Bowen 估计熵的变分原理

钟兴富¹, 陈志景^{2*}

1. 广东外语外贸大学数学与统计学院, 广州 510006;

2. 广东技术师范大学数学与系统科学学院, 广州 510665

E-mail: xfzhong@gdufs.edu.cn, chzhjing@mail2.sysu.edu.cn

收稿日期: 2019-12-07; 接受日期: 2020-02-22; 网络出版日期: 2020-04-03; * 通信作者

国家自然科学基金(批准号: 11771459, 11701584 和 11871228)、广东外语外贸大学研究基金(批准号: 299-X5218165 和 299-X5219222) 和广东省普通高校特色创新类项目(批准号: 2018KTSCX122) 资助项目

摘要 设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 其中 X 是紧致度量空间, f 是 X 上的连续自映射. 本文对 (X, f) 引入 Bowen 估计熵, 给出了 Bowen 估计熵的 Billingsley 定理和变分原理.

关键词 拓扑熵 估计熵 Billingsley 定理 变分原理

MSC (2020) 主题分类 37B40, 37A35

1 引言

Adler 等^[1] 于 1965 年引入了拓扑熵. 拓扑熵描述的是动力系统轨道的指数增长率, 反映了系统的复杂性程度. 随后, Dinaburg^[2] 和 Bowen^[3] 使用张成集和分离集的方法给出了拓扑熵的一个等价定义. 在网络控制系统中, 系统的通信能力决定了系统是否能完成相应的任务(参见文献[4]). 近 30 多年来, 人们围绕不同的控制目的设计了各种网络控制系统. 2004 年, Nair 等^[5] 通过借助拓扑熵的想法引入了拓扑反馈熵, 并通过拓扑反馈熵从内部确定了一个系统完成不变性任务时需要的最小数据率. 2009 年, Colonius 和 Kawan^[6] 通过生成集的方法引入了不变熵, 且 Colonius 等^[7] 于 2013 年证明了拓扑反馈熵和不变熵等价. 在通信能力受限时, 网络系统通过信道把状态传递给估计器, 估计器通过接收到的信息对当前状态进行估计. 状态估计的可行性对很多控制任务有着重要的影响. 2006 年, Savkin^[8] 用系统的拓扑熵刻画了系统完成能观性需要的信道容量. 2018 年, Liberzon 和 Mitra^[9] 为了更加精细地区分系统轨道, 引入了估计熵, 给出了系统能完成状态估计任务的充分条件. 同年, Kawan^[10] 给出了一般系统的估计熵的定义并给出了一类系统估计熵的下界. 2019 年, Zhong^[11] 研究了自由半群的估计熵. 估计熵的定义综合了经典拓扑熵和指数稳定^[12] 的特点, 即给拓扑熵的定义中的误差加入一个指数衰减因子(见定义 2.1).

英文引用格式: Zhong X F, Chen Z J. A variational principle for Bowen estimation entropy (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1213–1224, doi: 10.1360/SSM-2019-0296

在拓扑动力系统中, 人们对拓扑熵进行了深入的研究. Bowen^[13] 用类似于 Hausdorff 维数的方法引入了一种维数熵 (后来被称为 Bowen 拓扑熵). 随后, Pesin 和 Pitskel^[14] 进一步研究了这种熵. 变分原理揭示了拓扑熵和测度熵的关系. 这也激励着人们寻求其他熵的变分原理. 2008 年, Ma 和 Wen^[15] 给出了 Bowen 拓扑熵的 Billingsley 定理, 研究了 Bowen 拓扑熵和局部测度熵的关系. 2012 年, Feng 和 Huang 在文献 [16] 中给出了 Bowen 拓扑熵的变分原理并且引入了填充 (packing) 拓扑熵, 同时给出了填充拓扑熵的变分原理. 2014 年, Kong 和 Chen^[17] 给出了慢熵的变分原理. 2015 年, Tang 等^[18] 给出了 Bowen 拓扑压的变分原理. 2018 年, Xu 和 Zhou^[19] 给出了非自治动力系统 Bowen 拓扑熵的变分原理. 另一方面, Huang 和 Zhong^[20] 在 2018 年引入了 Bowen 不变熵, 证明了 Bowen 不变熵和不变熵在一定条件下等价. 随后 Zhong 和 Huang^[21] 进一步研究了不变熵. 2019 年, Wang 等^[22] 在一定条件的限制下给出了不变熵的变分原理. 同年, Zhong^[23] 给出了不变压的变分原理.

经典拓扑熵是估计熵的一种特殊情形, 研究表明它们有着很多相似之处, 但也有不同的特性. 本文的目的在于研究 Bowen 估计熵, 一方面, 给出了估计熵的下界, 另一方面, 给出了 Bowen 估计熵的变分原理.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节回顾估计熵的定义, 给出 Bowen 估计熵的概念, 得到一些基本性质和 Bowen 估计熵的 Billingsley 定理 (见定理 2.1). 第 3 节给出 Bowen 估计熵的变分原理 (见定理 3.1).

2 估计熵

设 (X, f) 是一个拓扑动力系统, 其中 X 是紧致度量空间, 其上度量记为 d , f 是 X 的连续自映射. 设 $\mathbb{N}$ 为自然数集. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \geq 0$, 定义 $d_n^\alpha(x, y)$ 为

$$d_n^\alpha(x, y) = \max_{0 \leq i < n} e^{\alpha i} d(f^i(x), f^i(y)).$$

易知, d_n^α 是 X 上的一个由 d 诱导的新的度量. 称 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) = \{y \in X : d_n^\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ 为圆心在 x 、半径为 ε 的 α -球.

