{\alpha''_{TV}(n_1)}(n_V - n_1)} - 1 \right] + \alpha_{TV}(n_1) \quad (19)$$

式中: n_1 、 n_0 和 n_{crit} 分别表示耦合常数相匹配的交点密度, 即 $\alpha_S(n_1^-) = \alpha_S(n_1^+)$, $\alpha_V(n_1^-) = \alpha_V(n_1^+)$, $\alpha_{TV}(n_1^-) = \alpha_{TV}(n_1^+)$, $\alpha'_S(n_1^-) = \alpha'_S(n_1^+)$, $\alpha'_V(n_1^-) = \alpha'_V(n_1^+)$ 以及 $\alpha'_{TV}(n_1^-) = \alpha'_{TV}(n_1^+)$ 。二阶导数 $\alpha''_S(n_1)$ 、 $\alpha''_V(n_1)$ 和 $\alpha''_{TV}(n_1)$ 被视为独立参数, 用于调节每个密度区域耦合常数随密度的变化行为。在亚饱和密度 $n_{on} \leq n_V \leq n_0$, 我们根据相对论密度泛函 DD-ME2^[32] 确定系数, 这些系数列于表 1。需注意的是, 交点密度 n_1 的选择并非唯一。为了展示由于 n_1 选择的不同而产生的变化, 我们取 $n_1 = 2n_0$ 和 $3n_0$ 。

最终我们剩下 6 个独立参数, 即 $\alpha''_S(n_0)$ 、 $\alpha''_V(n_0)$ 、 $\alpha''_{TV}(n_0)$ 、 $\alpha''_S(n_{\text{crit}})$ 、 $\alpha''_V(n_{\text{crit}})$ 和 $\alpha''_{TV}(n_{\text{crit}})$, 这些参数将根据中子星观测结果来确定。特别地, 为了确定中子星物质的 EOS, 需要考虑轻子的贡献, 其中能量密度和压强由式 (20)~(21) 确定:

$$E_l = \frac{m_l^4}{8\pi^2} \left[x_l (2x_l^2 + 1) \sqrt{x_l^2 + 1} - \text{arcsinh}(x_l) \right] \quad (20)$$

$$P_l = \frac{m_l^4}{24\pi^2} \left[x_l (2x_l^2 + 1) \sqrt{x_l^2 + 1} + 3 \text{arcsinh}(x_l) \right] \quad (21)$$

式中: $x_l = v_l/m_l$, 其中费米动量固定在给定的数密度 n_l 由 $v_l = \sqrt[3]{3\pi^2 n_l}$ 确定。而轻子质量 $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}$ 。在给定的总重子数密度 n_V 后, 质子、中子、电子和 μ 子的粒子数密度则通过满足电荷中性和 β 平衡条件来确定, 即:

$$n_p = n_e + n_\mu \quad (22)$$

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e = \mu_p + \mu_\mu \quad (23)$$

中子星物质的总能量密度和压强分别由以下公式计算得出：

$$E = E_{NM} + \sum_{l=e,\mu} E_l \quad (24)$$

$$P = P_{NM} + \sum_{l=e,\mu} P_l \quad (25)$$

对于 $n_\nu < n_{on}$ 条件下的中子星物质，我们采用考虑非均匀结构形成的统一物态方程^[37]。通过求解托尔曼-奥本海默-沃尔科夫 (Tolman - Oppenheimer - Volkoff limit, TOV) 方程^[38-39]，可以确定中子星的质量和半径，即：

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{GME}{r^2} \frac{(1 + P/E)(1 + 4\pi r^3 P/M)}{1 - 2GM/r} \quad (26)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi E r^2 \quad (27)$$

其中：重力常数 G 为 $6.707 \times 10^{-45} \text{ MeV}^{-2}$ 。无量纲潮汐变形能力 λ 是通过式 (28)^[40-42] 计算的：

$$\lambda = \frac{2}{3} k_2 \left(\frac{R}{M} \right)^5 \quad (28)$$

式中： R 和 M 分别表示中子星的半径和质量； k_2 表示由状态方程和 TOV 方程在适当边界条件下确定的第二洛夫数。

1.3 贝叶斯推断方法

为了确定 6 个独立参数 $p_{i=1,2,\dots,6} = \alpha''_S(n_0)$ 、 $\alpha''_V(n_0)$ 、 $\alpha''_{TV}(n_0)$ 、 $\alpha''_S(n_{crit})$ 、 $\alpha''_V(n_{crit})$ 和 $\alpha''_{TV}(n_{crit})$ ，我们采用了贝叶斯推断方法，其中 $n_{crit} = 2n_0$ 和 $3n_0$ 对应于两个交点密度。根据贝叶斯定理，给定数据集 D ，模型 M 的后验概率 $P(M|D)$ 为：

