

doi: 10.3969/j.issn.1002-0268.2017.03.005

差异化锚长组合支护方式对边坡稳定性影响的数值分析

张期树¹, 徐则民¹, 夏香波², 任 喆¹

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650504; 2. 长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

摘要: 为寻求边坡锚杆布置的优化形式, 拟采用差异化锚长组合方式进行支护。首先探讨在边坡不同位置单独布锚, 得出其对边坡整体稳定性的贡献存在显著差异, 由此引出并强调边坡层位的作用。另外考虑到对锚杆长度进行差异组合在经济上更为合理, 由此将边坡锚杆组布设成长-中-短型、中-长-短型、短-长-中型3种组合形式, 通过分析安全系数差异、锚杆轴力比重和滑动面位置等变化情况, 研究布置方式的变化对边坡稳定性的影响。结果表明: 在组合布锚情况下, 存在整体最佳锚固角 θ_{opt} 与层位有效锚长 L_{eff} , 安全系数差异与滑动面位置的主控因素均随锚固角在各层位间不断转移, 边坡破坏模式随锚固角增大由深层滑动突变为浅层滑动; 当各层锚杆组采用单层布锚下的最佳锚固角进行组合布设时, 加固效果一般, 存在“组合-群锚效应”, 此时对各层锚杆组按小角度岔开布设为宜。

关键词: 道路工程; 边坡稳定性; 数值分析; 差异化锚长组合; 安全系数; 滑动面; 锚固角组合; 组合-群锚效应

中图分类号: U417.1

文献标识码: A

文章编号: 1002-0268 (2017) 03-0026-12

Numerical Analysis on Influence of Support Pattern of Variation Bolt Length Combination on Slope Stability

ZHANG Qi-shu¹, XU Ze-min¹, XIA Xiang-bo², REN Zhe¹

(1. School of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming Yunnan 650500, China;

2. School of Architectural Engineering, Chang'an University, Xi'an Shaanxi 710061, China)

Abstract: To search the optimal form of bolt layout in the slope engineering, the way of variation bolt length combination is used. First, the way of separate bolts laying at different positions of the slope is discussed, which shows that it has apparent difference in the contribution to the whole stability of the slope. Then, the effect of slope layer place is raised and emphasized. In addition, considering the economy of bolt length variation combination, the bolts are divided into 3 combination types: long-medium-short type, medium-long-short type, and short-long-medium type, by analyzing the changes of difference of safety factor, axial force ratio of bolts and position of sliding surface, the influence of arrangement methods of bolts on slope stability is studied. The result shows that (1) there exists global optimum anchorage angle θ_{opt} and layer place effective bolt length L_{eff} in the case of combinational bolts, the main controlling factors of safety coefficient's difference and the position of sliding surface are continuously transfer among layer places with the increasing of anchorage angle, and the failure mode of the slope mutate from deep sliding to shallow sliding with the increasing of anchor angle; (2) when the best anchorage angle for single layer anchorage is used to lay the bolt group of each layer, the reinforcement effect is common, and there exists “combination-bolt group effect”, the method of arranging each layer bolts divergently by small angle may be better for this situation.

收稿日期: 2016-03-24

基金项目: 国家自然科学基金-云南联合基金重点项目 (U1502232); 高等学校博士学科点专项科研基金 (20135314110005)

作者简介: 张期树 (1993-), 男, 湖南益阳人, 硕士. (457173893@qq.com)

Key words: road engineering; variation bolt length combination; numerical analysis; slope stability; safety factor; sliding surface; anchorage angle combination; combination-bolt group effect

0 引言

随着公路、铁路等交通设施的大量建设, 边坡数量增加, 边坡稳定性和加固问题更加突出, 使得锚杆支护在边坡加固工程中得到了广泛应用^[1]。此外, 锚杆具有成本低、支护效果良好、施工方便等优点^[2]。目前, 工程上通常采用等长锚杆加固边坡, 使设计结果过于保守, 造成了不必要的浪费^[3]。彭文祥等^[4]研究了边坡的锚杆长度、垂直间距、锚杆倾角、布设位置、锚杆直径和砂浆厚度对边坡安全系数的影响; 林杭^[5-7]等分析了边坡的锚杆倾角、布设位置和布设形式对边坡稳定性的影响; 何忠明^[8]等采用数值计算方法, 建立了节理边坡的计算模型, 探讨了结构面厚度对于节理边坡稳定性的影响, 以及锚杆长度、倾角、间距与边坡安全系数的关系; 朱宏伟^[9]等分析了锚杆支护边坡动力响应规律及锚固参数影响。以上研究侧重于分析锚杆参数对边坡稳定性的影响, 且锚杆布设方式单调, 基本按全坡面等长布置, 而关于锚杆组合布设形式研究考虑较少。林杭等探讨了长短相间锚杆布设形式^[3]、单调变化土钉布置形式^[10]以及锚杆对称分布形式^[11]在边坡中的应用; 何忠明^[12]等研究表明二级边坡中采用先短后长相间布置与一级边坡采用短锚杆、二级边坡采用长锚杆这两种形式能较好地加固风化岩质边坡。但这些研究中所提到的组合方案并没有阐述其来源或布设依据。另外, 对于建议加强边坡中下部锚杆这一结论在文中虽有提及而未能在组合方案中加以体现^[3,5], 仅直接运用软件设计一些简单组合方案进行对比分析, 而在边坡不同部位布锚的实际效果方面欠虑。因此, 本文通过有限差分软件FLAC^{3D}, 采用 cable 单元模拟锚杆, 利用强度折减法^[13-15]计算边坡安全系数, 将单层(不同层位)布锚效果运用至(锚长、锚固角)差异化组合布锚形式中, 力求发挥锚杆的最大加固效能, 以期为边坡加固实践提供一种经济化的设计思路。

1 FLAC^{3D}锚固力学模型及材料单元特性

锚杆支护体系通过以下3种方式进行加固: (1) 锚杆自身的轴向作用; (2) 浆-岩界面间剪切作用; (3) 浆体界面法向作用。因此, 全长黏结型注浆锚杆简化为黏结-滑移模型^[16] (如图1所示)。其主

要力学行为由2部分构成: 一是通过具有一定剪切刚度的弹簧来模拟界面的抗剪切作用; 二是采用滑块来模拟界面的黏结作用, 即锚杆在拉拔作用下的抵抗滑移的行为^[17]。

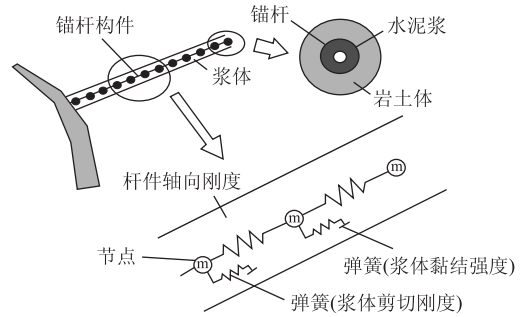


图1 全长注浆加筋体力学模型

Fig. 1 Mechanical model of fully bonded reinforcement

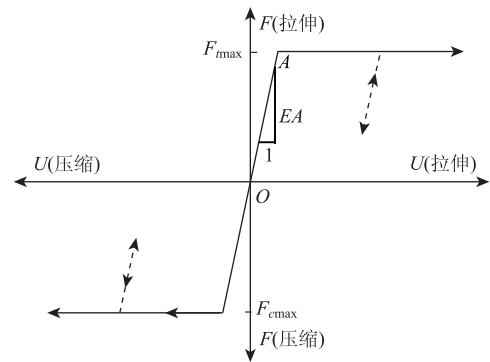


图2 杆体材料力学特性

Fig. 2 Material behavior of bolt

Cable 单元轴向力学行为采用一维弹塑性本构模型描述^[17] (如图2所示):

(1) 弹性OA段: 轴向刚度

$$K = \frac{EA}{L},$$

式中, A 为锚单元横截面积; E 为弹性模量; L 为锚单元长度。

由轴向位移增量 Δu^i 计算轴向力增量 ΔF^i

$$\begin{aligned} \Delta F^i &= -K \Delta u^i, \\ \Delta u^i &= (u_1^{[b]} - u_1^{[a]}) \cdot t_1 + (u_2^{[b]} - u_2^{[a]}) \cdot \\ &\quad t_2 + (u_3^{[b]} - u_3^{[a]}) \cdot t_3, \end{aligned}$$