设 $K \subset X$ 为紧致子集, $\alpha \geq 0, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, 称 $F \subset K$ 为 $(n, \varepsilon, \alpha, K)$ -生成集, 如果对任意的 $x \in K$ 存在 $y \in F$ 使得 $d_n^\alpha(x, y) < \varepsilon$. 设 $s_{\text{est}}(n, \varepsilon, \alpha, K)$ 表示 $(n, \varepsilon, \alpha, K)$ -生成集的最小基数. 称 $E \subset K$ 为 $(n, \varepsilon, \alpha, K)$ -分离集, 如果对任意的不同两点 $x, y \in E$ 存在 $i \in [0, n)$ 使得 $d_i^\alpha(x, y) \geq \varepsilon$. 设 $n_{\text{est}}(n, \varepsilon, \alpha, K)$ 表示 $(n, \varepsilon, \alpha, K)$ -分离集的最大基数.

定义 2.1 称

$$\begin{aligned} h_{\text{est}}(\alpha, K, f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_{\text{est}}(n, \varepsilon, \alpha, K) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log n_{\text{est}}(n, \varepsilon, \alpha, K) \end{aligned}$$

为 K 的 α -估计熵.

注 2.1 α -估计熵依赖底空间 X 上的度量 d (参见文献 [10, 例 1]).

下面, 利用文献 [24] 中的 Carathéodory 结构理论 (参见文献 [24, 第 74 页]) 给出 α - 估计熵的维数刻画, 并给出 Bowen 估计熵的定义.

2.1 上容量估计熵

设 K 是 X 的紧致子集, $s, \alpha \geq 0, \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$. 令

$$R^\alpha(n, \varepsilon, s, K, f) = \inf \left\{ \sum_i e^{-sn} : K \subset \bigcup_i B_n^\alpha(x_i, \varepsilon) \right\},$$

其中, 下确界取遍由 $\{B_n^\alpha(x_i, \varepsilon)\}$ 构成的有限或可数集族. 令

$$R^\alpha(\varepsilon, s, K, f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} R^\alpha(n, \varepsilon, s, K, f).$$

易得, 存在唯一点 (记为 $R^\alpha(\varepsilon, K, f)$), 使得 $R^\alpha(\varepsilon, s, K, f)$ 从 $+\infty$ 跳跃到 0, 即

$$\begin{cases} R^\alpha(\varepsilon, s, K, f) = \infty, & s < R^\alpha(\varepsilon, K, f); \\ R^\alpha(\varepsilon, s, K, f) = 0, & s > R^\alpha(\varepsilon, K, f). \end{cases}$$

称

$$h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, K, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R^\alpha(\varepsilon, K, f)$$

为 K 的上容量 α - 估计熵.

由文献 [24, 定理 2.1 和 2.4], 有如下命题.

命题 2.1 (1) 如果 $Z_1 \subset Z_2 \subset X$, 则 $h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, Z_1, f) \leq h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, Z_2, f)$ (单调性);
(2) 设 $Z = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Z_i$, 其中 $Z_i \subset X$, 则 $h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, Z, f) = \max_{1 \leq i \leq n} h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, Z_i, f)$ (有限稳定性).
由文献 [24, 定理 2.2], 有如下命题.

命题 2.2 设紧致子集 $K \subset X$ 且 $\alpha \geq 0$, 则

$$h_{\text{est}}^{UC}(\alpha, K, f) = h_{\text{est}}(\alpha, K, f).$$

2.2 Bowen 估计熵

设 $Z \subset X$ 是一非空子集. 给定 $\alpha, s \geq 0, \varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$M^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f) = \inf \left\{ \sum_i e^{-sn_i} : Z \subset \bigcup_i B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon) \right\},$$

其中, 下确界取遍所有满足 $x_i \in X, n_i \geq n$ 的 $B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)$ 构成的有限或可数集族. 显然, $M^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f)$ 是关于 n 的增函数且是关于 ε 的减函数. 故下列极限存在:

$$M^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} M^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f).$$

易得, 存在唯一点 (记为 $M^\alpha(\varepsilon, Z, f)$) 使得 $M^\alpha(\varepsilon, s, Z, f)$ 从 $+\infty$ 跳到 0, 即,

$$\begin{cases} M^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = \infty, & s < M^\alpha(\varepsilon, Z, f); \\ M^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = 0, & s > M^\alpha(\varepsilon, Z, f). \end{cases}$$

称 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M^\alpha(\varepsilon, Z, f)$ 为 Z 的 Bowen α -估计熵. 显然地, $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \leq h_{\text{est}}^{\text{UC}}(\alpha, Z, f)$. 由文献 [24, 定理 1.1] 得如下命题.

命题 2.3 (1) $h_{\text{est}}^B(\alpha, , f) \geq 0$;
 (2) 如果 $Z_1 \subset Z_2 \subset X$, 则 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_1, f) \leq h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_2, f)$ (单调性);
 (3) 设 $Z = \bigcup_{i \geq 1} Z_i$, 其中 $Z_i \subset X, i = 1, 2, \dots$, 则 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = \sup_{i \geq 1} h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_i, f)$ (可数稳定性).