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{\int P(D|M)P(M)dM} \quad (29)$$

似然函数 $P(D|M)$ 表示模型 M 正确预测数据 D 的条件概率，而 $P(M)$ 是模型 M 的先验概率，我们采用均匀分布。分母作为归一化常数。

根据先验概率 $P(M)$ 随机采样 6 个独立参数 $p_{i=1,2,\dots,6}$ ，然后根据式 (24)~(27) 确定相应的状态方程和中子星结构。随后，利用所得的理论半径 $R_{th,j=1,2,\dots,7}$ 来评估模型再现表 2 中数据集 $D(R_{1,2,\dots,7})$ 所示观测半径 $R_{obs,j=1,2,\dots,7}$ 的可能性，即：

$$P_R[D(R_{1,2,\dots,7})|M(p_{1,2,\dots,6})] = \prod_{j=1}^7 \frac{\exp\left[-\frac{(R_{th,j} - R_{obs,j})^2}{2\sigma_{obs,j}^2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma_{obs,j}} \quad (30)$$

这里 $\sigma_{obs,j}$ 表示与观测值 j 相关的 1σ 误差，该误差

可取不同值以近似非对称(非高斯)分布。对于来自同一来源的不同约束条件，我们通过随机选择每个具有相等权重的约束条件来计算似然函数，即认为它们具有相等的概率。最后，通过将每个单独的似然分量相乘来确定总似然函数，即：

$$P[D|M(p_{1,2,\dots,6})] = P_{filter} \times P_{mass,max} \times P_R \quad (31)$$

其中： P_{filter} 作为过滤器，要求满足热力学稳定性条件 ($dP/dE \geq 0$)、因果性条件 ($dP/dE \leq 1$) 以及所有密度下有效核子质量 ($M \geq 0$) 的正定性。 $P_{mass,max}$ 确保状态方程足够硬，以使中子星的最大质量 $M_{max} \geq 1.97 M_\odot$ 。

最后，基于表 2 所示的天体物理约束，采用马尔可夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 方法，利用 Metropolis-Hastings 算法^[19,47-49] 即可确定模型参数的后验概率密度函数 (Probability Density Functions, PDF)。这里我们假设了中子星质量不确定性区间中的平均值，并采用了相应的半径约束。表 3 列出了在 $n_{crit} = 2n_0$ 和 $3n_0$ 时模型参数的最可能值及其相应的可信区间，其中，如果取更大的 n_{crit} 值，则观察到对参数的约束更强。

表 2 本文采用的中子星半径数据集
Table 2 Dataset for neutron stars' radii adopted in the present work

Mass / $M_\odot$	Radius R / km	Source and Ref.
1.4	$11.9^{+1.4}_{-1.4}$ (90% CFL)	GW 170817 ^[25]
1.4	$10.8^{+2.1}_{-1.6}$ (90% CFL)	GW 170817 ^[43]
1.4	$11.7^{+1.1}_{-1.1}$ (90% CFL)	QLMXBs ^[44]
$1.34^{+0.15}_{-0.16}$	$12.71^{+1.14}_{-1.29}$ (68% CFL)	PSR J0030+0451 ^[14]
$1.44^{+0.15}_{-0.16}$	$13.0^{+1.2}_{-1.0}$ (68% CFL)	PSR J0030+0451 ^[45]
$2.08^{+0.07}_{-0.07}$	$13.7^{+2.6}_{-1.5}$ (68% CFL)	PSR J0740+6620 ^[17]
$0.77^{+0.20}_{-0.17}$	$10.4^{+0.86}_{-0.78}$ (68% CFL)	HESS J1731-347 ^[46]

2 结果与讨论

如表 3 所示，在根据各种天体物理观测结果对参数进行约束后，可以获得对核物质特性的相应约束。图 3 展示了质量为 $1.4 M_\odot$ 和 $2.0 M_\odot$ 的中子星中心能量密度的 PDF 以及在两个临界密度阈值 ($n_{crit} = 2n_0$ 和 $3n_0$) 下计算的最大质量中子星核心处的声速平方。结果表明，中心能量密度对临界密度的选择非常敏感。对于 $n_{crit} = 3n_0$ 的 $1.4 M_\odot$ 中子星，后验 PDF 呈现出明显的肩状结构，而 $2.0 M_\odot$ 中子星的后验分布则呈现双峰特征。与 $n_{crit} = 2n_0$ 的情况相比，这两种情况下的中心能量密度都更高，且后验分布范围更广。