式中, $u_i^{[a]}$, $u_i^{[b]}$ 为节点位移, $i=1, 2, 3$; $[a]$, $[b]$ 分别为节点 a , b ; t_1 ; t_2 , t_3 分别为锚单元轴向的方向余弦。

(2) A 点以后, 即 cable 单元轴力达屈服状态 (拉伸 $F_{t\max}$ 或压缩 $F_{c\max}$) 时, 轴力不再增加, 轴向刚度下降至 0, 单元可无限伸缩。

cable 包括杆件部分和浆体部分, 由里及外分别为杆件、浆体、岩土体。锚杆或锚索一般是多个 cablese 1 (锚杆构件) 的集合, 每个 cablese 1 与 2 个 node 连接组成 cable element, 其局部坐标系如图 3 所示, 中心轴与 x 轴一致, x 轴正向为 node 1 指向 node 2。与周围岩土体的加固机制为当土体变形后, 外荷载通过浆体作用在 node 上, node 的变形又引起锚杆构件产生力学行为, 结果为反向反作用于土体, 最终实现力学平衡。浆体力学机理体现在锚杆与岩土体界面间的黏结-摩擦, 故采用黏结-滑块模型描述其行为, 锚-浆与浆-岩界面发生相对位移 u_s 时, 通过浆体参数计算响应。杆单元 element 力学机制为杆内的受力变形通过节点 node 传递, 杆单元仅为 2 个自由度, 通过位移 u_1, u_2 呈现, 且杆单元轴力与之对应, 具体内容详见 FLAC^{3D} 手册^[18]。

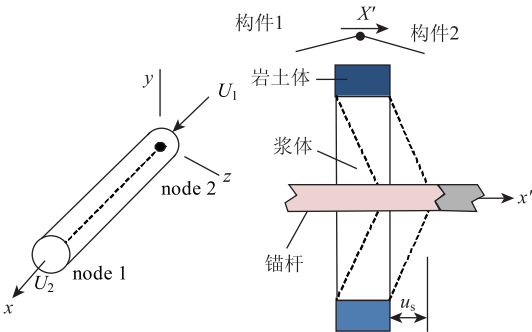


图 3 Cable 单元局部坐标系及锚-岩界面相对位移
Fig. 3 Cable element local coordinate system and relative displacement at interface between anchorage and rock

2 计算模型

本文选用文献 [3] 中的边坡模型作为研究对象, 边坡高 20 m, 坡角为 59°。模型计算范围符合张鲁渝等^[13]提出的最佳模型尺寸要求, 长 × 高 × 厚 = 92 m × 40 m × 1 m, 按平面应变问题分析^[5]。模型尺寸与土体参数见图 1, 锚杆参数如表 1 所示。边界条件为底部固定, 左右水平约束, 上部自由。采用 Mohr-Coulomb 强度准则, 初始应力场按自重考虑。计算收敛准则为最大不平衡力比率满足 1×10^{-5} 的精度要求^[18]。通过计算得到该边坡安全系数为 0.96 (< 1.0), 说明边坡处于临界失稳状态, 需采取一定的支护措施, 故本文拟采用锚杆加固边坡。

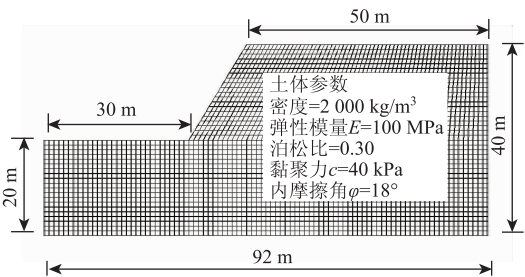


图 4 模型与土体参数
Fig. 4 Model and parameters of soil

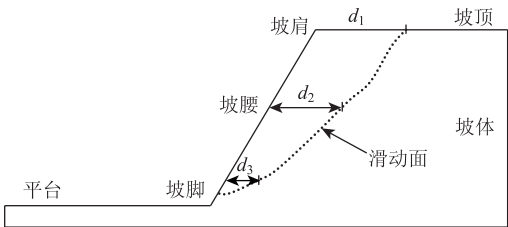


图 5 边坡要素及初始边坡滑动面位置
Fig. 5 Slope factors and initial slope sliding surface position

表 1 锚杆物理力学参数

Tab. 1 Physical and mechanical parameters of bolts					
弹性模量/ GPa	锚杆直径/ mm	黏结刚度/ (MN · m ⁻²)	砂浆黏结 力/kPa	内摩擦角/ (°)	锚孔直径/ mm
200	30	10	35	25	100

3 单层布锚支护效果的差异分析

3.1 边坡层位确定

由均质土坡滑裂面为圆弧状特征可知, 不同坡高处的滑动面迹线与坡面间的相对距离 d 差异明显, 且滑动面迹线可用自编 FISH 程序提取并量化得到。如图 5 所示, 可见差异表现为: 从坡脚剪出口至坡顶拉裂区范围内, d 逐渐增大 ($d_3 < d_2 < d_1$), 且迹线向坡体内侧的延伸速率由快变缓。此外, 坡面组成要素沿坡面向下依次为: 坡肩、坡腰和坡脚。为研究在不同坡体部位 (简称边坡层位) 单独布锚对边坡稳定性的贡献, 按上述差异对边坡分层, 除坡顶垂直向下 2 m 为覆盖层外, 剩余坡体按三要素将边坡大致分成: 坡顶层、坡腰层和坡脚层。

3.2 单层布设方案

在各层位单独布设 3 根相同长度、相同倾角的一组锚杆, 布设形式: 取锚长 L 范围为 2 ~ 20 m (2 m 递增), 锚固角 θ 范围为 $[5^\circ, 50^\circ]$ (5° 递增), 覆盖层以下 18 m 的竖向布锚间距为 2 m, 在坡顶层、坡腰层和坡脚层分别布设锚杆组, 编号分别为 1[#] ~ 3[#], 4[#] ~ 6[#], 7[#] ~ 9[#]。具体布置如图 3 所示 (以 $L = 10$ m, $\theta = 25^\circ$ 为例说明)。

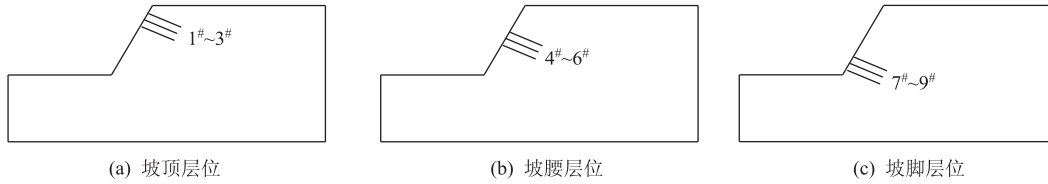


图6 各层位布锚形式

Fig. 6 Forms of arranging bolts in each layer

3.3 结果分析

图7为不同层上锚长与安全系数的结果关系曲线, 可知在坡顶和坡腰层布设2~6 m短锚杆的加固效果甚微。其中存在一段曲线斜率较大的部分, 表明边坡稳定性提升迅速。除坡脚层外, 当锚固角较小时, 坡顶与坡腰层的安全系数随锚长增加不断提高, 且加固效果处于该层位的高水平。各关系曲线均存在一个“拐点”位置, 当锚长超过拐点值后曲线基本趋于水平, 说明此后继续增长锚杆对支护效果已无明显帮助, 可知边坡锚固存在有效锚长 L_{eff} ^[5] (锚固角小的 $L_{\text{eff}} > 20$ m), 且 L_{eff} 在各层上出现的速率不一致, 这跟坡面与滑动面迹线间的相对距离 d 有关。坡顶至坡脚层对应的安全系数域分别为

[1.0, 1.19], [1.0, 1.35] 和 [1.0, 1.27], 可见从整体上来说, 加强坡体中、下部更利于边坡稳定, 尤其在坡腰层布设长锚杆, 这也符合边坡“固脚强腰”的防治思想^[19-20]。此外, 对比图7(a)~(c)可知, 采用短锚杆(2~8 m)加固坡脚层时, 锚固效果立即凸显, 关系曲线斜率大, 安全系数增幅快且达“拐点”(L_{eff})迅速。加之图5中坡脚层处 d_3 较短, 锚杆能快速穿过滑动面并达有效锚长, 故在坡脚层不宜布设长锚杆。