下面构造例子说明 Bowen α -估计熵小于上容量 α -估计熵. 为此, 需要介绍符号空间. 设 $I = \{0, 1, \dots, k-1\}$ 为有限集. Σ_k 表示 I 的幂空间, 其定义为

$$\Sigma_k = I^{\mathbb{N}_0} = \{x = (x_0, x_1, \dots) : \text{对任意的 } i \in \mathbb{N}_0, x_i \in I\}.$$

在 $I^{\mathbb{N}_0}$ 上定义距离:

$$d(x, y) = \frac{1}{m+1}, \quad \text{其中 } m = \min\{i : x_i \neq y_i\}.$$

定义 $\sigma : I^{\mathbb{N}_0} \rightarrow I^{\mathbb{N}_0}$ 为

$$x = (x_0, x_1, \dots) \mapsto \sigma(x) = (x_1, x_2, \dots).$$

称偶对 $(I^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$ 为全转移. 对任意的 $\omega \in I^n$, ω 的长度记为 $l(\omega) = n$. 称 $[\omega] = \{x \in I^{\mathbb{N}_0} : (x_0, \dots, x_{n-1}) = \omega\}$ 为 ω 的柱体.

例 2.1 存在 $Z \subset \Sigma_2$ 满足: 对任意的 $\alpha \geq 0$, 有 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) < h_{\text{est}}^{\text{UC}}(\alpha, Z, f)$.

证明 对 $k \geq 0$, 定义 $Z_k = \{x = (x_n) \in \Sigma_2 : x_n = 1, \forall n \geq k\}$. 记 $Z = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z_i$. 易得, 对任意的 $\alpha \geq 0$ 及 $k \geq 0$, $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_k, f) \leq h_{\text{est}}^{\text{UC}}(\alpha, Z_k, f) = 0$. 故由可数稳定性知, $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = 0$. 直接计算可得 $h_{\text{est}}^{\text{UC}}(0, Z, f) = \log 2$. 又 $h_{\text{est}}^{\text{UC}}(\alpha, Z, f) \geq h_{\text{est}}^{\text{UC}}(0, Z, f)$. 证明完毕. $\square$

注 2.2 例 2.1 来自文献 [24, 例 11.2].

受 Brin 和 Katok^[25] 定义局部熵的想法的启发, 下面给出局部估计熵的定义. 记 $\mathcal{M}(X)$ 为 X 上全体 Borel 概率测度组成的集合. 设 $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha \geq 0, x \in X$, 称

$$\underline{h}_\mu^\alpha(x, f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n}$$

为 x 的相对于 μ 的下局部 α -估计熵. 称

$$\underline{h}_\mu^\alpha(X, f) := \int_X \underline{h}_\mu^\alpha(x, f) d\mu(x)$$

为 X 相对于 μ 的测度下 α -估计熵.

定理 2.1 设 $\mu \in \mathcal{M}(X), Z \subset X, \alpha \geq 0$. 对任意的 $s \in (0, +\infty)$, 下列结论成立:

- (1) 如果 $\underline{h}_\mu^\alpha(x, f) \leq s$ 对所有的 $x \in Z$ 成立, 则 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \leq s$;
- (2) 如果 $\underline{h}_\mu^\alpha(x, f) \geq s$ 对所有的 $x \in Z$ 成立且 $\mu(Z) > 0$, 则 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \geq s$.

证明定理 2.1 之前, 需要 Ma-Wen 覆盖引理, 见文献 [15, 引理 1].

引理 2.1 设 $\alpha \geq 0, \varepsilon > 0, B^\alpha(\varepsilon) = \{B_n^\alpha(x, \varepsilon) : x \in X, n = 1, 2, \dots\}$. 对任意的子族 $\mathcal{F} \subset B^\alpha(\varepsilon)$, 存在两两不交的子族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B_n^\alpha(x, \varepsilon) \in \mathcal{G}} B_n^\alpha(x, 3\varepsilon).$$

证明 设 Ω 是由 $\mathcal{F}$ 中满足下列两条性质的子族 ω 构成的集合:

(a) ω 中的元素两两不交;

(b) 如果 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ 与 ω 中的某个元素有交, 则存在 $B_m^\alpha(y, \varepsilon) \in \omega$, 使得 $m \leq n$ 且 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \cap B_m^\alpha(y, \varepsilon) \neq \emptyset$.

易知, 集合的包含关系是 Ω 上的偏序关系.

令 $m_x = \min\{n : B_n^\alpha(x, r) \in \mathcal{F}\}$, 则 $\omega_x = \{B_{m_x}^\alpha(x, \varepsilon)\} \in \Omega$. 故 Ω 非空. 设 $\mathcal{C} \subset \Omega$ 是一条链, 则 $\bigcup_{\omega \in \mathcal{C}} \omega$ 属于 Ω 且是 $\mathcal{C}$ 的上界. 因此, 由 Zorn 引理知, 存在极大元 $\mathcal{G} \in \Omega$.

下证 $\mathcal{F}$ 中的任意球都和 $\mathcal{G}$ 中的某个球相交. 用反证法, 如果存在 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 中任意球都不交, 令 $m' = \min\{n : B_n^\alpha(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset, \forall B \in \mathcal{G}\}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{B_{m'}^\alpha(x, \varepsilon)\}$, 则 $\mathcal{G}' \in \Omega$. 这和 $\mathcal{G}$ 的极大性矛盾.

任取 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$, 则存在 $B_m^\alpha(y, \varepsilon) \in \mathcal{G}$, 使得 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \cap B_m^\alpha(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ 且 $m \leq n$. 因为 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \subset B_m^\alpha(x, \varepsilon)$, 所以, 由三角不等式, 可得 $B_n^\alpha(x, \varepsilon) \subset B_m^\alpha(x, \varepsilon) \subset B_m^\alpha(y, 3\varepsilon)$. 故引理得证. $\square$

注 2.3 文献 [15, 引理 1] 是引理 2.1 的特殊情形.