分析表明，采用更高的临界密度 ($n_{crit} = 3n_0$) 会对物态方程产生更严格的观测约束，同时引发软化行

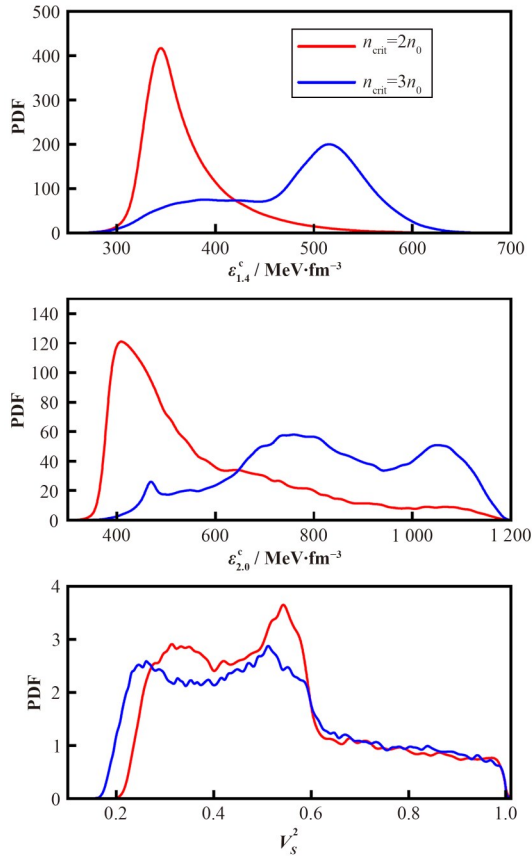


图3 $M=1.4 M_\odot$ 和 $2.0 M_\odot$ 中子星的声速平方和中心能量密度的后验概率分布

Fig.3 Posterior probability distribution functions of the squared speed of sound, central energy densities for neutron stars with $M=1.4 M_\odot$ and $2.0 M_\odot$.

为。这解释了中心密度的系统性增加:在68%的可信度水平上,当 n_{crit} 从 $2n_0$ 切换到 $3n_0$ 时,对于 $1.4 M_\odot$ 中子星,最可能的中心能量密度增加了约48%,而对于 $2.0 M_\odot$ 中子星,则增加了超过89%。相反,随着临界密度的增加,声速平方略有下降,因为声速值的升高与更硬的物态方程相关。值得注意的是,结果表明,大质量中子星核心物质的声速平方极有可能超过1/3的共形极限,这与先前的研究结果一致,即当最大中子星质量超过约 $2.0 M_\odot$ 时,这一极限会被违反^[50]。而在极高密度下,例如约 $40n_0$,声速平方预计会接近1/3的共形极限。完全由夸克物质构成的致密星的情况也是一个非常有趣的话题,应在我们未来的研究中加以探讨。

图4展示了狄拉克有效质量作为重子密度函数的90%置信区间。结果表明,其密度依赖性呈现出两种可能的趋势:狄拉克有效质量要么随密度增加而非单调递减后随即增加,要么呈现纯粹的单调递减。值得注意的是,在低于 $2.5n_0$ 的条件下,临界密度的选择对约束精度有显著影响。当采用 $3n_0$ 作为

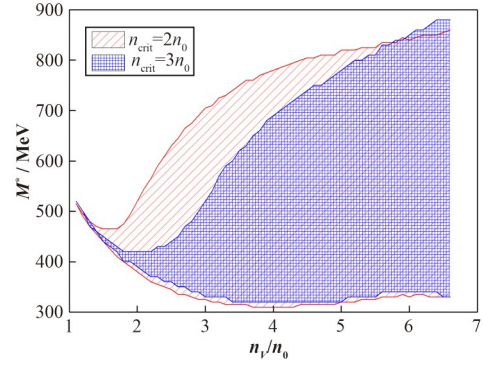


图4 中子星物质90%可信区间内的核子有效质量
Fig.4 The nucleon effective masses in neutron star matter within their 90% credible intervals

