水力压裂模型的改进及其算法更新研究（上）*

李　哲[1]　杨兆中[2]　李小刚[2]
（1.大港油田集团公司钻采院　2.西南石油学院）

李哲等.水力压裂模型的改进及其算法更新研究（上）.天然气工业,2005;25(1):88～92

摘　要　水力压裂中适时预测裂缝几何形态对压裂施工的成败至关重要,文章(上篇)在拟三维的假设条件下,重新推导和改进了权威的拟三维Palmer模型。文章改进的重点是裂缝高度控制的处理,这是三维模型与二维模型最本质的差异,高度控制直接决定着模型刻划实际的精确度。原Palmer模型使用Rice静态应力强度因子积分公式作为裂缝垂向延伸的判据,这实际上是不准确的,因为施工过程中裂缝在各个方向上都是不断延伸的,裂缝壁面也始终是动态受载,在这种情况下,采用动态应力强度因子更为合理。文章引入了在真三维模型中才使用的动态应力强度因子公式来替代原来的静态公式作裂缝延伸的判据,并且把缝高与缝宽方程融合起来,巧妙地求出缝高,避免了真三维求缝高极其复杂的处理方法。实现拟三维模型向真三维模型的横向渗透,使新模型兼具拟三维模型的简单和真三维模型的精确。

主题词　水力压裂　三维模型　二维模型　研究

笔者以拟三维Palmer模型为基础,利用线弹性断裂力学和数理方程知识,在拟三维的假设条件下,改进Palmer模型,与原模型相比,改进后的模型最重要的特点就是废弃了静态应力强度因子求缝高的老办法,引入真三维模型才使用的动态应力强度因子公式,从而使模型在力学理论上更接近于施工时裂缝动态延伸的事实。为便于理解,论文以对称裂缝为研究重点,非对称裂缝的模型与求解与之类似,论文只做简单介绍。

一、假设条件

在推导拟三维模型的过程中,我们做如下假设:①油气层及其周围地层是均质、各向同性的连续线弹性体;②产层中的最小地应力小于上下遮挡层中的最小地应力;③上下遮挡层中的最小地应力相等,形成的裂缝关于产层中心对称;④裂缝为狭长形,裂缝在垂直方向上的延伸速度小于在长度方向上的延伸速度;⑤地面施工排量不随时间变化。

二、裂缝中流体流动的连续性方程

根据流量平衡原理,建立裂缝流体流动的连续性方程如下:

$$-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}=\lambda(x,t)+\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

式中:$\lambda(x,t)$为单位裂缝长度上压裂液的滤失速度,根据目前成熟的理论考虑选用卡特滤失模型:

$$\lambda(x,t)=\frac{2[h_u(x,t)+h_l(x,t)]c(x,t)}{\sqrt{t-\tau(x)}} \tag{2}$$

$A(x,t)$为t时刻缝中x处裂缝的横截面积,

$$A(x,t)=\int_{-h_l}^{h_u}W(x,z,t)\mathrm{d}z$$

三、裂缝中流体流动的压降方程

借用幂律型流体在两平行板缝中流动的压降方程,结合Lamb的椭圆管流理论,我们就可得出裂缝内流体流动的压降方程:

$$\frac{\mathrm{d}p(x,t)}{\mathrm{d}x}=-2^{n+1}\left[\frac{(2n+1)q(x,t)}{n\varphi(n)h(x,t)}\right]^n\frac{K}{[W(x,0,t)]^{2n+1}} \tag{3}$$

$$\varphi(n)=\int_{-0.5}^{0.5}\left(\frac{W(x,y,t)}{W(x,0,t)}\right)^m\mathrm{d}\left(\frac{z}{h(x,t)}\right)$$

$$m=\frac{2n+1}{n}$$

对于普通酸压和水压,都可将其压裂液视为牛

* 本文系四川省应用基础研究计划项目(编号:03JY029－019－1)。

作者简介:李哲,1977年生;2003年毕业于西南石油学院油气田开发工程专业,工学硕士;从事油气开发(压裂、钻井)方面的研究工作。地址:(300280)天津市大港油田集团公司钻采院。电话:(022)25925320。E-mail:zheli77@163.com