图8为锚固角与安全系数的关系曲线, 可见除几组短锚杆之外, 安全系数均随锚固角增大呈先上升后降低的趋势, 峰值处即为最佳锚固角。还可知, 在未达峰值之前, 关系曲线斜率随锚长增加

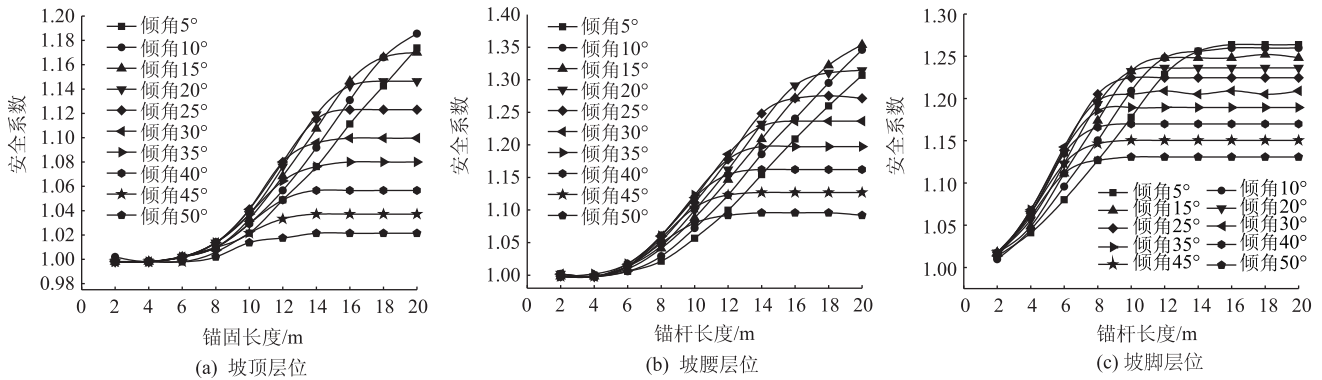


图7 锚长与安全系数的关系

Fig. 7 Relationship between anchoring length and safety factor

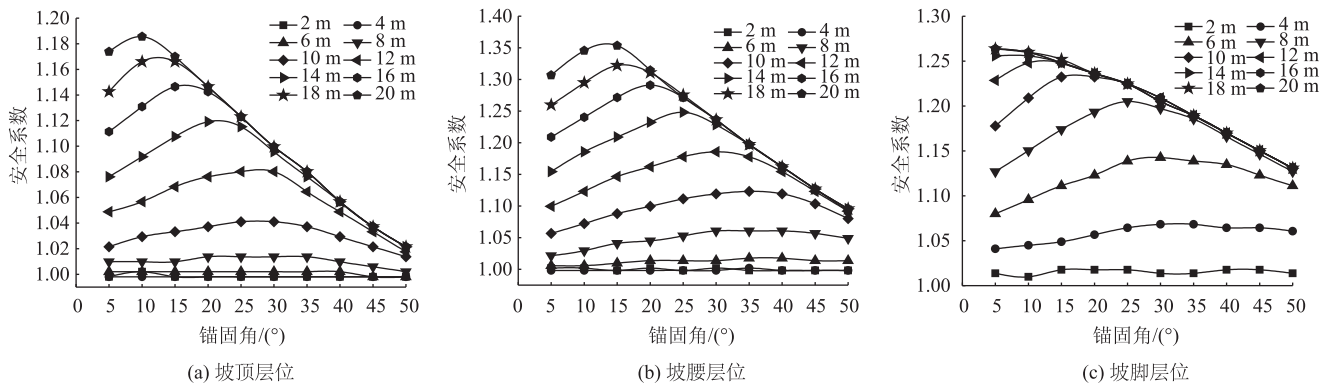


图8 锚固角与安全系数的关系

Fig. 8 Relationship between anchoring angle and safety factor

而增大,由此可知,锚杆越长,锚固效果提升速度越快;最佳锚固角位置随锚长增加而逐渐减小,二者大致呈负线性关系。

图9为锚长4, 10 m和16 m在各层上的关系曲

线,可知除坡顶和坡腰层的4 m锚长外,相同长度锚杆组布设不同层位上所表现出的加固效果差异显著,从而验证了边坡层位的合理性以及下述分层差异化组合布锚研究的必要性。

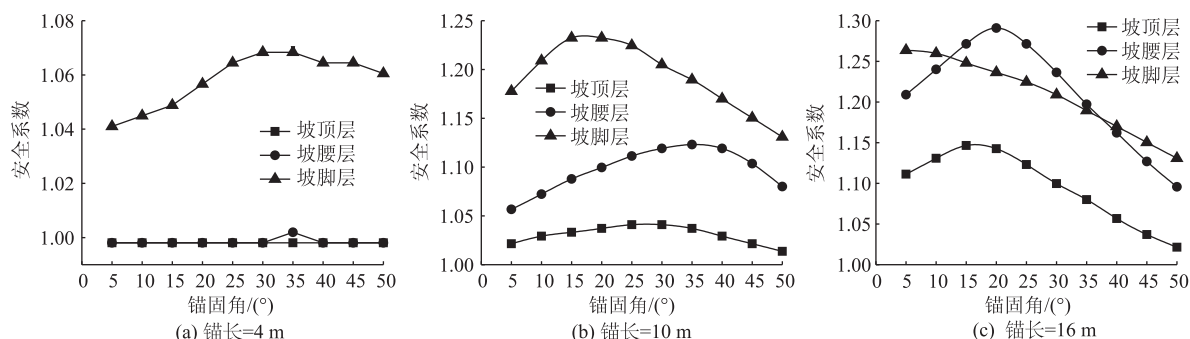


图9 锚杆组在边坡各层位上的关系曲线

Fig. 9 Relation curves of bolt group in each layer of slope

4 差异化锚长组合方案

4.1 方案依据来源与分析思路

为便于研究锚长差异化(即各层锚杆组锚长存在差别)组合形式与边坡稳定性的关系,笔者按长度将锚杆分成:短锚杆(2~6 m)、中长锚杆(8~12 m)、长锚杆(14~18 m)3类,提出从坡顶至坡脚依次将锚杆组布设成:长-中-短型、中-长-短型、短-长-中型三大组合形式。其中,长-中-短型布设依据源于滑动面迹线与坡面间的相对距离 d 的大小(对应 $d_1 > d_2 > d_3$);中-长-短型与短-长-中型布置方式,依据的原则是单层布锚结论中重点加强坡体中下部(尤其坡腰层)锚长更利于边坡稳定且在坡脚层不宜布设长锚杆,在中-长-短型的坡脚层选择布设短锚杆,在短-长-中型的坡脚层选择布设中长锚杆。以下研究内容的分析思路为:通过限定边坡锚杆总使用量 $90\text{ m}^{[3]}$,设竖向间距为2 m,全坡面布3组,共9根锚杆,锚固角 $\theta \in [5^\circ, 50^\circ]$ (5° 递增),按坡顶、坡腰、坡脚层顺序依次固定所在层锚长,然后调整余下两层位间的相对锚长作为对比方案。受篇幅所限,以下9组方案用不同方式进行穿插分析,未能一一详述。另外,将各层锚杆组的锚固角按上述单层最佳锚固角(在下述各图中横坐标为(*)处)作为附加方案加入对比分析(则每种组合有11种锚固角布设工况),由此分析各层锚杆组锚长变化对安全系数的敏感度 S_L 以及锚固角变化对锚固效果及滑动面的影响规律。