临界密度时,90%置信区间大幅缩小390~420 MeV,而采用 $2n_0$ 阈值时得到的范围则更宽,为380~520 MeV。

图5展示了在临界密度 n_{crit} 从 $2n_0$ 切换到 $3n_0$ 时, $1.4 M_\odot$ 和 $2.0 M_\odot$ 中子星的潮汐形变的后验概率密度函数。观测到的潮汐形变降低,即对于 $1.4 M_\odot$ 中子星约降低29%,对于 $2.0 M_\odot$ 中子星约降低72%,这与更高临界密度下的状态方程软化直接相关。这种质量依赖的敏感性源于更硬的EOS(通常与较低的临界密度相关)通过更强的引力多极响应增强了潮汐变形。表3中总结的68%和90%置信区间表明,在 $2.0 M_\odot$ 的情况下,与 $n_{\text{crit}}=3n_0$ 的情景相比, $n_{\text{crit}}=2n_0$ 的约束范围明显更广。大质量中子星对临界密度变化的敏感性增强,意味着其内部EOS和潮汐变形机制之间的耦合更强。这与最近的研究一致,这些研究表明,大质量中子星主要探测夸克-强子相变区域,在该区域,EOS刚度会经历显著的密度依赖性变化。

最后,我们探讨了双致密星合并事件GW190814和GW200210中观察到的次级天体可能是中子星的可能性^[20,51]。如果真是这样的话,那么中子星的最大质量至少应超过 $2.5 M_\odot$,即 $M_{\text{max}} > 2.5 M_\odot$ 。通过施加这一条件,我们发现仍有很大的参数空间满足所有约束。图6展示了在中子星达到最大质量超过 $2.5 M_\odot$ 的条件下,声速、压强、对称能以及对称物质中每个核子的能量作为重子密度函数的68%置信区间(Confidence Interval, CIs),为了进行比较,图6中绿色曲线还包含了90%可信水平下LIGO/Virgo合作组给出的压强约束^[13],计算结果仅包含支持最大质量大于2.5倍太阳质量的物态方程。中子星最大质量的PDF显示,虽然采用 $n_{\text{crit}}=2n_0$ (支持更大质量配置)时物态方程更硬,但即使 $n_{\text{crit}}=3n_0$ 的情景也预测中子星最大质量超过 $2.5 M_\odot$,如图7所示,这与将GW190814的次级天体作为中子星的

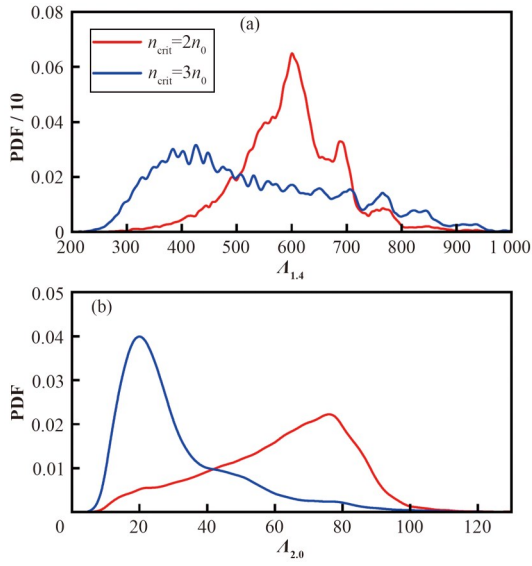


图5 $M=1.4 M_{\odot}$ (a)和 $2.0 M_{\odot}$ (b)中子星潮汐形变的后验概率分布函数

Fig.5 Posterior probability distribution functions of the tidal deformability for neutron stars with $M=1.4 M_{\odot}$ (a) and $2.0 M_{\odot}$ (b)

表3 质量分别为 $1.4 M_{\odot}$ 和 $2.0 M_{\odot}$ 中子星的中心能量密度、声速平方和潮汐形变,以及最大质量的最大可能值及其相应的可信区间(68%和90%)

Table 3 Most probable values and their corresponding credible intervals (68% and 90%) for the derived central energy densities, tidal deformability corresponding to the neutron stars with masses of 1.4 and 2.0 solar masses, and the squared speed of sound as well as the maximum mass