顿流体,裂缝的横截面为椭圆,则(3)经过简化可表达为:

$$\frac{\mathrm{d}p(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\frac{64}{\pi}\frac{q(x)\mu}{H(x)W^3(x,0,t)} \tag{4}$$

四、裂缝宽度方程

对于狭长裂缝,当用垂直截面把裂缝沿长度方向分成若干小段时,每一垂直剖面可以看作是一条平面应变的线裂纹,这些二维裂纹彼此独立,不受邻近截面影响。

上下遮挡层中的最小水平应力相等,裂纹中任一剖面上的裂纹形状都关于产层中心对称 。

裂缝中的净压力分布为:

$$p(y)=\begin{cases} p_f-S_1, & |y|<H_p/2 \\ p_f-S_2, & |y|>H_p/2 \end{cases} \tag{5}$$

England & Green 给出了对称应力分布模式下的宽度方程:

$$W(x,\eta,t)=\frac{4(1-v^2)h(x,t)}{\pi E}\int_\eta^l\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-\eta^2}}\int_0^u\frac{p(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{u^2-\tau^2}} \tag{6}$$

式中:$h(x,t)$为 t 时刻 x 处的裂缝高度,m;u,τ为积分变量。

$$\eta=\frac{y}{h(x,t)/2} \tag{7}$$

为了便于推导产层和上下遮挡层中的宽度分布公式,我们引入无因次坐标。

$$\eta'=\frac{H_p/2}{H(x,t)/2}=\frac{H_p}{H(x,t)} \tag{8}$$

将缝内净压力分布方程代入 England & Green 的宽度方程中,经过复杂的积分运算,得出穿层前后的缝宽分布方程:

穿层前,即 $y<H_p/2$,$\eta<\eta'$时:

$$W(x,\eta,t)=\frac{4(1-v^2)h(x,t)}{\pi E}\left\{\sqrt{1-\eta^2}\left[\frac{\pi}{2}(p_f-S_1)-(S_2-S_1)\arccos(\eta')\right]+(S_2-S_1)\left[\eta'\ln\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}+\sqrt{1-\eta'^2}}{\sqrt{\eta'^2-\eta^2}}\right)-\eta\ln\left(\frac{\eta'\sqrt{1-\eta^2}+\eta\sqrt{1-\eta'^2}}{\sqrt{\eta'^2-\eta^2}}\right)\right]\right\} \tag{9}$$

取 $y=0$,即 $\eta=0$ 时,可得缝中 x 处的最大裂缝宽度。

穿层后,即 $H_p/2<y<h(x,t)/2$,$\eta>\eta'$时:

$$W(x,\eta,t)=\frac{4(1-v^2)h(x,t)}{\pi E}\left\{\sqrt{1-\eta^2}\left[\frac{\pi}{2}(p_f-S_1)-(S_2-S_1)\arccos(\eta')\right]+(S_2-S_1)\left[\eta'\ln\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}+\sqrt{1-\eta'^2}}{\sqrt{\eta^2-\eta'^2}}\right)-\eta\ln\left(\frac{\eta'\sqrt{1-\eta^2}+\eta\sqrt{1-\eta'^2}}{\sqrt{\eta^2-\eta'^2}}\right)\right]\right\} \tag{10}$$

式中:S_1 为产层应力,MPa;S_2 为上、下遮挡层应力,MPa;H_p 为产层厚度,m;p_f 为缝内流压,MPa。

五、裂缝高度控制处理

裂缝的高度控制处理是三维模型与二维模型最本质的差异,也是最重要的思想,是模型改进的重点。

1.传统拟三维高度控制方程(静态应力强度因子)