定理 2.1 的证明 当 $\alpha = 0$ 时, Ma 和 Wen 在文献 [15] 中给出了一个优美的证明. 下面仿照他们的方法证明 $\alpha > 0$ 的情形也是成立的. 首先, 证明第一个结论. 给定 $\beta > 0$, 令

$$Z_m = \left\{ x \in Z : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} < s + \beta, \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{m}\right) \right\}.$$

由于对所有的 $x \in Z$ 都有 $h_\mu^\alpha(x, f) \leq s$, 故 $Z = \bigcup_{m=1}^\infty Z_m$. 固定 $m \geq 1$ 且 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{5m})$. 对每一个 $x \in Z_m$, 存在严格递增序列 $\{n_j(x)\}_{j=1}^\infty$, 使得

$$\mu(B_{n_j(x)}^\alpha(x, \varepsilon)) \geq e^{-n_j(x)(s+\beta)}, \quad \forall j \geq 1.$$

给定 $N \geq 1$, 令

$$\mathcal{F}_N = \{B_{n_j(x)}^\alpha(x, \varepsilon) : x \in Z_m, n_j(x) \geq N\}.$$

容易验证, $Z_m \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}_N} B$. 由引理 2.1 知, 存在一个两两不交的子族

$$\mathcal{F}'_N = \{B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}_N,$$

使得

$$Z_m \subset \bigcup_{i \in I} B_{n_i}^\alpha(x_i, 3\varepsilon).$$

因为 μ 是概率测度, 且 $\mathcal{F}'_N$ 中每个集合均有正 μ -测度, 所以指标 I 至多可数. 由此可得

$$M^\alpha(N, 3\varepsilon, s + \beta, Z_m, f) \leq \sum_{i \in I} e^{-n_i(s+\beta)} \leq \sum_{i \in I} \mu(B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)) \leq 1.$$

这蕴含着

$$h_{\text{set}}^B(\alpha, Z_m, f) \leq s + \beta, \quad \forall m \geq 1.$$

因此, 由命题 2.3 得

$$h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = \sup_{m \geq 1} h_{\text{set}}^B(\alpha, Z_m, f) \leq s + \beta.$$

令 $\beta \rightarrow 0$, 可得 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \leq s$.

现在证明第二个结论. 固定 $\beta > 0$. 对任意的 $m \geq 1$, 令

$$Z_m = \left\{ x \in Z : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} > s - \beta, \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{m}\right] \right\}.$$

由于 $\frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n}$ 关于 ε 单调递减, 故

$$Z_m = \left\{ x \in Z : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} > s - \beta, \varepsilon = \frac{1}{m} \right\}.$$

显然, $Z_m \subset Z_{m+1}$ 且 $\bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m = Z$. 因此, 由测度的连续性知

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(Z_m) = \mu(Z).$$

取 $M \geq 1$ 满足 $\mu(Z_M) > \frac{1}{2}\mu(Z)$. 对任意的 $N \geq 1$, 令

$$\begin{aligned} Z_{M,N} &= \left\{ x \in Z_M : \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} > s - \beta, \forall n \geq N, \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{M}\right] \right\} \\ &= \left\{ x \in Z_M : \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} > s - \beta, \forall n \geq N, \varepsilon = \frac{1}{M} \right\}. \end{aligned}$$

因此, $Z_{M,N} \subset Z_{M,N+1}$ 且 $\bigcup_{N=1}^{\infty} Z_{M,N} = Z_M$. 重复上述操作, 可以找到 $N^* \geq 1$, 使得 $\mu(Z_{M,N^*}) > \frac{1}{2}\mu(Z_M) > 0$. 对任意的 $x \in Z_{M,N^*}$, $n \geq N^*$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{M}$, 有

$$\mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon)) \leq e^{-n(s-\beta)}.$$

设 $\mathcal{F} = \{y_i\}_{i \geq 1}$ 是一个 $(N, \frac{\varepsilon}{2}, \alpha, Z_{M,N^*})$ -生成集, 满足

$$Z_{M,N^*} \cap B_{n_i}^\alpha\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset, \quad n_i \geq N \geq N^*, \quad \forall i \geq 1, \quad \text{且 } 0 < \varepsilon < \frac{1}{M}.$$

对任意的 $i \geq 1$, 存在 $x_i \in Z_{M,N^*} \cap B_{n_i}^\alpha(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$. 由三角不等式得

$$B_{n_i}^\alpha\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon).$$

故

$$\sum_{i \geq 1} e^{-n_i(s-\beta)} \geq \sum_{i \geq 1} \mu(B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)) \geq \mu(Z_{M,N^*}) > 0.$$

因此

$$M^\alpha\left(N, \frac{\varepsilon}{2}, s - \beta, Z_{M,N^*}, f\right) \geq \mu(Z_{M,N^*}) > 0.$$

从而 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \geq h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_{M,N^*}, f) \geq s - \beta$. 由 β 的任意性得 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \geq s$. $\square$

注 2.4 在实际应用中, 通过选取适当的测度, 利用定理 2.1 可以给出 Bowen 估计熵的下界. 在第 3 节中, 将看到定理 2.1 在证明 Bowen 估计熵的变分原理 (定理 3.1) 中的应用.

3 Bowen 估计熵的变分原理

本节的主要定理如下.

定理 3.1 设 $Z \subset X$ 是非空紧致子集, $\alpha \geq 0$, 则

$$h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = \sup\{\underline{h}_\mu^\alpha(X, f) : \mu \in \mathcal{M}(X), \mu(Z) = 1\}.$$

证明定理 3.1 之前, 需要一些准备工作.