Quantities	$n_1=2n_0$		$n_1=3n_0$	
	68%	90%	68%	90%
$\varepsilon_{1.4}^c / \text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$	$344.6^{+41.4}_{-13.8}$	$344.6^{+110.3}_{-13.8}$	$510.1^{+41.3}_{-96.5}$	$510.1^{+55.1}_{-179.3}$
$\varepsilon_{2.0}^c / \text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$	$399.8^{+220.5}_{-27.6}$	$399.8^{+454.9}_{-27.6}$	$758.2^{+317.1}_{-82.7}$	$758.2^{+372.2}_{-220.6}$
v_s^2	$0.54^{+0.04}_{-0.26}$	$0.54^{+0.23}_{-0.31}$	$0.51^{+0.05}_{-0.3}$	$0.51^{+0.27}_{-0.33}$
$A_{1.4}$	600^{+80}_{-85}	600^{+125}_{-175}	425^{+190}_{-125}	425^{+350}_{-140}
$A_{2.0}$	75^{+6}_{-33}	75^{+12}_{-54}	21^{+12}_{-9}	21^{+36}_{-9}
Mass / $M_{\odot}$	$2.0^{+0.4}_{-0.0}$	$2.0^{+0.65}_{-0.0}$	$2.0^{+0.15}_{-0.0}$	$2.0^{+0.3}_{-0.0}$

解释一致。值得注意的是, $3n_0$ 的临界密度对物态方程的约束更严格,这主要是由对称能部分的修改驱动的:在 $2n_0$ 时的对称能对临界密度选择表现出最小的敏感性($2n_0$ 时为 $50.7^{+5.6}_{-6.7}$ MeV,而 $3n_0$ 时为 (53.9 ± 4.6) MeV),这与重离子碰撞分析和多信使中子星观测的结果((51 ± 13) MeV)一致。相比之下,压强表现出明显的临界密度依赖性($n_{\text{crit}}=2n_0$ 时为 (14.8 ± 4.8) MeV $\cdot$ fm $^{-3}$,而 $n_{\text{crit}}=3n_0$ 时为 (16.5 ± 2.7) MeV $\cdot$ fm $^{-3}$),落在LIGO/Virgo合作组得出的界限(绿色带)内^[13]。声速曲线在临界密度附近显示出特征峰值,证实了我们最近的发现^[26],即可能存在强子-夸克相变。

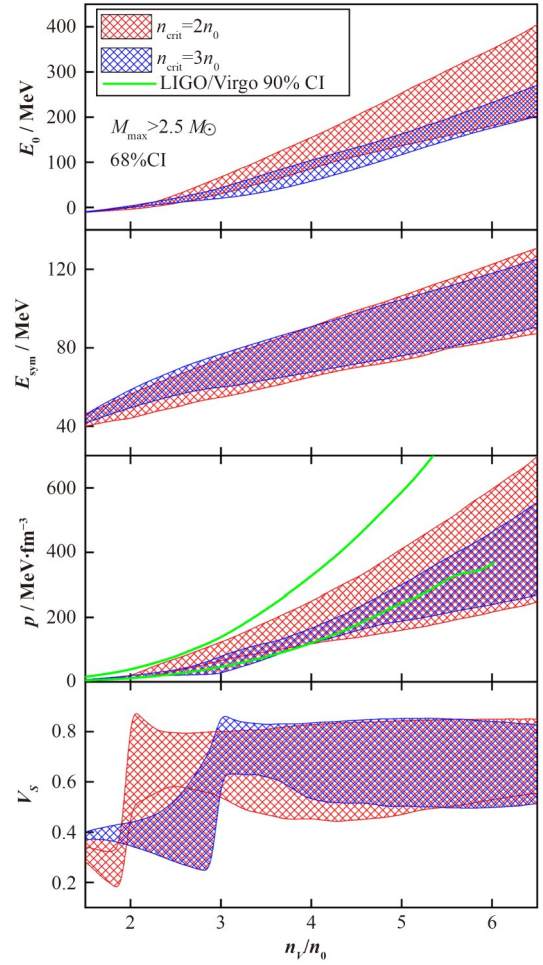


图6 在68%可信水平下,采用 $n_{\text{crit}}=2n_0$ (红色区域)和 $n_{\text{crit}}=3n_0$ (蓝色区域),对称核物质中每核子能量 E_0 、对称能 E_{sym} 、压强 p 和声速 v_s 的后验概率分布函数作为密度 n_r/n_0 的函数(彩图见网络版)

Fig.6 Posterior probability distribution functions of the energy per nucleon in symmetry nuclear matter E_0 , the nuclear symmetry energy E_{sym} , pressure p and the speed of sound v_s as functions of the reduced density n_r/n_0 at 68% credible level using $n_{\text{crit}}=2n_0$ (red region) and $n_{\text{crit}}=3n_0$ (blue region) (color online)

