关于算子方程 $A=A^*C$

严 绍 宗
(复旦大学数学研究所，上海)

H是复 Hilbert 空间，$B(H)$是H上有界线性算子全体，$\mathbb{C}$是复数域. 对任何$A,A^{-1}\in B(H)$,文献[1]中称算子 $C=A^{*-1}A$ 为A的极·积算子,文献[1]对C作了较多研究,文献[2]中以极·积算子为工具,给出H上算子方程 $\lambda A^2+\mu A^{*2}=\alpha A^*A+\beta AA^*(\lambda,\mu,\alpha,\beta\in\mathbb{C})$ 可解性的研究,并写出了它的全部解. 文献[2]中主要用到当C为正常算子时,方程 $C=A^{*-1}A$ 可解的充要条件以及它的全部解的表达式（见文献[1]定理5). 这就很自然地促使人们研究更一般类型的算子方程 $A=A^*C$. 本文主要是给出当 C^2 是正常单射时,方程$A=A^*C$可解的充要条件以及解的全部形式.

定义 设 $A,B\in B(H)$,如果分别存在 A,B 的约化子空间 M,N, 以及 $M\to N$ 的酉算子 V,使得 $V^*BV=A$, 称 A,B 是部分酉等价,V是实现部分酉等价的算子,记为

$$A\overset{V}{\cong}B.$$

注 1. 今后视V是H上部分保距算子; $\mathscr{R}(V)=N,\mathscr{N}(V)=M^{\perp}$.

引理 1 设 $A,C\in B(H)$,并且 $A=A^*C$. 下列命题成立:

(i) 如果 C^* 是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0,\cdots,z_n\}$-1 阶控制算子[3],或是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0,\cdots,z_n\}$ 的有限阶控制算子[3],并且 $\mathscr{N}(C^*-z_iI)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 约化 C^*, $\mathscr{N}(A)=\mathscr{N}(A^*)=\{0\}$, 则$C$必是正常算子.

(ii) 如果C是正常算子, 则 $\overline{\mathscr{R}(A)}$, $\mathscr{N}(A)$ 都约化 C, 并且 $0\in\rho(C|_{\mathscr{N}(A)^{\perp}})$, 而 $(C|_{\mathscr{N}(A)^{\perp}})^{-1}$必和 $C^*|_{\overline{\mathscr{R}(A)}}$ 酉等价.

(iii) 如果C是正常算子,且 $\mathscr{N}(A)=\mathscr{N}(A^*)=\{0\}$, 则方程 $A=A^*C$ 可解的充要条件是 $C^{-1}\in B(H)$, 并且 C^{-1} 与 C^* 酉等价. 而当 C^{-1} 与 C^* 酉等价时,方程$A=A^*C$的通解形式如下: 令 $H_i(i=0,1,2)$ 分别是C相应于单位圆周, 单位圆外,单位圆内谱子空间, $C_i=C/_{H_i}(i=0,1,2)$, 在分解 $H=H_0\oplus H_1\oplus H_2$ 下, $A=A_0\oplus A_{12}$,其中 $A_0=C_0^{1/2}S_0$, S_0是H_0上与C_0可交换的自共轭算子; $A_{12}=\begin{pmatrix}0 & A_1^*C_2\\ A_1 & 0\end{pmatrix}$, A_1是 $H_1\to H_2$的有界线性算子, 而 $A_1=V_1S_1$, V_1 是实现 C_1^{-1} 与 C_2^* 酉等价算子(即 $C^{-1}\overset{V_1}{\cong}C^*$), S_1是与C_1可交换的H_1上有界自共轭算子.

证 由 $A=A^*C$ 得 $A^*=C^*A$,从而有

$$A=C^*AC\ (\text{或者}\ A^*=C^*A^*C),$$

根据文献[3]的定理1,2立即得(i). 再由文献[1]的定理5,立即得到(ii). 最后可仿文献[1]定理5的证明得到(iii). 证毕.

本文1986年2月21日收到.

