中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1667～1694
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

Banach 空间的保度量 (等距) 映射

献给吴从炘教授 85 华诞

程立新

厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: lxcheng@xmu.edu.cn

收稿日期: 2020-06-10; 接受日期: 2020-08-10; 网络出版日期: 2020-12-15
国家自然科学基金 (批准号: 11731010) 资助项目

摘要 Banach 空间的保度量 (等距) 映射研究自从 Mazur-Ulam 定理 (1932) (Banach 空间之间的保度量满射一定是仿射映射) 开始, 已经进行了 80 多年. 本文主要对 Banach 空间上的保度量映射、或者等距映射及其推广形式—扰动等距和粗等距的研究历史进行回顾, 同时也包含一些新的结果. 本文重点放在近十年来的研究进展, 以及目前该领域所关注的问题介绍.

关键词 等距 (保度量) 扰动等距 粗等距 粗同胚 Banach 空间

MSC (2010) 主题分类 46B04, 46B20, 46B03, 46B08

1 引言

保持度量不变的映射 (简称保度量映射, 也称等距映射) 的研究, 自 1932 年 Mazur 和 Ulam [1] 开始, 已经进行了 80 多年. 究其经久不衰的原因, 一方面是它是泛函分析最深刻最本质的内容之一, 另一方面来源于包括几何学在内的数学其他分支以及包括物理、信息传输和量子信息在内的其他学科的需要. 等距映射, 就最大的范围而言, 必须在 "度量空间" 上才能进行, 而 Banach 空间是度量空间的一个特例. 另一方面, 由于每个度量空间都可以保持度量不变地嵌入到一个 Banach 空间 (参见文献 [2, 引理 1.1]), 因此, 在 Banach 空间上研究保度量映射并不丧失一般性. 称从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的映射 f 为一个保度量映射 (或者叫作等距映射), 如果对所有 $x, y \in X$ 都满足

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|,$$

即任何两点的距离在这个映射下是保持的. 如果 f 还满足 $f(0) = 0$, 即把 X 的原点 0 映成 Y 的原点 0, 则称 f 是标准的. 为了简洁起见, 也称保度量映射为 "等距".

说起 Banach 空间等距映射的研究, 我们自然要提及 80 年前波兰数学家 Mazur 和 Ulam 开历史先河的结果—Mazur-Ulam 定理 [1]: 两个赋范空间之间的满等距映射都是仿射等距映射. 这个定理的

英文引用格式: Cheng L X. Perturbed metric-preserving mappings of Banach spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1667–1694, doi: 10.1360/SSM-2020-0185

© 2020《中国科学》杂志社

意义至少有如下 4 点: (1) 这个定理揭示了一个深刻的事实—欲使两个 Banach 空间之间的映射保持度量不变, 首先要保持线性结构不变. (2) 等距映射研究有着深刻的理论价值和广泛的实际背景. 例如, n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 到其自身的标准等距映射 f 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的正交变换, 或者说 f 就是 $\mathbb{R}^n$ 上的正交矩阵; 再如, "全息摄影" 和 "信息传输" 的数学模型就是一类等距变换. (3) 以此定理为研究出发点, 发展了同样具有深刻的理论意义和更广泛应用背景的研究领域, 如非满等距、扰动等距 (或者, ε- 等距)、扰动等距的稳定性理论及粗等距等. (4) Mazur-Ulam 定理的证明中 "满等距把度量中点映成度量中点" 这一思想和方法对后来的等距 "局部化" 和满 ε- 等距的研究都起着重要的作用.

等距和扰动等距映射的研究, 大致可分为下列几个阶段: 等距 (包括满和非满等距)、扰动等距 (包括满扰动和非满扰动等距) 和粗等距 (包括满粗和非满粗等距). 下面基本按照这一领域研究的时间顺序进行介绍. 由于这一领域的研究历史很长, 尤其是各种局部化的推广内容也非常多, 本文将以 "整个 Banach 空间" 为定义域的等距和扰动等距研究进展为中心. 本文内容组织顺序为: 等距 (第 2 节)、ε- 等距 (第 3 节)、ε- 等距的弱稳定性 (第 4 节)、再论稳定性 (第 5 节)、w^*- 稳定性和万有稳定性 (第 6 节)、粗等距 (第 7 节)、几点注记 (第 8 节).