3 结语

本研究对核物质EOS进行了约束,并在RMF框架下探讨了中子星的结构特性,同时结合贝叶斯推断来协调理论预测与天体物理观测。通过分析密度依赖的耦合常数及其对EOS刚性的影响,本研究揭示了临界密度选择(例如, $n_{\text{crit}}=2n_0$ 对比 $n_{\text{crit}}=3n_0$)对中心能量密度和潮汐变形能力有显著影响,临界密度越高,在中等密度下会导致EOS行为越软。研究结果表明,在大质量中子星核心,声速平方超过共形极限($v_s^2 > 1/3$)的可能性很高。此外,在施加最大中子星质量约束($M_{\text{max}} \geq 2.5 M_{\odot}$)的情况下,我们发现仍有很大的参数空间满足所有天体物理约束。这与GW190814等引力波事件的解释相一致,在这些事

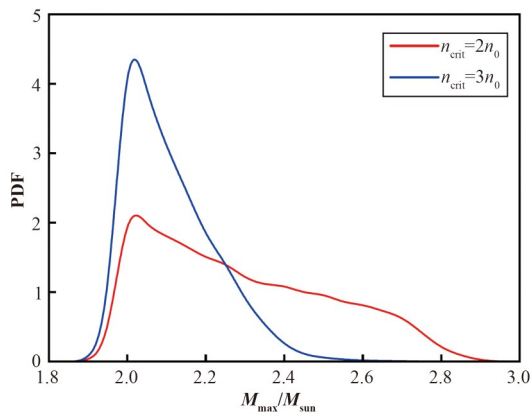


图7 中子星最大质量的后验概率分布函数

Fig.7 Posterior probability distribution functions of the maximum masses of neutron stars

件中,大质量伴星可能是中子星。这些发现凸显了EOS刚性、相变和观测约束之间的相互作用,为未来通过多信使数据和先进的密度泛函分析来完善核物质特性的研究提供了关键见解。

作者贡献声明 谢文杰负责具体计算和文章撰写;夏铨君负责提供研究思路和文章撰写。

参考文献

- He W B, Li Q F, Ma Y G, *et al.* Machine learning in nuclear physics at low and intermediate energies[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2023, **66** (8): 282001. DOI: 10.1007/s11433-023-2116-0.
- Zhou J, Xu J. Bayesian inference of neutron-skin thickness and neutron-star observables based on effective nuclear interactions[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2024, **67**(8): 282011. DOI: 10.1007/s11433-024-2406-4.
- Ma Y G, Pang L G, Wang R, *et al.* Phase transition study meets machine learning[J]. Chinese Physics Letters, 2023, **40**(12): 122101. DOI: 10.1088/0256-307X/40/12/122101.
- Pang L G, Wang X N. Bayesian analysis of nuclear equation of state at high baryon density[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(12): 194. DOI: 10.1007/s41365-023-01345-6.
- He W B, Ma Y G, Pang L G, *et al.* High-energy nuclear physics meets machine learning[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(6): 88. DOI: 10.1007/s41365-023-01233-z.
- 李甫鹏, 庞龙刚, 王新年. 基于机器学习的重离子碰撞中QCD相变的研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040014. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040014.
- 高泽鹏, 李庆峰. 利用机器学习方法对几个核物理问题的深入研究[J]. 核技术, 2023, **46**(8): 080009. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.080009.
- Huth S, Pang P T H, Tews I, *et al.* Constraining neutron-star matter with microscopic and macroscopic collisions [J]. Nature, 2022, **606**: 276 – 280. DOI: 10.1038/s41586-022-04750-w.
- Xia C J, Maruyama T, Yasutake N, *et al.* Systematic study on the quark-hadron mixed phase in compact stars[J]. Physical Review D, 2020, **102**: 023031. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.023031.
- Fraga E S, Kurkela A, Vuorinen A. Interacting quark matter equation of state for compact stars[J]. The Astrophysics Journal, 2014, **781**(2): L25. DOI: 10.1088/2041-8205/781/2/L25.
- Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, *et al.* A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay[J]. Nature, 2010, **467**: 1081 – 1083. DOI: 10.1038/nature09466.
- Antoniadis J, Freire P C C, Wex N, *et al.* A massive pulsar in a compact relativistic binary[J]. Science, 2013, **340**: 1233232. DOI: 10.1126/science.1233232.
- Abbott B P, Abbott R, Abbott T, *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations). Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state[J]. Physical Review Letters, 2018, **121**(16): 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101.
- Riley T E, Watts A L, Bogdanov S, *et al.* A NICER view of PSR J0030+0451: Millisecond pulsar parameter estimation[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2019, **887** (1): L21. DOI: 10.3847/2041-8213/ab481c.
- Riley T E, Watts A L, Ray P S, *et al.* A NICER view of the massive pulsar PSR J0740+6620 informed by radio timing and XMM-newton spectroscopy[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2021, **918**(2): L27. DOI: 10.3847/2041-8213/ac0a81.
- Miller M C, Lamb F K, Dittmann A J, *et al.* PSR J0030+