3.1 加权 Bowen 估计熵

设 $Z \subset X$, $\alpha \geq 0$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ 以及有界函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$W^\alpha(n, \varepsilon, s, g, f) = \inf \left\{ \sum_i c_i e^{-sn_i} \right\}, \quad (3.1)$$

其中, 下确界取遍所有满足下述条件的有限或可数集族 $\{(B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon), c_i)\}$:

(1) 对所有的 i , 都有 $0 < c_i < \infty$, $x_i \in X$, $n_i \geq n$;

(2)

$$\sum_i c_i \chi_{B_{n_i}} \geq g, \quad (3.2)$$

其中, $B_{n_i} = B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)$, χ_B 表示 B 的特征函数, 即, 如果 $x \in B$, 则 $\chi_B(x) = 1$; 如果 $x \in X \setminus B$, 则 $\chi_B(x) = 0$.

设 $Z \subset X$, 记

$$W^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f) = W^\alpha(n, \varepsilon, s, \chi_Z, f).$$

显然, $W^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f)$ 是 n 的增函数. 因此, 下列极限存在:

$$W^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^\alpha(n, \varepsilon, s, Z, f).$$

易知, 存在唯一点 $W^\alpha(\varepsilon, Z, f)$, 使得 $W^\alpha(\varepsilon, s, Z, f)$ 从 $+\infty$ 跳到 0, 也就是,

$$\begin{cases} W^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = +\infty, & s < W^\alpha(\varepsilon, Z, f); \\ W^\alpha(\varepsilon, s, Z, f) = 0, & s > W^\alpha(\varepsilon, Z, f). \end{cases}$$

称 $h_{\text{set}}^W(\alpha, Z, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\alpha(\varepsilon, Z, f)$ 为 Z 的加权 Bowen α -估计熵.

注 3.1 如果 $\alpha = 0$, 则 $h_{\text{set}}^W(0, Z, f)$ 就是文献 [16] 中定义的加权 Bowen 拓扑熵.

定理 3.2 设 $Z \subset X$, $\alpha \geq 0$, 则 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = h_{\text{set}}^W(\alpha, Z, f)$.

用 Feng 和 Huang 在文献 [16] 中给出的方法可以证明定理 3.2, 因此, 需要下述 Vitali 覆盖引理.

引理 3.1 (参见文献 [26, 定理 2.1]) 设 (X, d) 是紧致度量空间, $\mathcal{B} = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ 是 X 中的一族闭 (开) 球, 则存在两两不交的有限或可数子族 $\mathcal{B}' = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathcal{I}'} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}'} B(x_i, 5r_i).$$

定理 3.2 的证明 在 (3.2) 中取 $c_i = 1$, 则对任意的 $N \in \mathbb{N}$, 有

$$W^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f) \leq M^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f).$$

因此, $h_{\text{est}}^W(\alpha, Z, f) \leq h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f)$. 现在只需证明反向不等式. 为此, 只需证明对任意的 $\varepsilon, \delta > 0$, $s \geq 0$, 当 N 足够大时, 有

$$M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z, f) \leq W^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f).$$

对任意的 $\delta > 0$, 存在 $N \geq 2$, 使得对任意的 $n \geq N$, 有 $n^2 e^{-n\delta} \leq 1$. 设集族 $\mathcal{B} = \{B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)\}_{i \in \mathcal{I}}$ 满足 $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$, $0 < c_i < \infty$, $n_i \geq N$ 且

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} c_i \chi_{B_i} \geq \chi_Z, \quad (3.3)$$

其中 $B_i := B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)$. 下面将证明

$$M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z, f) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i e^{-ns}. \quad (3.4)$$

式 (3.4) 蕴含了

$$M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z, f) \leq W^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f).$$

对任意的 $n \geq N$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 设 $\mathcal{I}_n = \{i \in \mathcal{I} : n_i = n\}$, $\mathcal{I}_{n,k} = \{i \in \mathcal{I}_n : i \leq k\}$. 为了书写简便, 记 $B_i = B_{n_i}^\alpha(x_i, \varepsilon)$, $5B_i = B_{n_i}^\alpha(x_i, 5\varepsilon)$, 其中 $i \in \mathcal{I}$. 不失一般性, 假设 $B_i \neq B_j$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立. 给定 $t > 0$, 令

$$Z_{n,t} = \left\{ x \in Z : \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i \chi_{B_i}(x) > t \right\},$$

$$Z_{n,k,t} = \left\{ x \in Z : \sum_{i \in \mathcal{I}_{n,k}} c_i \chi_{B_i}(x) > t \right\}.$$

将证明分成三步.

第一步. 对任意的 $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, 存在有限集 $\mathcal{J}_{n,k,t} \subset \mathcal{I}_{n,k}$, 使得 B_i ($i \in \mathcal{J}_{n,k,t}$) 两两不交, $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{i \in \mathcal{J}_{n,k,t}} 5B_i$, 且

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_{n,k,t}} e^{-ns} \leq \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}_{n,k}} c_i e^{-ns}.$$

因为 $\mathcal{I}_{n,k}$ 是有限的, 所以通过从右方逼近 c_i , 可以假设每个 c_i 是正有理数. 再在 $Z_{n,k,t}$ 的不等式两边乘以分母的最小公倍数, 可以再假设 c_i 是正整数. 设 m 是满足 $m \geq t$ 的最小整数. 记 $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B} = \{B_i : i \in \mathcal{I}_{n,k}\}$ 且定义 $u : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}$ 为 $u(B_i) = c_i$. 记 $v_0 = u$. 从 v_0 开始, 在 $\mathcal{B}$ 上定义一系列整数值函数 $v_0, v_1, \dots, v_m$ 和一系列集族 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}$. 由引理 3.1 (用度量 d_n^α 代替度量 d) 存在两两不交的子族 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ 使得 $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} 5B$ 且 $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} 5B$. 定义

$$v_1(B) = \begin{cases} v_0(B) - 1, & \text{如果 } B \in \mathcal{B}_1; \\ v_0(B), & \text{如果 } B \in \mathcal{C}_0 \setminus \mathcal{B}_1. \end{cases}$$