4.2 “长-中-短”型

布锚形式如图10所示。

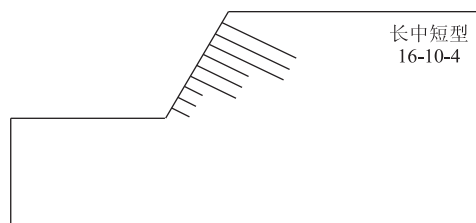


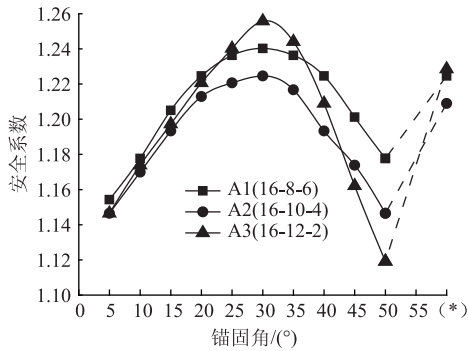
图10 长中短型布设形式

Fig. 10 long-medium-short layout

(1) 固定坡顶层-长锚杆组

坡顶层锚长固定为16 m,然后调整坡腰与坡脚层间的相对锚长,组合形式有:16-8-6(以下简称A1;单位:m),16-10-4(A2),16-12-2(A3)共3种,所得安全系数变化曲线见图11,可知3个组合的安全系数均随锚固角增大呈先升后降的趋势,大致呈拱形分布,且最佳锚固角 θ_{opt} 均在 30° 左右。以下对锚固角 θ 予以分段讨论。当 $\theta < 23^\circ$ 时,安全系数在同一锚固角下的大小为 $A1 > A3 > A2$,彼此差异较小,说明三者锚固效果基本相当,且当坡脚或坡腰层锚杆组达该层锚杆长度类型的最大值时,锚固效果更优;当进一步比较A1与A3时,发现坡脚层布置最长短锚杆将最具优势,故A1最优,A3次之,而A2中坡腰与坡脚层的锚杆组均处于中等长度(无优势锚长),则安全系数相对较低。当 $\theta \in [23^\circ, 36^\circ]$ 时,安全系数大小为 $A3 > A1 > A2$,可见A3中坡腰层的中长锚杆对安全系数大小起重要作用,A1中坡脚层的最长短锚杆作用次之,而A2仍因坡腰与坡脚层的锚长未集中突出,安全系数最低。当 $\theta > 36^\circ$ 时,安全系数优势从坡腰层的中长锚杆逐渐转移至坡脚层的短锚杆。具体为: $\theta \in$

$[36^\circ, 43^\circ]$ 属安全系数优势因素的过渡段; $\theta \in [43^\circ, 50^\circ]$ 时, 安全系数优势则完全过渡至坡脚层短锚杆, 且短锚杆越长优势越明显。



注: (*) 处 A1 - A3 的锚固角组合依次为: $15^\circ - 35^\circ - 30^\circ$, $15^\circ - 35^\circ - 32.5^\circ$, $15^\circ - 30^\circ - 20^\circ$

图 11 固定坡顶层锚长方案

Fig. 11 Scheme of bolt length for fixing slope top layer

(2) 固定坡腰层 - 中长锚杆组

固定坡腰层锚长为 10 m, 然后变化坡顶与坡脚两层间的相对锚长, 组合形式有: 18 - 10 - 2 (B1), 16 - 10 - 4 (B2), 14 - 10 - 6 (B3), 结果见图 9, 可知 3 个组合的最佳锚固角 θ_{opt} 位置差异较大, B1 - B3 分别为 20° , 30° 和 40° 。当 $\theta < 27^\circ$ 并忽略坡腰层的影响时, 可知坡顶层锚长对安全系数差异起主控作用, 表现为坡顶锚杆越长, 安全系数越高。这是由于长锚杆在坡体中的端部随锚长增加逐渐深入坡体内侧, 而端部又决定了滑动面位置, 故滑动面趋近于坡体内侧, 约束浅层滑动, 滑动体增大, 相应地边坡失稳将需要更大的致滑力。因此, 按小锚角布设时宜增长坡顶层长锚杆。 $\theta \in [27^\circ, 33^\circ]$ 为安全系数差异的过渡域。当 $\theta > 33^\circ$ 时, 相同锚固角下, 安全系数差异的主控因素转至坡脚层短锚杆, 短锚杆越长, 坡脚层的布锚区范围越大, 亦即土体强度提高的区域扩大, 则安全系数越高。因此, 采用大锚角布设时, 宜加长坡脚层短锚杆。(注: 图 12 横坐标 (*) 处 B1 - B3 的锚固角组合依次为: $12.5^\circ - 35^\circ - 20^\circ$, $15^\circ - 35^\circ - 32.5^\circ$, $20^\circ - 35^\circ - 30^\circ$)

(3) 固定坡脚层 - 短锚杆组

将坡脚锚长设为定值 4 m, 然后调整坡顶与坡腰间的相对锚长, 具体组合有: 18 - 8 - 4 (C1), 16 - 10 - 4 (C2), 14 - 12 - 4 (C3)。结果曲线见图 13, 可知 C1 - C2 的最佳锚固角 θ_{opt} 分别为 16° , 30° , 36° 。当 $\theta < 21^\circ$ 时, C1 - C3 间安全系数差异主要由坡顶层锚杆引起, 坡顶层锚杆越长, 支护效果越佳,

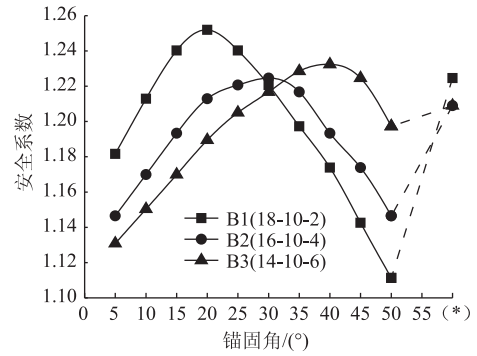
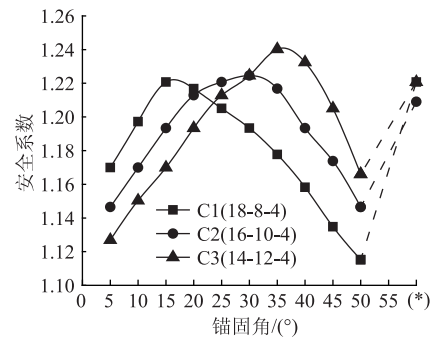


图 12 固定坡腰层锚长方案

Fig. 12 Scheme of bolt length for fixing slope waist layer

且在此范围内三者安全系数均随锚固角增加而增大。因此, 当坡脚层锚长固定时, 宜加长坡顶层长锚杆, 相应地缩短坡腰层锚杆 (即扩大两层间的锚长差, 以提高锚固效果)。同样, $\theta \in [21^\circ, 31^\circ]$ 为安全系数差异控制因素过渡段; 当 $\theta \in [31^\circ, 50^\circ]$ 时, 坡腰层中长锚杆端部随锚固角增大逐渐转向坡体下侧、近坡面靠近, 而其对滑动面位置起支配作用。故安全系数随锚固角增大持续降低, 出现该现象的原因因为坡顶层所布长锚杆已穿过滑动面一定距离并达有效锚长, 且 C1 - C3 在坡脚层所布锚长相同, 则安全系数差异主要由坡腰层锚杆组引起。因此, 可能在某一锚固角下, 边坡破坏模式由深层滑动突变成浅层滑动, 安全系数由此开始降低。



注: (*) 处 C1 - C3 锚固角组合依次为: $20^\circ - 30^\circ - 32.5^\circ$, $15^\circ - 35^\circ - 32.5^\circ$, $12.5^\circ - 35^\circ - 32.5^\circ$

图 13 固定坡脚层锚长方案

Fig. 13 Scheme of bolt length for fixing slope foot layer

综上所述, 长中短型的最大安全系数为 1.252, 比原始边坡仅提高了约 25%。以过渡段作为分界位置, 之前锚固角范围称为小锚角段, 后段范围为大锚角段。该型组合的优化结论见表 2。

4.3 “短 - 长 - 中”型

布锚形式如图 14 所示。

表2 长中短型组合优化结论

Tab. 2 Optimization conclusion of long-medium-short layout combination

固定层位	锚固角类型	
	小锚角	大锚角
坡顶	宜集中增长坡腰层或坡脚层锚长	宜突出坡脚层锚长
坡腰	宜增长坡顶层锚长, 缩短坡脚层锚长	宜突出坡脚层锚长
坡脚	宜增长坡顶层锚长, 缩短坡腰层锚长	宜突出坡腰层锚长