根据断裂力学的分析,只有当裂缝顶端的应力强度因子 K_I 值达到某一个临界值 K_{IC} 时,裂缝才停止向前延伸。控制裂缝高度,实际上在于计算裂缝端部应力强度因子。在工程断裂力学中,不同条件下的应力强度因子公式成百上千(详见文献〔1、2〕),还分为静态和动态两类,每一种公式都有其最适用的条件。

传统的拟三维高度控制方程是利用 Rice 的应力强度因子积分公式:

$$K_I=\frac{1}{\sqrt{\pi h(x,t)}}\int_{-h(x,t)/2}^{h(x,t)/2}p(y)\frac{\sqrt{h(x,t)/2+y}}{\sqrt{h(x,t)/2-y}}\mathrm{d}y \tag{11}$$

根据裂缝穿层与否在$[-h(x,t),h(x,t)]$区间上实施分段积分。

上述所有由 Rice 积分公式(11)计算出来的应力强度因子表达式,都是在拟三维简化条件下的近似,它们本身都是静态应力强度因子公式,都隐含使用一个条件,即 $p_f\sim H(x)$瞬态效应:每一个流动压力 p_f,由式(11)即刻计算出一个裂缝高度 $H(x)$,实际上流动压力 p_f 可以瞬时传递,但相应的缝高的延伸是过程性的,流动压力达到 p'_f 时,至少要延迟一定时间(与裂缝尖端的延伸速度有关)才能让缝高达到其 $H(x)'$,拟三维模型主要为了简化运算,才直接采用静态应力强度因子公式计算裂缝动态扩展,而在真三维模型中,就严格考虑到了裂缝尖端的延伸速度,只不过由于其还考虑了其它拟三维简化了的条件(如缝高方向的流动压力变化、压裂液三维流动,裂缝三维扩展等),才导致计算极其复杂。裂缝的高度控制处理是二维模型和三维模型的最本质差

别，也是最重要的方程，如果能把这一拟三维模型的标志性方程换为真三维模型应力强度因子公式，同时充分开挖拟三维的简化假设条件，让这一真三维模型的方程在拟三维条件下得到简化求解，这样就会让模型在不增加多少复杂度的情况下，更符合实际，实现拟三维模型向真三维模型理论的横向渗透。

2.**引入的真三维动态应力强度因子公式**

在压裂施工过程中，缝内流动压力 p'_f 不断增加，裂缝缝壁始终动态受载，裂缝高度也是在不断上下延伸，在这种条件下，最适合的应力强度因子公式应该是选用动态表达公式，而不是如上所述之静态应力强度因子公式。真三维模型中用作裂缝扩展判据的断裂准则所应用的扩展点处的动态应力强度因子公式如下：

$$K_I = \frac{G}{2(1-v)}\left[\frac{2\pi}{\alpha(s)}\right]^{0.5} W_\alpha(x,y) \qquad (12)$$

式中：G 为岩石的剪切模量，MPa^{-1}；v 为岩石的泊松比，无因次；α 为距裂缝前缘的微小距离，m；$W_\alpha(x,y)$距裂缝尖端距离为 a 处的裂缝宽度，m。

注意：方程(12)并不直接含有裂缝的高度 $H(x)$，只含有距裂缝前缘的微小距离 α 和前缘缝宽 $W_\alpha(x,y)$，虽有微小距离量，但绝对构不成微分形式，这是动态应力强度因子公式最明显的特征。不含缝高参量，使我们不能直接把该方程与其余模型方程联立求解，实际上大大增加了求缝高的难度。