令 $\mathcal{C}_1 = \{B \in \mathcal{B} : v_1(B) \geq 1\}$. 假设 $x \in Z_{n,k,t}$. 如果 $x \in B$ 且 $v_1(B) = 0$, 则 x 必属于某个 $B' \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$. 因此 $x \in \bigcup_{B \in \mathcal{C}_1} B$. 故 $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}_1} B$. 再由引理 3.1, 存在两两不交的集族 $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{C}_1$, 使得 $\bigcup_{B \in \mathcal{C}_1} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_2} 5B$ 且 $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} 5B$. 定义

$$v_2(B) = \begin{cases} v_1(B) - 1, & \text{如果 } B \in \mathcal{B}_2; \\ v_1(B), & \text{如果 } B \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{B}_2. \end{cases}$$

令 $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B} : v_2(B) \geq 1\}$, 则 $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}_2} B$. 重复上述过程, 可得集族 $\mathcal{C}_{j-1}$ 和两两不交的集族 $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{C}_{j-1}$, $Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_j} 5B$, 且当 $j = 1, \dots, m$ 时, 有

$$v_j(B) = \begin{cases} v_{j-1}(B) - 1, & \text{如果 } B \in \mathcal{B}_j; \\ v_{j-1}(B), & \text{如果 } B \in \mathcal{C}_{j-1} \setminus \mathcal{B}_j. \end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{B \in \mathcal{B}_j} e^{-ns} &= \sum_{j=1}^m \sum_{B \in \mathcal{B}_j} (v_{j-1}(B) - v_j(B)) e^{-ns} \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} \sum_{j=1}^m (v_{j-1}(B) - v_j(B)) e^{-ns} \\ &\leq \sum_{B \in \mathcal{B}} u(B) e^{-ns} = \sum_{i \in \mathcal{I}_{n,k}} c_i e^{-ns}. \end{aligned}$$

取 $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ 满足 $\sum_{B \in \mathcal{B}_{j_0}} e^{-ns}$ 是最小的. 则

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_{j_0}} e^{-ns} \leq \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{I}_{n,k}} c_i e^{-ns} \leq \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}_{n,k}} c_i e^{-ns}.$$

故 $\mathcal{J}_{n,k,t} = \{i \in \mathcal{I}_{n,k} : B_i \in \mathcal{B}_{j_0}\}$ 即为要找的集合.

第二步. 对任意的 $n \geq N$ 和 $t > 0$, 将证明

$$M^\alpha(N, s, 6\varepsilon, Z_{n,t}, f) \leq \frac{1}{n^2 t} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i e^{-ns}. \quad (3.5)$$

如果 $Z_{n,t} = \emptyset$, 则不等式 (3.5) 显然成立. 假设 $Z_{n,t} \neq \emptyset$. 因为 $Z_{n,k,t}$ 单调递增趋于 $Z_{n,t}$, 所以当 k 足够大时, $Z_{n,k,t} \neq \emptyset$. 设 $\mathcal{J}_{n,k,t}$ 是第一步中构造的集合, 则当 k 足够大时, $\mathcal{J}_{n,k,t} \neq \emptyset$. 令 $E_{n,k,t} = \{x_i : i \in \mathcal{J}_{n,k,t}\}$. 注意到 X 中的所有非空紧致子集构成的集族相对于 Hausdorff 度量是紧致的 (参见文献 [27, 第 2.10.21 小节]). 因此, 存在子列 $\{k_j\} \subset \mathbb{N}$ 和非空紧致集 $E_{n,t} \subset X$ 使得当 $j \rightarrow \infty$ 时 $E_{n,k_j,t}$ 按 (d_n^α) 诱导的 Hausdorff 度量收敛到 $E_{n,t}$. 因为 $E_{n,k,t}$ 中任意两点的距离 (相对于 d_n^α) 不小于 ε , 所以 $E_{n,t}$ 中的点也有此性质. 从而 $E_{n,t}$ 是一个有限集 (取半径为 $\varepsilon/2$ 的球组成的覆盖, 则存在有限覆盖. 如果 $E_{n,t}$ 是无限集则必有两点进入同一个球, 矛盾). 因此, 当 j 充分大时 $|E_{n,k_j,t}| = |E_{n,t}|$. 故当 j 充分大时

$$Z_{n,k,t} \subset \bigcup_{i \in \mathcal{J}_{n,k_j,t}} 5B_i = \bigcup_{x \in E_{n,k_j,t}} B_n^\alpha(x, 5\varepsilon) \subset \bigcup_{x \in E_{n,t}} B_n^\alpha(x, 5.5\varepsilon).$$

从而 $Z_{n,t} \subset \bigcup_{x \in E_{n,t}} B_n^\alpha(x, 6\varepsilon)$. 由于当 j 充分大时 $|E_{n,k_j,t}| = |E_{n,t}|$, 所以

$$\sum_{x \in E_{n,t}} e^{-ns} \leq \sum_{x \in E_{n,k_j,t}} e^{-ns} \leq \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i e^{-ns}.$$

因此,

$$M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z_{n,t}, f) \leq \sum_{x \in E_{n,t}} e^{-n(s+\delta)} \leq \frac{1}{e^{n\delta}t} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i e^{-ns} \leq \frac{1}{n^2 t} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i e^{-ns}.$$