- 0451 mass and radius from NICER data and implications for the properties of neutron star matter[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2019, **887**(1): L24. DOI: 10.3847/2041-8213/ab50c5.
- 17 Miller M C, Lamb F K, Dittmann A J, *et al.* The radius of PSR j0740+6620 from NICER and XMM-newton data[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2021, **918**(2): L28. DOI: 10.3847/2041-8213/ac089b.
- 18 Choudhury D, Salmi T, Vinciguerra S, *et al.* A NICER view of the nearest and brightest millisecond pulsar: PSR j0437-4715[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2024, **971**(1): L20. DOI: 10.3847/2041-8213/ad5a6f
- 19 Xia C J, Xie W J, Bakhiet M. Astrophysical constraints on nuclear eoss and coupling constants in relativistic-mean-field models[J]. Physical Review D, 2024, **110**: 114009. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.114009.
- 20 Zhu J P, Wu S, Qin Y, *et al.* Population properties of gravitational-wave neutron star-black hole mergers[J]. The Astrophysics Journal, 2022, **928**(2): 167. DOI: 10.3847/1538-4357/ac540c.
- 21 Yang Y, Gayathri V, Bartos I, *et al.* Black hole formation in the lower mass gap through mergers and accretion in agn disks[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2020, **901**(2): L34. DOI: 10.3847/2041-8213/abb940.
- 22 Meng J, ed. Relativistic density functional for nuclear structure[M]. Volume 10 of International Review of Nuclear Physics. World Scientific Pub Co Pte Lt, 2016.
- 23 Meng J, Toki H, Zhou S, *et al.* Relativistic continuum hartree bogoliubov theory for ground-state properties of exotic nuclei[J]. Progress in Particle and Nuclear Physics, 2006, **57**(2): 470 – 563. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2005.06.001.
- 24 Long W H, Sun B Y, Hagino K, *et al.* Hyperon effects in covariant density functional theory and recent astrophysical observations[J]. Physical Review C, 2012, **85**: 025806. DOI: 10.1103/PhysRevC.85.025806.
- 25 Nikolaus B A, Hoch T, Madland D G. Nuclear ground state properties in a relativistic point coupling model[J]. Physical Review C, 1992, **46**: 1757 – 1781. DOI: 10.1103/PhysRevC.46.1757.
- 26 Long W H, Meng J, Giai N V, *et al.* New effective interactions in relativistic mean field theory with nonlinear terms and density-dependent meson-nucleon coupling[J]. Physical Review C, 2004, **69**: 034319. DOI: 10.1103/PhysRevC.69.034319.
- 27 Typel S, Wolter H. Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling[J]. Nuclear Physics A, 1999, **656**: 331 – 364. DOI: 10.1016/S0375-9474(99)00310-3.
- 28 Lalazissis G A, König J, Ring P. New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory[J]. Physical Review C, 1997, **55**: 540 – 543. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.540.
- 29 Sugahara Y, Toki H. Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear σ and ω terms[J]. Nuclear Physics A, 1994, **579**: 557 – 572. DOI: 10.1016/0375-9474(94)90923-7.
- 30 Wei B, Zhao Q, Wang Z H, *et al.* Novel relativistic mean field Lagrangian guided by pseudo-spin symmetry restoration[J]. Chinese Physics C, 2020, **44**(7): 074107. DOI: 10.1088/1674-1137/44/7/074107.
- 31 Taninah A, Agbemava S, Afanasjev A, *et al.* Parametric correlations in energy density functionals[J]. Physics Letters B, 2020, **800**: 135065. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.135065.
- 32 Lalazissis G A, Nikšić T, Vretenar D, *et al.* New relativistic mean-field interaction with density-dependent meson-nucleon couplings[J]. Physical Review C, 2005, **71**: 024312. DOI: 10.1103/PhysRevC.71.024312.
- 33 Typel S, Alvear Terrero D. Parametrisations of relativistic energy density functionals with tensor couplings[J]. The European Physical Journal A, 2020, **56**(6): 160. DOI: 10.1140/epja/s10050-020-00172-2.
- 34 Centelles M, Roca-Maza X, Viñas X, *et al.* Nuclear symmetry energy probed by neutron skin thickness of nuclei[J]. Physical Review Letters, 2009, **102**: 122502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.122502.
- 35 PREX Collaboration. An accurate determination of the neutron skin thickness of ^{208}Pb through parity-violation in electron scattering[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**: 172502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.172502.
- 36 CREX Collaboration. Precision determination of the neutral weak form factor of ^{48}Ca [J]. Physical Review Letters, 2022, **129**: 042501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.042501.
- 37 Xia C J, Maruyama T, Li A, *et al.* Unified neutron star EOSs and neutron star structures in RMF models[J]. Communications in Theoretical Physics, 2022, **74**(9): 095303. DOI: 10.1088/1572-9494/ac71fd.
- 38 Tolman R C. Effect of imhomogeneity on cosmological models[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1934, **20**: 169 – 176. DOI: 10.1073/pnas.20.3.169.