真三维模型中的裂缝延伸判定准则为：扩展点处的应力强度因子 K_I 保持为近似等于临界应力强度因子 K_{IC}。在 $K_I=K_{IC}$ 时，对特定岩层，v 和 G 为定值，尖端附近的裂缝宽度 $W_\alpha(x,y)$越大，稳定时距裂缝的尖端 $\alpha(s)$就越远，也即裂缝在向上(向前)延伸。而尖端附近缝宽 $W_\alpha(x,y)$，由前面裂缝宽度方程(6)可知是由缝内液体净压力 p 直接决定的。缝内净压力越大，缝宽就越大，缝宽的增大，就导致裂缝的前缘继续延伸。这表明压力直接控制缝宽，缝宽直接控制缝端延伸，等价于缝内净压力间接控制裂缝的前缘延伸，缝内净压力和缝高延伸具有相同的单调性。

方程(12)中 $\alpha(s)$仅是距裂缝前缘的微小距离(在拟三维模型中为距其剖面裂纹尖端的距离)，与裂缝的整个缝高没有关系，这实际表明岩石的断裂韧性对裂缝尖端区的影响/控制很强，而对远离尖端区，其对剖面裂纹的形态影响就比较弱。

3.**传统的真三维高度控制处理**

应力强度因子公式(12)，只是计算缝端附近的形状，与整个裂缝高度根本不挂边，有的只是距缝端的微小距离 $\alpha(s)$，和该处的缝宽 W_α，而且还化不到微分形式，如何能求出整个缝高？

真三维模型对此的处理是这样的：根据应力强度因子的大小来估算裂缝的扩展速度，利用有限元方法，逐步计算裂缝前缘的扩展位置，从而使应力强度因子近似等于临界值 K_{IC}，从理论上讲，裂缝端部上任一点的扩展速度 u 的取值要保证该点的应力强度因子等于临界应力强度因子。因为在计算新的应力强度因子之前，裂缝必然已经扩展了一段距离，所以 u 值只能通过判断收敛的迭代求解，不同位置点的扩展速度 u 又是不相同的，就导致这样的迭代是相当地复杂和费时间，何况还有限元法本身的复杂和迭代。真三维模型本身的复杂性，很大程度上就是由缝高的如上处理导致的，真三维模型要从岩石三维变形和流体三维流动出发来建立裂缝控制方程，并要反映原始底层的真实情况。虽然其模型早已建立，但目前对该模型的求解还是国际难题。已知的国外真三维模拟软件，仍然要对地层做适当假设，以简化数值模拟。

4.**新的缝高控制处理**

对于应力强度因子公式(12)，并不真正含有缝高参数，而真三维的处理办法显然不便在这里使用。由前面的讨论可知，“岩石的断裂韧性对裂缝尖端附近影响控制较强，而对远离裂缝尖端区的部分，断裂韧性的影响就大大削弱”，结合拟三维假设条件：“缝内净压力分布不随裂缝高度变化”，及其隐含条件“流压一缝高瞬时稳定，忽略实际上的延迟效应”。

另外，注意到式(12)可计算裂缝尖端附近的缝宽，而前面的 England & Green 公式(6)又能计算整个裂缝高度上的缝宽。

在拟三维模型中，可以沿整个缝长划分出一系列垂直剖面，每一剖面上的裂纹可看成平面应变问题中的一条二维线裂纹，用这些依次排列的剖面裂纹来模拟整个裂缝几何形态。依据这一思想，在拟三维模型中，我们不必考虑倾斜方向上的裂缝延伸，而只考虑垂向缝高延伸。也即在动态应力强度因子公式(12)中，只考虑 $\alpha(s)$为距裂缝尖端垂向上的微小距离，而此时 $W_\alpha(x,Y)$则为该微距离处的缝宽 W_α。