引理 2 设 $C\in B(H)$, C^2 是正常算子并且是单射，则 C 的一般形式如下：存在空间分解 $H=H_1\oplus H_2$ (H_1,H_2 中也可以有一个是$\{0\}$)，使得

$$C=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{11}T \\ 0 & C_{22}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}H_1\\H_2\end{array}, \tag{1}$$

其中 C_{11}, C_{22} 分别是 H_1, H_2 上正常算子，并且都是单射，而 T 是 $H_2\to H_1$ 的有界线性算子，并满足 $C_{11}T=TC_{22}$.

证 先设 $0\in\rho(C^2)$. 令 $C_0=(C^2)^{1/2}$, $C'=C_0^{-1}C$. 显然从 C 与 C^2 可交换(由 Putnam-Fuglede 定理可知 C 与 C^{*2} 也可交换)立即可知 C, C' 都与 C_0 可交换. 又由于

$$C^2=(C_0C')^2=C_0^2C'^2=C_0^2C'^2,$$

所以 $C'^2=I$. 从而存在分解 $H=H_1\oplus H_2$ 和 $H_2\to H_1$ 的有界线性算子 T，使得

$$C'=\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{array}{l}H_1\\H_2\end{array}.$$

令 C_0 在分解 $H=H_1\oplus H_2$ 下为 $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$, 利用 $C_0C'=C'C_0$ 立即可知 $C_{21}=0$. 再利用 Putnam-Fuglede 定理，又得到 $C_0^*C'=C'C_0^*$, 同样可推出 $C_{12}^*=0$, 即 $C_{12}=0$. 这样就得到

$$C=C_0C'=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{11}T \\ 0 & C_{22}\end{pmatrix},$$

因为 C_0 是单射，且正常，所以 C_{11}, C_{22} 都是正常算子，且是单射. 利用 C_0 与 C' 的可交换性还可得到 $TC_{22}=C_{11}T$.

对于一般的 C，因为 C^2 是正常单射，所以 $H=\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n$, 其中 H_n 是算子 $|C^2|$ 相应于

$$\left(\frac{\|C^2\|}{n+1}, \frac{\|C\|^2}{n}\right]$$

的谱子空间，由于 C 与 C^2 可交换，所以 $\{H_n\}$ 都是 C 的约化子空间. 而在每个 H_n 上，都有 $0\in\rho(C^2|_{H_n})$. 利用引理已在 H_n 上成立的事实立即可知引理在 $H=\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n$ 上成立. 证毕.

注 2. 根据文献[4]易知方程 $C_{11}T=TC_{22}$ 具有非零解 T 的充要条件是 $C_{11}\overset{V}{\cong}C_{22}$; 当 $C_{11}\overset{V}{\cong}C_{22}$ 时，方程 $C_{11}T=TC_{22}$ 的解的一般形式是 $T=VS$, S 是 $\mathscr{N}(V)^\perp$ 上与 C_{22} 可交换有界算子.

定理 1 设 $A, C\in B(H)$, $A=A^*C$. (i) 如果 C^{*2} 是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0,\cdots,z_n\}$ 的一阶控制算子或是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0,\cdots,z_n\}$ 的有限阶控制算子且 $\mathscr{N}(C^{*2}-z_iI)(i=0,1,\cdots,n)$ 都约化 C^*, $\mathscr{N}(A)=\mathscr{N}(A^*)=\{0\}$, 则 C^2 是正常算子. (ii) 如果 C^{*2} 是正常算子且是单射，则方程 $A=A^*C$ 具有非零解 A 的充要条件是在引理 2 的分解 $H=H_1\oplus H_2$ 下，下列三个条件之一被满足 a) 在 C_{11} 的某约化子空间 $N_1(\subset H_1)$ 上 C_{11}^{-1} 与 C_{11}^* 酉等价; b) 在 C_{22} 的某约化子空间 $N_2(\subset H_2)$ 上 C_{22}^{-1} 与 C_{22}^* 酉等价; c) C_{22}^{-1} 与 C_{11}^* 部分酉等价. 当非零可解性条件满足时，方程 $A=A^*C$ 通解形式如下：在分解 $H=H_1\oplus H_2$ 下，$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{array}{l}H_1\\H_2\end{array}$,

$$A_{11}=A_{11}^0\oplus 0,\quad A_{11}^0=A_0^{(1)}\oplus A_{12}^{(1)}, \tag{2}$$

$$A_{21}^*=\frac{1}{2}A_{11}^*T+A_{21}^{0*}\quad (A_{21}^{0*}+C_{11}^*A_{21}^{0*}C_{22}=0), \tag{3}$$

$$A_{12}=\frac{1}{2}A_{11}T-A_{21}^{0*}C_{22}, \tag{4}$$

$$A_{22}=\frac{1}{4}T^*A_{11}T+\frac{1}{2}(A_{21}^0T-T^*A_{21}^{0*}C_{22})+iA_{22}^0,\quad A_{22}^0=A_0^{(2)}\oplus A_{12}^{(2)}, \tag{5}$$