- 39 Oppenheimer J R, Volkoff G M. On massive neutron cores [J]. Physical Review, 1939, **55**: 374 – 381. DOI: 10.1103/PhysRev.55.374.
- 40 Fattoyev F J, Carvajal J, Newton W G, *et al.* Constraining the high-density behavior of the nuclear symmetry energy with the tidal polarizability of neutron stars[J]. Physical Review C, 2013, **87**: 015806. DOI: 10.1103/PhysRevC.87.015806.
- 41 Malik T, Alam N, Fortin M, *et al.* GW170817: Constraining the nuclear matter equation of state from the neutron star tidal deformability[J]. Physical Review C, 2018, **98**: 035804. DOI: 10.1103/PhysRevC.98.035804.
- 42 Hinderer T, Lackey B D, Lang R N, *et al.* Tidal deformability of neutron stars with realistic equations of state and their gravitational wave signatures in binary inspiral[J]. Physical Review D, 2010, **81**: 123016. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.123016.
- 43 De S, Finstad D, Lattimer J M, *et al.* Tidal deformabilities and radii of neutron stars from the observation of GW170817[J]. Physical Review Letters, 2018, **121**(9): 091102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.091102.
- 44 Lattimer J, Steiner A. Constraints on the symmetry energy using the mass-radius relation of neutron stars[J]. The European Physical Journal A, 2014, **50**(2): 40. DOI: 10.1140/epja/i2014-14040-y.
- 45 Fonseca E, Cromartie H T, Pennucci T T, *et al.* Refined mass and geometric measurements of the high-mass PSR J0740+6620[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2021, **915**(1): L12. DOI: 10.3847/2041-8213/ac03b8.
- 46 Doroshenko V, Suleimanov V, Pühlhofer G, *et al.* A strangely light neutron star within a supernova remnant [J]. Nature Astronomy, 2022, **6**: 1444 – 1451. DOI: 10.1038/s41550-022-01800-1.
- 47 Xie W J, Li B A. Bayesian inference of high-density nuclear symmetry energy from radii of canonical neutron stars[J]. The Astrophysics Journal, 2019, **883**(2): 174. DOI: 10.3847/1538-4357/ab3f37.
- 48 Xie W J, Li B A. Bayesian inference of the symmetry energy of superdense neutron-rich matter from future radius measurements of massive neutron stars[J]. The Astrophysics Journal, 2020, **899**(1): 4. DOI: 10.3847/1538-4357/aba271.
- 49 Xie W J, Ma Z W, Guo J H. Bayesian inference of the crust-core transition density *via* the neutron-star radius and neutron-skin thickness data[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(6): 91. DOI: 10.1007/s41365-023-01239-7.
- 50 Bedaque P, Steiner A W. Sound velocity bound and neutron stars[J]. Physical Review Letters, 2015, **114**: 031103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.031103.
- 51 LIGO Scientific and Virgo Collaborations. GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object[J]. The Astrophysics Journal Letters, 2020, **896**(2): L44. DOI: 10.3847/2041-8213/ab960f.