据此，可以按如下办法简化计算出某净压下的裂缝高度：

将式(12)取临界值，即，$K_I = K_{IC}$，则

$$W_\alpha = \frac{2K_{IC}(1-v)}{G}\left[\frac{\alpha(s)}{2\pi}\right]^{0.5} = k\sqrt{\alpha(s)} \quad (13)$$

$$k = \frac{2K_{IC}(1-v)}{G\sqrt{2\pi}}$$

假设距缝端的微小距离为 $\alpha(s) = b$(此处暂称结合点)。由式(13)计算出 $\alpha(s) = b$ 处的裂缝宽度 W_b。

设在某一缝内净压力 p_{net} 作用下，裂缝达到稳定时的总缝高为和 $H(x,t)$，则结合点的。

$$\eta = \frac{H(x,t)/2 - b_0}{H(x,t)/2} = \frac{H(x,t) - 2b_0}{H(x,t)} \quad (14)$$

$$\eta' = \frac{H_p}{H(x)}$$

记得前面裂缝宽度控制的 Englang & Green 公式(6)，用式(13)计算的结合点的缝宽一定要等于用式(6)双重积分计算的缝宽，即：

$$W_b = f[x, H(x,t), p(x), \eta, \eta']$$

$$= f[x, H(x,t), b] = \frac{2K_{IC}(1-v)\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} \quad (15)$$

其中裂缝穿层前，$f(x, H(x,t), p(x), \eta, \eta')$取式(9)；裂缝穿层后，取式(10)。该方程的 $p(x)$由压降方程决定，是方程组的联立求解，模型6个超越方程组成的方程组的新型求解方法，将放在下篇专门研究，这里为了便于理解裂缝高度的处理，暂时把它视为一个常量，这并不影响后面联立方程组的求解。

x 实为隐含参数，在此等式中并不出现，b 是假设或靠经验获取的已知值，除裂缝高度 $H(x,t)$外，其它参数都是与储层物性或储层条件直接决定的已知量。对这一超越型方程利用迭代法，很容易求得裂缝总高度 $H(x,t)$，$H(x,t)$求出后，就可利用式(9)或式(10)求得所有非缝端区的沿裂缝高度的缝宽，而对缝端区，就直接采用应力强度因子公式(13)通过逐步减小 $\alpha(s)$至零，来求出缝端附近的缝宽。

b 值的选择：从原则上讲，b 值在一个较小范围取任意值都行，实际上当 b 取值太小时，由式(13)计算出的 W_α(毫米级都不到，而 W_α 采用的是国标单位米)很小，计算机字长有限，由其舍入误差带来的负面影响就不能忽略，当 $b>1.5$ 时，一般裂缝尖端控制的削弱就能对缝高计算产生不容忽略的误差。一般岩层推荐采用 $b=0.5$。一般来说，b 值的选择范围与岩石的断裂韧性本身相关，但由于微端距离的限制，一般都在0.5附近波动。

当然，如果你嫌采用动态应力强度因子计算过于麻烦，可以采用传统方法，使用由 Rice 静态应力强度因子积分公式，此时方程式中直接含有缝高 $H(x)$，联立方程组求解即可。论文中提出的运用动态应力强度因子公式方法，仅是对传统拟三维模型的一种改进尝试，以真三维为背景，使模型更符合工程实际，而又不增加太多的复杂度。

5.**模型方程组的边界条件和初始条件**

模型方程组的压降方程和连续性方程都是微分形式，它们的边界条件和初始条件分别是：

压降方程边界条件：

$$p(x,t)\mid_{x=0} = p_0(t) \quad (16)$$

连续方程的边界条件和初始条件：

$$q(x,t)\mid_{x=0} = q_0 = Q/2 \quad (17)$$

$$A(x,t)\mid_{t=0} = 0 \Longrightarrow H(x,t)\mid_{t=0} = 0 \quad (18)$$

6.**非对称裂缝的处理**

上述模型以对称裂缝为蓝本，是为了便于随后的算法理解，对非对称裂缝，(如 $S_1 \neq S_2 \neq S_3$，$E_1 \neq E_2 \neq E_3$)，只要对上述模型做一点修改就行，主要是当 $S_1 \neq S_2 \neq S_3$ 时，利用奇偶应力分解的手段，将缝宽积分方程式中的有效应力替换掉就行，具体替换见参考文献[3、5、6、7、8]。