其中 $A_0^{(i)},A_{12}^{(i)}(i=1,2)$ 分别是 C_{ii} 在 C_{ii}^{-1} 与 C_{ii}^* 酉等价的约化子空间 N_i 上相应于引理 1 的(iii)(取(iii)中 C 作为 $C_{ii}|_{N_i}$) 的解 A_0,A_{12} (如果 $N_2=\{0\}$,意味着 $A_{22}^0=0$).

注 3. 可能方程 $A_{21}^{0*}+C_{11}^*A_{21}^{0*}C_{22}=0$ 只有零解,显然此方程有非零解的充要条件是 C_{11}^* 与 $(-C_{22}^{-1})$ 部分酉等价. 如果 $C_{11}^*\overset{V}{\cong}-C_{22}^{-1}$, 则 $A_{21}^{0*}+C_{11}^*A_{21}^{0*}C_{22}=0$ 的通解形式是 $A_{21}^{0*}=VR$, 而 R 是 $\mathscr{N}(V)^\perp$ 上与 C_{22} 可交换的有界算子.

证 (i) 由于 $A=A^*C,A^*=C^*A$,从而 $A=C^*AC,A=C^{*2}AC^2$. 根据文献[3], C^2 是正常算子.

(ii) 当 C^2 是正常单射时,根据引理 2,

$$C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{11}T\\ 0 & C_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}H_1\\ H_2\end{matrix},\quad C_{11}T=TC_{22}, \tag{6}$$

其中 C_{11},C_{22} 分别是 H_1,H_2 上正常单射. 注 2 中给出了方程 $C_{11}T=TC_{22}$ 成立的充要条件和 T 与 C_{11},C_{22} 之间关系. 在分解 $H=H_1\oplus H_2$ 下,令 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$,易知方程 $A=A^*C$ 等价于方程组:

$$\begin{cases}A_{11}=A_{11}^*C_{11}, \quad (7) \qquad A_{21}=A_{12}^*C_{11}, \quad (8)\\ A_{12}=A_{11}^*C_{11}T-A_{21}^*C_{22}, \quad (9) \qquad A_{22}=A_{12}^*C_{11}T-A_{22}^*C_{22}. \quad (10)\end{cases}$$

下面只要研究方程(7)—(10)的可解性及通解.

I. 解方程(7) 因为 C_{11} 是正常单射,由方程(7)得 $A_{11}^*=C_{11}^*A_{11}$, 由此可知 $\mathscr{N}(A_{11})=\mathscr{N}(A_{11}^*)$, 即 $\mathscr{N}(A_{11})$ 约化 A_{11}. 又根据引理 1 的 (ii), $\mathscr{N}(A_{11})$ 也约化 C_{11}. 因此在分解 $H_1=\mathscr{N}(A_{11})^\perp\oplus\mathscr{N}(A_{11})$ 下, $A_{11}=A_{11}^0\oplus 0$. 而 A_{11}^0 是 $\mathscr{N}(A_{11})^\perp$ 上一对一稠值域,并且 $A_{11}^0=A_{11}^{0*}C_{11}|_{\mathscr{N}(A_{11})^\perp}$. 由引理 1 的 (iii) 可知 $A_{11}=A_{11}^*C_{11}$ 具有非零解充要条件是 $N_1=\mathscr{N}(A_{11})^\perp$ 是 C_{11} 约化子空间,并且在 N_1 上 C_{11}^{-1} 与 C_{11}^* 酉等价,而当有非零解时, A_{11} 的一般形式为(2)式.