第三步. 如果对任意的 $t \in (0, 1)$,

$$M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z, f) \leq \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i e^{-ns}$$

成立, 则不等式 (3.4) 成立. 固定 $t \in (0, 1)$. 由于 $\sum_{n=N}^{\infty} n^{-2} < 1$, 故由不等式 (3.3) 得 $Z \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} Z_{n, n^{-2}t}$. 所以, 由不等式 (3.5) 得

$$\begin{aligned} M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z, f) &\leq \sum_{n=N}^{\infty} M^\alpha(N, 6\varepsilon, s + \delta, Z_{n, n^{-2}t}, f) \\ &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} c_i e^{-ns} = \frac{1}{t} \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i e^{-ns}. \end{aligned}$$

定理 3.2 得证. $\square$

在定理 3.1 证明中还需要动力系统版本的 Frostman 引理 (参见文献 [16, 引理 3.4]). 当 $\alpha = 0$ 时, Feng 和 Huang^[16] 给出过一个非常精彩的证明. 此证明源自 Howroyd 的优美证明 (参见文献 [28, 定理 2] 和 [26, 定理 8.17]). 这里将采用类似的讨论.

引理 3.2 设 Z 是 X 的非空紧致子集, $\alpha \geq 0, s \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$. 如果 $\gamma := W^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f) > 0$, 则存在 X 上的 Borel 概率测度 μ 使得 $\mu(Z) = 1$ 且

$$\mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-ns}, \quad \forall x \in X, n \geq N.$$

证明 显然 $\gamma < \infty$. 定义 $p: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下,

$$p(g) = \frac{1}{\gamma} W^\alpha(N, \varepsilon, s, \chi_Z \cdot g, f), \quad g \in C(X),$$

其中 $C(X)$ 表示 X 到 $\mathbb{R}$ 的全体连续函数, $W^\alpha(N, \varepsilon, s, \cdot, f)$ 的定义见 (3.1). 用 $\mathbf{1}$ 表示常值函数 $\mathbf{1}(x) \equiv 1$. 易证:

- (1) 对任意的 $h, g \in C(X)$ 有 $p(h+g) \leq p(h) + p(g)$.
- (2) 对任意的 $t \geq 0$ 和 $g \in C(X)$ 有 $p(tg) = tp(g)$.
- (3) i. $p(\mathbf{1}) = 1$; ii. 对任意的 $g \in C(X)$ 有 $0 \leq p(g) \leq \|g\|_\infty$; iii. 如果 $g \in C(X)$ 且 $g \leq 0$, 则 $p(g) = 0$.

由 Hahn-Banach 定理, 对线性泛函 $t \mapsto tp(\mathbf{1}), t \in \mathbb{R}$, 进行延拓 $L: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$, 则延拓后的线性泛函满足 $L(\mathbf{1}) = p(\mathbf{1}) = 1$, 且对任意的 $g \in C(X)$ 有 $-p(-g) \leq L(g) \leq p(g)$. 如果 $g \in C(X)$ 且 $g \geq 0$, 则 $p(-g) = 0$, 因此 $L(g) \geq 0$. 再加上 $L(\mathbf{1}) = 1$, 通过 Riesz 表示定理可以找到 X 上的一个 Borel 概率测度 μ , 使得对任意的 $g \in C(X)$ 有 $L(g) = \int_X g d\mu$.

现在证明 $\mu(Z) = 1$. 如果 $Z = X$ 则 $\mu(Z) = 1$; 否则, 对任意的紧致子集 $E \subset X \setminus Z$, 由 Urysohn 引理知, 存在 $g \in C(X)$, 使得 $0 \leq g \leq 1$, 对任意的 $x \in E$ 有 $g(x) = 1$ 且对任意的 $x \in Z$ 有 $g(x) = 0$.

故 $g \cdot \chi_Z \equiv 0$. 从而 $p(g) = 0$. 因此 $\mu(E) \leq L(g) \leq p(g) = 0$. 由 μ 的正则性知, $\mu(X \setminus Z) = 0$. 所以 $\mu(Z) = 1$.

再证明 $\mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-ns}$ 对任意的 $x \in X$ 和 $n \geq N$ 都成立. 对任意的紧致子集 $E \subset B_n^\alpha(x, \varepsilon)$, 由 Urysohn 引理知, 存在 $g \in C(X)$, 使得 $0 \leq g \leq 1$, $g(y) = 1$ 对任意的 $y \in E$ 成立且 $g(y) = 0$ 对任意的 $y \in X \setminus B_n^\alpha(x, \varepsilon)$ 成立, 则 $\mu(E) \leq L(g) \leq p(g)$. 因为 $g \cdot \chi_Z \leq \chi_{B_n^\alpha(x, \varepsilon)}$ 且 $n \geq N$, 所以 $W^\alpha(N, \varepsilon, s, g \cdot \chi_Z, f) \leq e^{-ns}$. 从而 $\mu(E) \leq p(g) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-ns}$. 由 μ 的正则性得 $\mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-ns}$. $\square$

注 3.2 文献 [16, 引理 3.4] 是引理 3.2 的特殊情形.

下面证明定理 3.1.