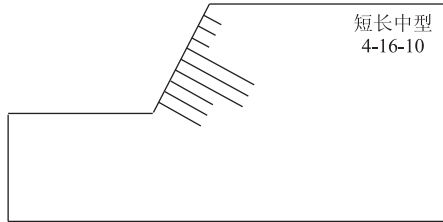


图14 短长中型布设形式

Fig. 14 Short-long-medium layout type

(1) 固定坡顶层 - 短锚杆组

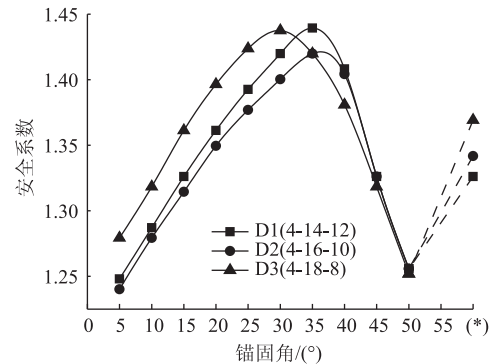
固定坡顶层锚长为4 m, 然后调整坡腰与坡脚层的锚长, 具体组合有: 4-14-12 (D1), 4-16-10 (D2), 4-18-8 (D3)。结果见图15, 最佳锚固角 θ_{opt} 分别为 30° , 35° , 35° , 安全系数域为 $[1.24, 1.44]$, 比原始边坡提高了24%~44%, 较长中短型支护水平高出近1倍。当 $\theta < 32^\circ$ 时, 安全系数大小为 $D3 > D1 > D2$, 在相同锚固角下, D3与D1间的安全系数差值明显大于D1与D2, 说明加强坡腰层比坡脚层的效果突出, 而D2各层上锚长均不集中突出, 故安全系数最低。 $\theta \in [32^\circ, 35^\circ]$ 为过渡段。当 $\theta > 35^\circ$ 时, 三者安全系数差异甚小, 但仍以坡脚层锚长突出为佳。

此结论还可据各层锚杆组轴力占边坡锚杆总轴力的百分比来加以印证, 结果如图16所示, 可见坡顶层锚杆所占比重小; 当 $\theta < 35^\circ$ 时, 坡腰层锚杆轴力比例均随锚固角增大而增加, 且每增长2 m, 比例

上升约15%~20%, 说明坡腰层锚杆越长, 轴力所占比重越大, 其发挥程度越高, 而相对应地坡脚层锚杆在缩短(锚长差), 比例不断下降。

对于D1, 坡腰与坡脚层间所布锚长差异小, 当两层间锚杆轴力比重彼此较为接近时达最佳锚固状态; 而对于D2和D3, 在最佳锚固角下时, 坡腰与坡脚层间比重出现最大差值, 说明最佳锚固状态与坡腰层锚杆轴力最高程度地发挥几乎同步。轴力比重在坡腰层大小依次为 $D3 > D2 > D1$, 在坡脚层为 $D1 > D2 > D3$, 可知D2在这两层位上的轴力发挥程度均一般, 都不具备突出优势, 故安全系数最低。当 $\theta > 35^\circ$ 时, 安全系数大小为 $D1 > D2 > D3$, 但之间三者差异随锚固角增大逐渐变小, 而综合对比图13可得, 在相同锚固角下, 坡脚层轴力水平大小为 $D1 > D2 > D3$, 说明此时以突出坡脚层锚长为佳。

另外, 对D2的总轴力与安全系数数据进行一元线性回归分析^[21], 记总轴力为 X_i , 安全系数为 Y_i , 数据见表3, 得到回归直线方程为 $y = 0.02x + 1.07$, 且线性回归显著, 由此可知, 锚杆总轴力值越大, 边坡的锚固效果越好^[12]。



注: (*) 处 D1-D3 锚固角组合依次为: $20^\circ - 25^\circ - 12.5^\circ$, $20^\circ - 20^\circ - 17.5^\circ$, $20^\circ - 15^\circ - 25^\circ$

图15 固定坡顶层锚长方案

Fig. 15 Scheme of bolt length for fixing slope top layer

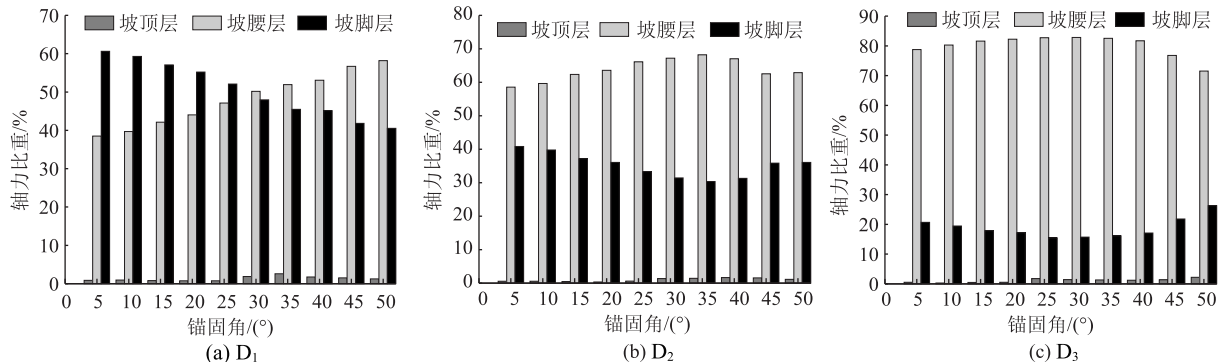


图16 D1-D3在不同锚固角下的各层轴力比重

Fig. 16 Proportion of bolt axial force for D1-D3 in each layer

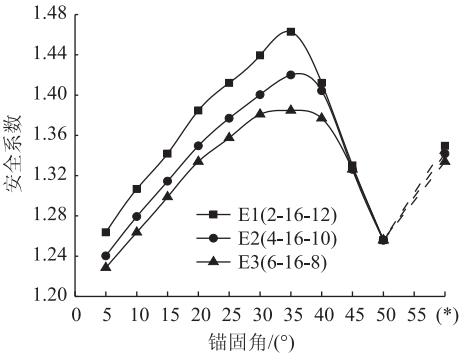
表 3 D2 组合在不同锚固角下锚杆总轴力和安全系数

Tab. 3 Total axial forces and safety factors of D2 combination with different anchoring angles

锚固角/(°)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
总轴力/MN	8.037	8.971	10.336	11.782	13.712	15.126	15.946	15.366	11.981	10.645
安全系数	1.24	1.279	1.314	1.35	1.377	1.4	1.42	1.404	1.326	1.256

(2) 固定坡腰层 - 长锚杆组

组合形式有: 2 - 16 - 12 (E1), 4 - 16 - 10 (E2), 6 - 16 - 8 (E3)。从轴力比重、坡顶层单独布锚结论可知, 布置在坡顶层的短锚杆对边坡的加固作用微弱, 且 3 种组合在坡腰层所布锚长均相同, 则此时考虑坡脚层锚长变化对加固作用的影响即可。由图 17 可知, 在整个锚固角范围内不存在过渡段, 当 $\theta < 45^\circ$ 时, 安全系数大小为 $E1 > E2 > E3$, 由此说明坡脚层中长锚杆越长, 边坡越稳定。当 $\theta > 45^\circ$ 时, 由于坡腰与坡脚层的锚杆均已达到有效锚长以及坡顶层短锚杆对加固作用影响较小, 图中 3 条关系曲线几乎重合, 说明 3 种组合的支护效果基本相当。因此, 当固定坡腰层锚长时, 可适当地缩短坡顶层锚杆, 相应地增长坡脚层锚杆为宜。



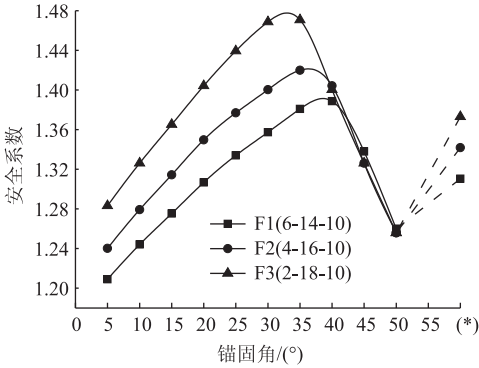
注: (*) 处 E1 - E3 锚固角组合依次为: $20^\circ - 20^\circ - 12.5^\circ$, $20^\circ - 20^\circ - 17.5^\circ$, $20^\circ - 20^\circ - 25^\circ$

图 17 固定坡腰层锚长方案

Fig. 17 Scheme of bolt length for fixing slope waist layer

(3) 固定坡脚层 - 中长锚杆组

组合方式有: 6 - 14 - 10 (F1), 4 - 16 - 10 (F2), 2 - 18 - 10 (F3)。关系曲线见图 18, 可知当 $\theta < 38^\circ$ 时, 安全系数大小为 $F3 > F2 > F1$, 在忽略坡脚层锚杆组影响后, 坡腰层的锚长变化将主导安全系数差异。换言之, 坡顶与坡腰间的锚长差越大, 安全系数越高, 则此时宜突出坡腰层锚长, 且 F3 组合在 $\theta = 33^\circ$ 时安全系数达峰值 1.48, 加固效果十分显著。图中过渡段并不明显。当 $\theta > 41^\circ$ 时, F1 ~ F3 间安全系数基本相同, 这与坡脚层所布锚长相同有关。