II. 解方程(8)、(9) 将方程(9)代入(8)*: $A_{21}^*=C_{11}^*A_{12}$, 得到

$$A_{21}^*=C_{11}^*A_{11}^*C_{11}T-C_{11}^*A_{21}^*C_{22}(=A_{11}^*T-C_{11}^*A_{21}^*C_{22}), \tag{11}$$

因为 $C_{11}^*A_{11}^*TC_{22}=C_{11}^*A_{11}^*C_{11}T=A_{11}^*T$, 所以方程(11)有一个特解: $A_{21}^*=\frac{1}{2}A_{11}^*T$. 从而方程(11)的通解的形式是

$$A_{21}^*=\frac{1}{2}A_{11}^*T+A_{21}^{0*}\quad (A_{21}^{0*}+C_{11}^*A_{21}^{0*}C_{22}=0), \tag{12}$$

其中 A_{21}^{0*} 是齐次方程 $X+C_{11}^*XC_{22}=0$ 的任何解. 将通解(12)代入(9)式立即得到 A_{12} 的形式:

$$A_{12} = \frac{1}{2} A_{11} T - A_{21}^{0*} C_{22}. \tag{13}$$

由(13)式,(12)式可得

$$A_{12}^* C_{11} = \frac{1}{2} T^* A_{11}^* C_{11} - C_{22}^* A_{21}^0 C_{11} = \frac{1}{2} T^* A_{11}^* C_{11} + A_{21}^0$$

$$= \frac{1}{2} T^* A_{11} + A_{21}^0 = A_{21},$$

即(12),(13)式所确定的通解 A_{12}, A_{21} 满足方程(8).

III. 解方程(10)　　用方程(13)将(10)化成下列形式:

$$A_{22} + A_{22}^* C_{22} = \frac{1}{2} T^* A_{11}^* C_{11} T - C_{22}^* A_{21}^0 C_{11} T$$

$$= \left(\frac{1}{2} T^* A_{11} T + A_{21}^0 T\right), \tag{14}$$

因为

$$\frac{1}{4} T^* A_{11} T + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - T^* A_{21}^{0*} C_{22}) + \left[\frac{1}{4} T^* A_{11} T + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - T^* A_{21}^{0*} C_{22})\right]^* C_{22}$$

$$= \frac{1}{4}(T^* A_{11} T + T^* A_{11}^* T C_{22}) + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - C_{22}^* A_{21}^0 T C_{22})$$

$$= \frac{1}{4}(T^* A_{11} T + T^* A_{11}^* C_{11} T) + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - C_{22}^* A_{21}^0 C_{11} T)$$

$$= \frac{1}{2} T^* A_{11} T + A_{21}^0 T,$$

所以 $\frac{1}{4} T^* A_{11} T + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - T^* A_{21}^{0*}(C_{22})$ 是方程 (14) 的一个特解，从而方程 (10) 的通解是

$$A_{22} = \frac{1}{4} T^* A_{11} T + \frac{1}{2}(A_{21}^0 T - T^* A_{21}^{0*} C_{22}) + i A_{22}^0,$$

其中 iA_{22}^0 是方程 $Y + Y^* C_{22} = 0$ 的任何一个解(等价于 A_{22}^0 是 $A_{22}^0 = A_{22}^{0*} C_{22}$ 的解).

显然,如果 a) 成立,则可做到 $A_{11}^0 \neq 0$; 如果 b) 成立，则可做到 $A_{22}^0 \neq 0$; 如果 c) 成立,可做到 $A_{21}^{0*} \neq 0$. 证毕.

推论 1　　设 $C \in B(H)$,并且 C^2 是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0, \cdots, z_n\}$ 的一阶控制算子或是 $\mathbb{C}\backslash\{z_0, \cdots, z_n\}$ 的有限阶控制算子,但 $\mathcal{N}(C^{*2} - z_i I)(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 约化 C^{*2}. 则 (i) C 是某个算子 $A \in B(H)$ 的极 · 积算子必要条件是 C^2 是正常算子,并且 $0 \in \rho(C)$; (ii) 当 C^2 是正常算子,并且 $0 \in \rho(C)$ 时，如果在引理 2 的分解 $H = H_1 \oplus H_2$ 下，$-C_{11}^*$ 和 C_{22}^{-1} 不部分酉价,则 $A^{*-1}A = C$ 可解的充要条件是 $-C_{ii}^*$ 与 $C_{ii}^{-1}(i = 1,2,)$ 在 H_i 上酉等价,并且这时等 $A^{*-1}A = C$ 的通解形式是