定理 3.1 的证明 首先证明等式左边不小于等式右边. 设 $\mu(Z) = 1$. 给定 $\delta > 0$, 令

$$Z_\delta = \{x \in Z, \underline{h}_\mu^\alpha(x, f) \geq \underline{h}_\mu^\alpha(X, f) - \delta\}.$$

因为 $\underline{h}_\mu^\alpha(X, f) = \int \underline{h}_\mu^\alpha(x, f) d\mu(x)$, 所以 $\mu(Z_\delta) > 0$. 故由定理 2.1 知,

$$h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \geq h_{\text{est}}^B(\alpha, Z_\delta, f) \geq \underline{h}_\mu^\alpha(X, f) - \delta, \quad \forall \delta > 0.$$

由 δ 的任意性, 得

$$h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) \geq \sup\{\underline{h}_\mu^\alpha(X, f) : \mu \in \mathcal{M}(X), \mu(Z) = 1\}.$$

现在证明反向不等式. 不失一般性, 假设 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) > 0$. 由定理 3.2 知, $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f) = h_{\text{est}}^W(\alpha, Z, f)$. 任取 $0 < s < h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f)$. 由 $h_{\text{est}}^B(\alpha, Z, f)$ 的定义知, 存在 $\varepsilon > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\gamma := W^\alpha(N, \varepsilon, s, Z, f) > 0.$$

由引理 3.2 知, 存在 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 且 $\mu(Z) = 1$, 使得

$$\mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-ns}, \quad \forall x \in X, n \geq N.$$

因此, 对任意的 $x \in Z$ 有

$$\underline{h}_\mu^\alpha(x, f) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(B_n^\alpha(x, \varepsilon))}{n} \geq s.$$

从而

$$\underline{h}_\mu^\alpha(X, f) = \int \underline{h}_\mu^\alpha(x, f) d\mu(x) \geq s.$$

定理 3.1 得证. $\square$

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy. Trans Amer Math Soc, 1965, 114: 309–319
- 2 Dinaburg E I. A correlation between topological entropy and metric entropy. Dokl Akad Nauk Sssr, 1970, 190: 19–22
- 3 Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1971, 153: 401–414
- 4 Nair G N, Fagnani F, Zampieri S, et al. Feedback control under data rate constraints: An overview. Proc IEEE, 2007, 95: 108–137

- 5 Nair G N, Evans R J, Mareels I M Y, et al. Topological feedback entropy and nonlinear stabilization. *IEEE Trans Automat Control*, 2004, 49: 1585–1597
- 6 Colonius F, Kawan C. Invariance entropy for control systems. *SIAM J Control Optim*, 2009, 48: 1701–1721
- 7 Colonius F, Kawan C, Nair G. A note on topological feedback entropy and invariance entropy. *Systems Control Lett*, 2013, 62: 377–381
- 8 Savkin A V. Analysis and synthesis of networked control systems: Topological entropy, observability, robustness and optimal control. *Automatica*, 2006, 42: 51–62
- 9 Liberzon D, Mitra S. Entropy and minimal bit rates for state estimation and model detection. *IEEE Trans Automat Control*, 2018, 63: 3330–3344
- 10 Kawan C. Exponential state estimation, entropy and Lyapunov exponents. *Systems Control Lett*, 2018, 113: 78–85
- 11 Zhong X F. Estimation entropy and Δ -weakly mixing sets for free semigroup actions (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2019, 62: 889–902
- 12 Colonius F. Minimal bit rates and entropy for exponential stabilization. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 2988–3010
- 13 Bowen R. Topological entropy for noncompact sets. *Trans Amer Math Soc*, 1973, 184: 125–136
- 14 Pesin Y B, Pitskel B S. Topological pressure and the variational principle for noncompact sets. *Funct Anal Appl*, 1984, 18: 307–318
- 15 Ma J H, Wen Z Y. A Billingsley type theorem for Bowen entropy. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 2008, 346: 503–507
- 16 Feng D J, Huang W. Variational principles for topological entropies of subsets. *J Funct Anal*, 2012, 263: 2228–2254
- 17 Kong D, Chen E. Slow entropy for noncompact sets and variational principle. *J Dynam Differential Equations*, 2014, 26: 477–492
- 18 Tang X, Cheng W C, Zhao Y. Variational principle for topological pressures on subsets. *J Math Anal Appl*, 2015, 424: 1272–1285
- 19 Xu L, Zhou X. Variational principles for entropies of nonautonomous dynamical systems. *J Dynam Differential Equations*, 2018, 30: 1053–1062
- 20 Huang Y, Zhong X. Carathéodory-Pesin structures associated with control systems. *Systems Control Lett*, 2018, 112: 36–41
- 21 Zhong X, Huang Y. Invariance pressure dimensions for control systems. *J Dynam Differential Equations*, 2019, 31: 2205–2222
- 22 Wang T, Huang Y, Sun H W. Measure-theoretic invariance entropy for control systems. *SIAM J Control Optim*, 2019, 57: 310–333
- 23 Zhong X F. Variational principles of invariance pressures on partitions. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2020, 40: 491–508
- 24 Pesin Y B. *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications*. Chicago: The University of Chicago Press, 1997
- 25 Brin M, Katok A. On local entropy. In: *Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 30–38
- 26 Mattila P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 27 Federer H. *Geometric Measure Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1969
- 28 Howroyd J. On dimension and on the existence of sets of finite positive Hausdorff measure. *Proc Lond Math Soc (3)*, 1995, 70: 581–604

A variational principle for Bowen estimation entropy

Xingfu Zhong & Zhijing Chen

Abstract Let (X, f) be a topological dynamical system, where X is a compact metric space and f is a continuous self-map of X . We introduce the notion of Bowen estimation entropy for (X, f) and obtain a Billingsley type theorem and a variational principle for Bowen estimation entropy.

Keywords topological entropy, estimation entropy, Billingsley theorem, variational principle

MSC(2020) 37B40, 37A35

doi: 10.1360/SSM-2019-0296