注: (*) 处 F1 ~ F3 锚固角组合依次为 $20^\circ - 25^\circ - 17.5^\circ$, $20^\circ - 20^\circ - 17.5^\circ$, $20^\circ - 15^\circ - 17.5^\circ$

图 18 固定坡脚层锚长方案

Fig. 18 Scheme of bolt length for fixing slope foot layer

通过轴力比重分析短长中型加固效果, 可知轴力比重规律与安全系数差异特征匹配。除 D 类方案中存在过渡段之外, 其他两大组合方案中无明显过渡段。采用小锚角布设时, 宜适当加长坡腰层长锚杆, 这点与单层布锚结论相符; 而采用大锚角时, 坡顶层短锚杆加固作用甚微, 且坡腰与坡脚层锚杆均已达有效锚长, 故支护效果趋同。

4.4 中 - 长 - 短型

布锚形式如图 19 所示。

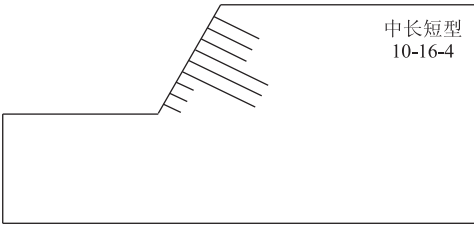


图 19 中长短型布设形式

Fig. 19 Medium-long-short layout type

(1) 固定坡顶层 - 中长锚杆组

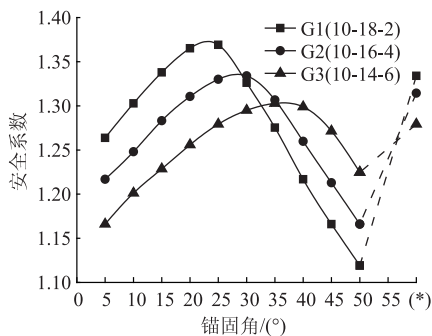
具体组合有: 10 - 18 - 2 (G1), 10 - 16 - 4 (G2), 10 - 14 - 6 (G3)。关系曲线见图 20, 可知当 $\theta < 29^\circ$ 时, 在相同锚固角下, 坡腰与坡脚层间锚长差越大, 安全系数越高; $\theta \in [29^\circ, 36^\circ]$ 为过渡段; 当 $\theta > 36^\circ$ 时, 安全系数差异由坡脚层短锚杆体现, 且锚杆越长, 安全系数越高。限于篇幅, 仅以

G2 为例阐明边坡滑动面迹线及其随锚固角变化时受控于锚杆组的变化规律,通过 FLAC^{3D} 自编 FISH 语言搜索出边坡最大剪应变数据量化得到滑动面迹线,如图 21 所示,对 $\theta \in [5^\circ, 50^\circ]$,以过渡段为分界位置进行分段讨论。当按小锚角布设时,滑动面主要受控于坡腰层长锚杆端部,并随锚固角增大,坡体内锚杆端部均向坡体下方、内侧移动;同时,边坡上缘拉裂区逐渐远离坡肩,剪出口穿出坡脚左侧平台,并与坡脚的距离逐渐拉大,边坡破坏模式逐渐发展为深层滑动。因此,小锚角范围对应为滑动面变缓、滑体变大、后移的过程。当锚固角正好介于过渡段范围内时,坡腰层长锚杆已穿过滑动面一定距离,滑动面位置转由坡顶层中长锚杆的端部控制;一旦锚固角大于过渡段时,边坡破坏模式立刻

由深层滑动突变为浅层滑动,滑动面将受控于坡脚层短锚杆。这是由于锚杆打入土体后形成筋土复合体,当其范围扩展至极限后,若滑动面继续向坡体内侧发展时,则对应的安全系数或所需滑动能量均比临坡面附近的大,从而迫使滑动面转向近坡面位置,变成浅层滑动破坏,具体表现为剪出口由坡脚左侧平台突变至坡脚上方坡面,坡顶拉裂区突变至坡肩后方附近,而此时坡顶与坡腰层锚杆均已穿出滑动面,仅坡脚层短锚杆端部贴近于滑动面。因此,在大锚角情况下,滑动面形状由坡脚层短锚杆主控。G1、G3 滑动面受控于锚杆组的顺序与 G2 类似,仅各层锚杆组控制锚固角范围大小不同而已。所以,在 G 类方案中,随锚固角增加,滑动面迹线所受锚杆组控制的先后顺序为:坡腰层长锚杆-坡顶层中长锚杆-坡脚层短锚杆。

(2) 固定坡腰层-长锚杆组

具体组合有:8-16-6(H1),10-16-4(H2),12-16-2(H3)。结果如图 22 所示,H 类组合的最佳锚固角 θ_{opt} 均在 30° 左右,整个 θ 范围内无过渡段,安全系数大小始终保持为 $H1 > H2 > H3$ 。当 $\theta < 30^\circ$ 时,三者安全系数差异较小(尤其 H2 与 H3)。这是因为边坡稳定基本都由坡腰层长锚杆控制(轴力比重也可阐明,此处不再赘述),而安全系数差异由坡脚与坡顶层间的锚长差产生。当 $\theta > 30^\circ$ 时,H1-H3 间的安全系数差异随锚固角增加而扩大,而此时坡顶层锚杆组已作用不大,仅与坡脚层短锚杆锚长有关,即短锚杆越长,安全系数越高。



注: (*) 处 G1-G3 锚固角组合依次为: $27.5^\circ - 15^\circ - 20^\circ$, $27.5^\circ - 20^\circ - 32.5^\circ$, $27.5^\circ - 25^\circ - 30^\circ$

图 20 固定坡顶层锚长方案

Fig. 20 Scheme of bolt length for fixing slope top

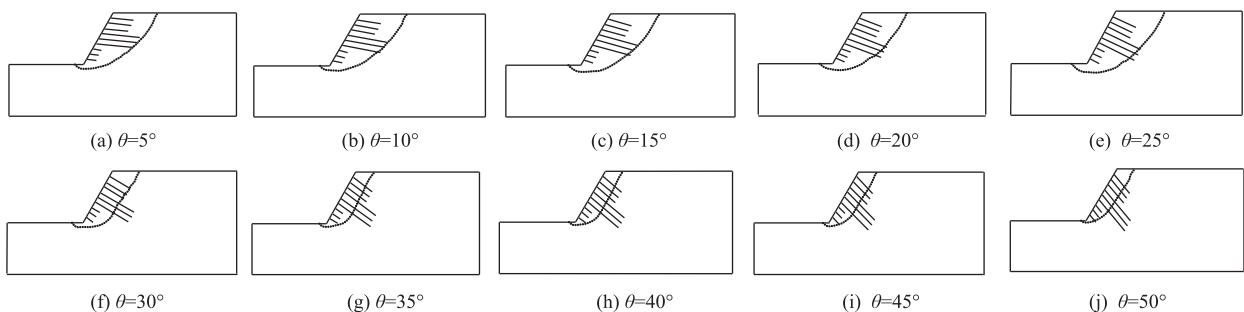
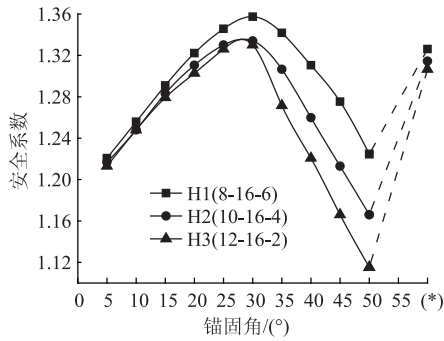


图 21 锚杆组与滑动面的位置关系

Fig. 21 Positional relations between bolt group and sliding surface

为进一步验证上述 $\theta > 30^\circ$ 时所得结论的正确性,通过布设大锚角(以 $\theta = 45^\circ$ 为例)分析坡顶层中长锚杆的锚长变化对安全系数的灵敏度 S_L 。先固定 G1-G3 中坡腰与坡脚层锚长,然后改变坡顶层锚长分别为 8, 10 m 和 12 m,结果见图 23。从横向观察可知,3 条曲线增幅均较小($\Delta_{max} < 0.004$);而从纵