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{1}{2} A_{11} T \\ \frac{1}{2} T^* A_{11} & \frac{1}{4} T^* A_{11} T + i A_{22} \end{pmatrix} (C_{11} T = T C_{22}), \tag{15}$$

其中 $A_{ii}(i = 1,2)$ 是方程 $A_{ii}^{*-1} A_{ii} = C_{ii}$ 的任何解(它的形式见文献[1]定理 5).

证 (i) 从极·积算子定义易知 C^2 是正常的,并且 $0\in\rho(C^2)$, 从而 $0\in\rho(C)$.

(ii) 由 $0\in\rho(C^2)$,易知 $0\in\rho(C_{11})\cap\rho(C_{22})$. 又由于 $-C_{11}^*$ 和 C_{22}^{-1} 不部分酉等价,从而方程 $A_{21}^{0*}+C_{11}^*A_{21}^{0*}C_{22}=0$ 只有 $A_{21}^{0*}=0$. 这样,根据定理 3 方程 $A=A^*C$ 的解只能是(15)式的形式,而 A_{ii} 是满足 $A_{ii}=A_{ii}^*C_{ii}(i=1,2)$ 的解. 显然,下面只要证明 $A^{*-1}A=C$ 等价于 $A_{ii}^{*-1}A_{ii}=C_{ii}(i=1,2)$ 即可.

事实上,因为 $0\in\rho(C)$, 所以方程 $A^{*-1}A=C$ (要求 $A^{-1}\in B(H)$) 等价于 $A=A^*C$, 并且 $\mathscr{R}(A)=H$. 因此给出 $A^{*-1}A=C$ 的所有解等价于由形为 (15)式的 A 中定出所有满足 $\mathscr{R}(A)=H$ 的 A. 对任何 $u_i\in H_i(i=1,2)$, $\mathscr{R}(A)=H$ 等价于存在 $x_i\in H_i(i=1,2)$ 使得 $A(x_1+x_2)=u_1+u_2$, 即

$$\begin{cases} A_{11}\left(x_1+\dfrac{1}{2}Tx_2\right)=u_1, & (16)\\ T^*A_{11}\left(\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{4}Tx_2\right)+iA_{22}x_2=u_2. & (17)\end{cases}$$

由(16)式可知 $\mathscr{R}(A_{11})=H_1$, 又因为 $A_{11}=A_{11}^*C_{11}$ (见(7)式),并注意到 $0\in\rho(C_{11})$, 立即可知 $0\in\rho(A_{11})$,从而 $A_{11}=A_{11}^*C_{11}$ 等价于 $A_{11}^{*-1}A_{11}=C_{11}$,根据文献[1]定理 5,$-C_{11}^*$ 与 C_{11}^{-1} 必酉等价. 由于 $0\in\rho(A_{11})$, 所以由 (16) 式得到 $x_1=A_{11}^{-1}u_1-\dfrac{1}{2}Tx_2$,将此式代入(17)式立即得到

$$iA_{22}x_2=u_2-T^*u_1, \tag{18}$$

由(18)式可知 $\mathscr{R}(A_{22})=H_2$. 类似于 A_{11} 可得 $0\in\rho(A_{22})$, 从而 $A_{22}=A_{22}^*C_{22}$ 等价于 $A_{22}^{*-1}A_{22}=C_{22}$, 因此 $-C_{22}^*$ 与 C_{22}^{-1} 必酉等价. 证毕.

参 考 文 献

[1] 严绍宗,数学年刊, 1(1980), 3—4: 485—499.
[2] 严绍宗、朱建中,关于算子方程 $\lambda A^2+\mu A^*=\alpha A^*A+\beta AA^*$ (待发表).
[3] 严绍宗、李绍宽,中国科学, A辑, 1984,9: 775—783.
[4] 严绍宗、李绍宽,科学通报, 26(1981),21: 1281—1282. 数学年刊, 4B(1983), 51—56.