使用传统的静态应力强度因子时，因为它含有裂缝高度参数，只需要在积分时考虑到对不同层段应采用不同净力表达式进行分段积分就行。使用改进的动态应力强度因子式时，因为它只用裂缝的微端距离，与整体缝高暂无关，它的缝高计算融于缝宽方程之中，因此只需要在缝端的缝宽计算中考虑不同应力即可。

7.**裂缝端部分析**

式(12)的应力强度因子公式，形式非常特殊($\alpha(s)$为距裂缝前缘的微小距离)，它与具体的缝高无关，而只决定裂缝尖端附近的形状。由于对特定材料，其断裂韧性 K_{IC} 基本是常量，由裂缝稳定时尖端附近的 $K_I \approx K_{IC}$，可以推知，对同种岩石，不管其内净压力多大，产生的裂缝有多高，缝宽有多大(当然至少要 $W_{max} > W_\alpha(x,y)$)，水力压裂裂缝尖端附近的形状都是基本相同的，这表明岩石的断裂韧性对裂缝尖端附近的影响很大，而在远离尖端区的地方，断裂韧性的影响就会被大大削弱，而根据拟三维模型的假设条件，裂缝内的净压沿缝高方向的变化可以

忽略，则基本可以推断出对于缝高较高的水力压裂裂缝，除其上下尖端附近因受岩石断裂韧性影响大而使其缝宽变化剧烈外，裂缝中部的大部分区域，其缝宽变化基本上都是很平缓的，甚至可以看作缝宽不再变化。这是二维压裂模型——PKN 模型和 CGK 模型的裂缝截面假设成立的理论基础：PKN 模型的裂缝截面假设为椭圆型，但这个椭圆非同一般，它的长短轴长度之比可达 1000 以上（最大缝宽一般不到 1.5 cm，而缝高起码也有一二十米），一般来说，当一个椭圆的长短轴之比达到 100 以上时，其椭圆形状之扁，是足以把沿长轴方向的椭圆中部相当远部分视为两条平行线，只是由于岩石断裂韧性的影响，到长轴两端部的缝宽才急剧变小。而 CGK 模型，众所周知其裂缝垂向断裂剖面就直接假设为矩形，忽略了端部缝宽紧缩效应。实际的裂缝，其缝端部分既不会是柔曲的椭圆状，更不会是硬邦邦的直角矩形，而是尖锐状（断裂力学上叫尖端奇异性）。对裂缝端部的椭圆和矩形假设，也是 PKN 和 CGK 模型误差的一个重要来源（当然对缝高的恒定假设，也是其误差重要来源之一）。

六、结束语

方程(1)、(2)、(4)、(9)/(10)、(15)就构成了改进后的水力压裂模型方程组。可以看出，不管是原 Palmer 模型还是改进后的模型，其方程组都是由隐含型、超越性的微分方程组成，这在数学求解上甚为困难。论文下篇将从方程组的潜在特点着手，以独特的思维，调用尽可能的数学手段，寻找到一个简化、加速的模型求解方法，并堵塞原算法在数学理论上的一些漏洞。

参 考 文 献

1 中国航空研究院主编．应力强度因子手册．北京：科学出版社，1981

2 袁懋昶．断裂力学理论及其工程应用．重庆：重庆大学出版社，1989

3 王鸿勋，张士诚编著．水力压裂设计数值计算方法．北京：石油工业出版社，1998

4 Advani S H，Khattab H，Lee J K．Hydraulic fracture geometry modeling prediction and comparison．SPE 13863

5 Palmer I D．Three dimension hydraulic fracture propagation in presence of stress variation．SPE/DOE 10849

6 Palmer I D．Numerical solution for height and elongated hydraulic fractures．SPE/DOE 11627

7 Palmer I D，Luiskutty C T．A model of the hydraulic fracturing process for elongated vertical fractures and comparisons of results with other models．SPE/DOE 13864

（收稿日期 2004-08-23 编辑 钟水清）