向观察,当固定坡顶与坡腰层锚长,仅改变坡脚层短锚杆的长度时(分别固定图中横坐标 8, 10 m 和 12 m,然后观察对应 y 值),可以清晰地看出三者间安全系数差值($\Delta_{min} > 0.04$)。因此,改变坡脚层锚长比改变坡顶层锚长所得的安全系数变化幅度大一个数量级,而此时坡腰层对应的长锚杆已穿出滑动



注: (*) 处 H1 - H3 锚固角组合依次为: 27.5° - 20° - 30°, 27.5° - 20° - 32.5°, 27.5° - 20° - 20°

图 22 固定坡腰层锚长方案

Fig. 22 Scheme of bolt length for fixing slope waist layer

面并达有效锚长 L_{eff} , 对安全系数差异已无明显影响。因此, 按大锚角布设时, 安全系数差异的主控因素为坡脚层短锚杆。

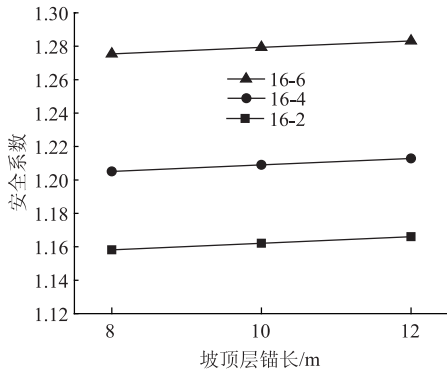


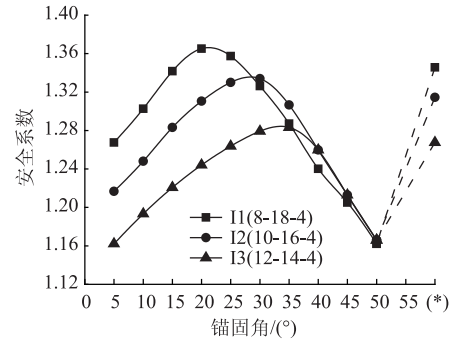
图 23 坡顶层锚长与安全系数的关系

Fig. 23 Relationship between bolt length of slope top and safety factor

(3) 固定坡脚层 - 短锚杆组

具体组合有: 8 - 18 - 4 (I1), 10 - 16 - 4 (I2) 和 12 - 14 - 4 (I3)。结果如图 24 所示, 可见当 $\theta < 28^\circ$ 时, 安全系数大小为 $I1 > I2 > I3$, 说明安全系数与坡腰锚长正相关, 与坡顶锚长负相关, 增长坡腰锚杆组有利于支护; $\theta \in [28^\circ, 36^\circ]$ 为过渡段; 当 $\theta > 36^\circ$ 时, 坡脚层短锚杆控制滑动面位置, 坡顶与坡腰层间的锚长差产生了安全系数差异; 当 $\theta \in [40^\circ, 50^\circ]$ 时, 3 种组合间的安全系数差异是由坡顶层锚长控制, 而 I2 与 I3 的关系曲线基本重合, 故笔者判定此时坡顶 10 m 锚长已达有效锚长 L_{eff} 。为验证该观点的正确性, 变化坡顶锚长分别为 10, 12 m 和 14 m, 选择锚固角 40°, 45° 和 50°, 计算结果如表 4 所示, 可知在同一锚固角下, 增加坡顶锚长安全系数不变, 说明坡顶层 10 m 锚长 $\geq$ 有效锚长

L_{eff} , 那么进一步增长坡顶层锚杆无异于浪费材料, 增加成本。



注: (*) 处 I1 - I3 锚固角组合依次为 27.5° - 15° - 32.5°, 27.5° - 20° - 32.5°, 27.5° - 25° - 32.5°

图 24 固定坡脚层锚长方案

Fig. 24 Scheme of bolt length for fixing slope foot layer

表 4 坡顶层锚长对安全系数的影响

Tab. 4 Effect of bolt length in slope top layer on safety factor

$\theta / (^\circ)$	L_{bolt}		
	10 m	12 m	14 m
40	1.259 765 625	1.259 765 625	1.259 765 625
45	1.208 984 375	1.208 984 375	1.208 984 375
50	1.166 015 625	1.166 015 625	1.166 015 625

综上, 按小锚角布设时, 宜增长坡腰层锚杆; 按大锚角布设时, 宜突出坡脚层锚长。此外, 利用锚杆端部与滑动面的相对位置, 描述中 - 长 - 短型组合布锚时滑动面在整个锚固角内受锚杆组控制的规律为: 坡腰长锚杆 - 坡顶中长锚杆 - 坡脚短锚杆; 还通过分析边坡稳定性对层位锚长变化的灵敏度 S_L 来判定主控因素, 进一步佐证了有关结论的正确性。

4.5 组合 - 群锚效应与最优锚固角组合形式

当各层锚杆组的锚固角 θ 按单层布锚所得的最佳锚固角进行布设 (如 I3 组合按 $27.5^\circ (\theta_{\text{top}}) - 25^\circ (\theta_{\text{waist}}) - 32.5^\circ (\theta_{\text{foot}})$ 布设, 3 层锚杆组的 θ 皆不相同) 时, 且从上述各组合关系曲线图可知, 除 C1 曲线外, 其余组合横坐标 (*) 的安全系数与曲线峰值相比, 仅达中等或中等偏上水平。究其主因在于: 相邻层间锚杆组的锚固角存在差别 (如 I3 的坡顶层 27.5° , 坡腰层 25° , $\Delta\theta = -2.5^\circ < 0$), 使相邻层间锚杆间距逐渐缩小 (如 I3 组合中第 3 根与第 4 根间距 < 2 m), 打破了锚杆的正常布设间距 2 m, 导致各层锚杆组在锚固角组合情况下出现了“组合 - 群锚效应” (本质为群锚效应, 出现该现象是由于相邻层锚固角“组合” ($\Delta\theta < 0$) 时造成锚杆间距缩小, 而 $\Delta\theta > 0$ 时, 加固效果趋好), 即锚杆在彼此

交界层域内产生了应力场重叠,影响了单根锚杆承载力的发挥,进而减小了锚杆的抗拔力并增加位移量^[5],故弱化了支护效果。

为得到组合布锚下的最优锚固角组合形式,经大量合理试算,发现各组合以整体最佳锚固角 θ_{opt} 为基准,再找到并固定此锚固角下的主控层锚杆组,而其他相邻层 $\Delta\theta$ 按 $5^\circ \sim 10^\circ$ 与之岔开(以上层 θ 减小,以下层 θ 增加,目的是使相邻层间的 $\Delta\theta > 0$)布设才能达到更佳的加固效能(安全系数: θ 岔开组合 $\geq$ 整体最佳锚固角 θ_{opt})。最优锚固角组合要根据锚长组合下对应的整体最佳锚固角 θ_{opt} 进行具体优化选择(主要为 $\Delta\theta$ 取值),本质是适当地扩大相邻锚杆组间的布设间距(如C1组合中横坐标(*): $20^\circ - 30^\circ - 32.5^\circ$, $\Delta\theta_1 = 10^\circ > 0$, $\Delta\theta_2 = 2.5^\circ > 0$)。下面以4 m短锚杆、10 m中长锚杆和16 m长锚杆为例进行锚固角的组合优化,部分优化结果如表5所示。

表5 锚固角组合计算结果

Tab. 5 Calculation result of anchorage angle combination

组合形式	$\theta_{top}/(^{\circ})$	$\theta_{waist}/(^{\circ})$	$\theta_{foot}/(^{\circ})$	安全系数
长中短型 16-10-4 (30°) 1.224 609 375	25	30	35	1.228 515 625
	20	30	40	1.220 703 125
	25	30	30	1.228 515 625
	30	30	35	1.224 609 375
短长中型 4-16-10 (35°) 1.419 921 875	30	35	40	1.419 921 875
	35	35	40	1.423 828 125
	30	35	35	1.419 921 875
	25	30	35	1.337 890 625
中长短型 10-16-4 (30°) 1.333 984 375	20	30	40	1.333 984 375
	25	30	30	1.337 890 625
	30	30	35	1.337 890 625
	30	30	40	1.337 890 625

注:()内为整体最佳锚固角 θ_{opt} ;下方为安全系数

5 结论

(1)各组合条件下安全系数均随锚固角呈拱形分布,即存在整体最佳锚固角 θ_{opt} ,大致介于 $20^\circ \sim 40^\circ$ 之间,集中于 30° 附近。与此同时,边坡层位上也存在有效锚长 L_{eff} 。三大组合的整体锚固效果依次为:短长中型>中长短型>长中短型。

(2)边坡滑动面和安全系数差异与锚杆组的布设层位、锚长以及锚固角 θ 均紧密相关,三大组合的滑动面主控层位锚杆组随锚固角 θ 增大的转移规律大致为:长中短型,坡顶-坡腰-坡脚;短长中型,坡腰与坡脚协同-坡顶;中长短型,坡腰-坡顶-坡脚。层间锚长差引起安全系数差异。以过渡

段为分界,差异化锚长组合的一般优化规律为:小锚固角宜突出坡腰层,大锚角宜重视坡脚层,这与单层布锚、固脚强腰结论匹配。

(3)边坡各层锚固角当按单层布锚所得的最佳锚固角组合布设时,存在“组合-群锚效应”。各层锚杆组间的锚固角应适当地选择岔开进行组合,本质为增大锚杆组间的布设间距。

在实际工程中建议合理化采用差异(锚长、锚固角)组合布锚这一经济布置思路。

参考文献:

References:

- [1] 言志信,刘灿,彭宁波,等. 交通荷载作用下锚固公路边坡动力响应[J]. 长安大学学报:自然科学版, 2015, 35(1): 62-67.
YAN Zhi-xin, LIU Can, PENG Ning-bo, et al. Dynamic Response of Anchoring Highway Slope under Dynamic Loads[J]. Journal of Chang'an University: Natural Science Edition, 2015, 30(1): 62-67.
- [2] 陈尤,韦秉旭,唐辉湘. 基于FLAC~(3D)的岩质边坡锚杆优化设计[J]. 中外公路, 2011, 31(6): 85-89.
CHEN You, WEI Bing-xu, TANG Hui-xiang. Optimal Design of Bolt of Rock Slope Based on FLAC~(3D)[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2011, 31(6): 85-89.
- [3] 林杭,陈宝成,范祥,等. 锚杆长短相间布置形式对边坡稳定性的影响[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2015(2): 625-630.
LIN Hang, CHEN Bao-cheng, FAN Xiang, et al. Effect of Bolt with Long-short Layout on Slope Stability[J]. Journal of Central South University: Science and Technology Edition, 2015, 46(2): 625-630.
- [4] 彭文祥,赵明华,袁海平,等. 基于拉格朗日差分法的全长注浆锚杆支护参数优化[J]. 中南大学学报:自然科学版, 2006, 37(5): 1002-1007.
PENG Wen-xiang, ZHAO Ming-hua, YUAN Hai-ping, et al. Parameters Analysis of Grouted Bolts by Lagrangian Difference Method[J]. Journal of Central South University: Science and Technology Edition, 2006, 37(5): 1002-1007.
- [5] 林杭,曹平. 锚杆长度对边坡稳定性影响的数值分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(3): 470-474.
LIN Hang, CAO Ping. Numerical Analysis for Effect of Bolt Length on Stability of Slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(3): 470-474.
- [6] 林杭,曹平,李江腾. 全长注浆锚杆布设方式对边坡稳定性的影响分析[J]. 解放军理工大学学报:自然科

- 学版, 2010, 11 (2): 137-141.
- LIN Hang, CAO Ping, LI Jiang-teng. Effect of Wholly Grouted Cable Layout Mode on Stability of Slope [J]. Journal of PLA University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2010, 11 (2): 137-141.
- [7] 林杭, 钟文文, 熊威, 等. 锚杆长度与边坡坡率对最优锚固角的影响 [J]. 岩土工程学报, 2014, 36 (S2): 7-11.
- LIN Hang, ZHONG Wen-wen, XIONG Wei, et al. Effect of Bolt Length And Slope Rate on Optimum Anchorage Angle [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36 (S2): 7-11.
- [8] 何忠明, 林杭. 节理岩体边坡稳定性的锚杆支护影响分析 [J]. 公路交通科技, 2010, 27 (11): 8-12.
- HE Zhong-ming, LIN Hang. Influence of Bolt Reinforcement on Stability of Rock Jointed Slope [J]. Journal of Highway & Transportation Research & Development, 2010, 27 (11): 8-9.
- [9] 朱宏伟, 项琴. 锚杆支护边坡动力响应规律及锚固参数影响 [J]. 公路交通科技, 2011, 28 (7): 30-34.
- ZHU Hong-wei, XIANG Qin. Dynamic Response of Anchored Slopes and Influence of Anchoring Parameters [J]. Journal of Highway & Transportation Research & Development, 2011, 28 (7): 30-18.
- [10] 林杭, 陈宝成, 钟文文. 单调变化土钉布置形式对边坡稳定性的影响 [J]. 公路, 2014 (6): 41-46.
- LIN Hang, CHEN Bao-cheng, ZHONG Wen-wen. Effect of Monotonous Variation of Nail Layout on the Slope Stability [J]. Highway, 2014 (6): 41-45.
- [11] 林杭, 陈宝成, 钟文文. 锚杆对称分布形式对边坡稳定性影响分析 [J]. 铁道建筑, 2014 (8): 62-65.
- LIN Hang, CHEN Bao-cheng, ZHONG Wen-wen. Effect of Bolt with Symmetrical Layout on Slope Stability [J]. Railway Engineering, 2014 (8): 62-65.
- [12] 何忠明, 蔡军, 胡庆国, 等. 支护参数对锚固风化岩质边坡稳定性影响的数值分析 [J]. 长沙理工大学学报: 自然科学版, 2014, 11 (1): 47-52.
- HE Zhong-ming, CAI Jun, HU Qing-guo, et al. Numerical Analysis of Support Parameters on the Weathered Rock Slope Stability [J]. Journal of Changsha University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2014, 11 (1): 48-52.
- [13] SONG Hong-wei, DUAN Yan-yan, JIANG Jing, et al. Numerical Simulation on Bolted Rock Joint Shearing Performance [J]. Mining Science & Technology, 2010, 20 (3): 460-465.
- [14] 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22 (2): 254-260.
- ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, DENG Wei-dong. Stability Analysis on Jointed Rock Slope by Strength Reduction FEM [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22 (2): 254-260.
- [15] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究 [J]. 水利学报, 2003, 34 (1): 21-27.
- ZHANG Lu-yu, ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, et al. The Feasibility Study of Strength-reduction Method with FEM for Calculating Safety Factors of Soil Slope Stability [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, 34 (1): 21-27.
- [16] 丁万涛, 刘金慧, 张乐文. 不同锈蚀度时海底隧道锚固支护结构岩锚相互作用分析 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2014, 45 (5): 1642-1652.
- DING Wan-tao, LIU Jin-hui, ZHANG Le-wen, et al. Analysis on Interaction of Rock-bolts in Anchorage Support Structure of Subsea Tunnel at Different Corrosion Levels [J]. Journal of Central South University: Science and Technology Edition, 2014, 45 (5): 1642-1652.
- [17] 江文武, 徐国元, 马长年. FLAC_3D 的锚杆拉拔数值模拟试验 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 41 (10): 129-133.
- JIANG Wen-wu, XU Guo-yuan, MA Chang-nian. Numerical Simulation on Pull-tests of a Cable by FLAC_3D [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2009, 41 (10): 129-133.
- [18] Itasca Consulting Group Inc. Theory and Background [M]. Minnesota: Itasca Consulting Group, 2002.
- [19] 邹祖银, 陶连金, 朱占元, 等. 梅城公路 K93+946~K94+082 段边坡稳定性分析与加固研究 [J]. 水文地质工程地质, 2009, 36 (6): 89-93.
- ZOU Zu-yin, TAO Lian-jin, ZHU Zhan-yuan, et al. Stability Analysis and Reinforcement Study for the K93+946~K94+082 Section of the Slope of Meicheng Highway [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2009, 36 (6): 89-93.
- [20] 方薇, 杨果林, 刘晓红, 等. 非均质边坡稳定性极限分析上限法 [J]. 中国铁道科学, 2010, 31 (6): 14-20.
- FANG Wei, YANG Guo-lin, LIU Xiao-hong, et al. The Upper-Bound Limit Analysis of the Inhomogeneous Slope Stability [J]. China Railway Science, 2010, 31 (6): 14-20.
- [21] 汪荣鑫. 数理统计 [M]. 西安: 西安交通大学, 1986.
- WAN Rong-xin. Mathematical Statistics [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1986.