除特殊声明外, 本文考虑的 Banach 空间 (用 X 表示) 均是实 Banach 空间, X^* 为 X 的对偶空间. 分别用 B_X 和 S_X 表示 X 的闭单位球和单位球面. 用 $B(x,r)$ 表示球心在点 x 处半径为 r 的开球, 在不引起混淆的情形下, 也用它表示相应的闭球. $\overline{A}$、$\mathrm{co}(A)$ 和 $\mathrm{span}(A)$ 分别表示集合 $A\subset X$ 的闭包、凸包和线性包.

2 等距

本节将讨论等距理论研究的发展历程, 它又进一步分成满等距 (也叫等距同构) 和非满等距 (也叫等距嵌入) 两个部分. 满等距理论以 Mazur-Ulam 定理为代表 [1], 而一般等距理论最深刻的当属 Figiel 定理 [3].

2.1 满等距

Banach 空间的等距问题研究的开端, 以下面的 Mazur-Ulam 定理为标志.

定理 2.1 [1] 设 X 和 Y 为 Banach 空间, 且 $f: X\to Y$ 是一个满等距, 则 T 是仿射等距, 即

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\quad x,y\in X,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \alpha+\beta=1. \tag{2.1}$$

因为 f 在整个空间上是仿射的充分必要条件是它限制在 X 的每个球上都是仿射的, 所以, Mazur-Ulam 定理事实上是下面引理的一个推论, 它也是 Mazur-Ulam 定理证明的思想和方法的实质与核心.

引理 2.1 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $z\in X$, $r>0$. 如果 $f: B(z,2r)\to B(f(z),2r)\subset Y$ 是满等距, 则它在 $B(z,r)$ 上一定是仿射的.

证明 设 $x,y\in B(z,r)$. 我们可定义单调递减的集合序列如下:

$$K_0=\left\{u:\|u-x\|=\|u-y\|=\frac{\|x-y\|}{2}\right\},$$
$$K_{n+1}=\left\{u\in K_n: K_n\subset B\left(u,\frac{d_n}{2}\right)\right\},$$

其中

$$d_n = \mathrm{diam}(K_n) \equiv \sup\{\|u-v\| : u, v \in K_n\}.$$

因 $K_0 \subset B(z, 2r)$, 故 f 限制在 K_0 上也是等距.

下面证明 $\bigcap_n K_n = \{\frac{x+y}{2}\}$. 我们可以假设 $\frac{x+y}{2} = 0$, 即 $x = -y$; 否则, 我们可以用下面的复合平移变换 g ($g(u) = f(u + \frac{x+y}{2})$, $u \in B(z - \frac{x+y}{2}, 2r)$) 代替 f. 因此, K_n 是对称的, 即

$$u \in K_n \Leftrightarrow -u \in K_n.$$

我们将用归纳法证明 $0 \in K_n$ 和 $d_{n+1} \equiv \mathrm{diam}(K_{n+1}) \leqslant d_n/2$, $n = 0, 1, \ldots$

事实上, 任意给定 $u \in K_n$, 依 K_n 的对称性可知, $2\|u\| = \|u - (-u)\| \leqslant d_n$, 进而, $K_n \subset B(0, d_n/2)$, $0 \in K_{n+1}$, 并且还有 $u, v \in K_n \Rightarrow v \in B(u, d_n/2)$, 所以, $\|u - v\| \leqslant d_n/2$. 这说明 $d_{n+1} \leqslant d_n/2$. 因此, $\bigcap_n K_n = \{0\}$.

分别用 $B(f(z), 2r)$ 和 $B(f(z), r)$ 代换 $B(z, 2r)$ 和 $B(z, r)$, 用 $f(x), f(y) \in B(f(z), r)$ 代换 $x, y \in B(z, r)$, 以及定义相应的

$$M_0 = \left\{u : \|u - f(x)\| = \|u - f(y)\| = \frac{\|f(x) - f(y)\|}{2}\right\},$$
$$M_{n+1} = \left\{u \in M_n : M_n \subset B\left(u, \frac{d_n}{2}\right)\right\},$$

$d_n = \mathrm{diam}(M_n)$, 因为 f 限制在 K_0 上也是等距, 由此得到 $\bigcap_n M_n = \{\frac{f(x)+f(y)}{2}\}$, $f(K_n) = M_n$, $f(\frac{x+y}{2}) = f(\bigcap_n K_n) = \bigcap_n M_n = \{\frac{f(x)+f(y)}{2}\}$. 由 x 和 y 的任意性可知, f 在 $B(z, r)$ 上一定是仿射的. 证毕. □

下面的结论是 Mankiewicz [4] 给出的.

推论 2.1 设 A 和 B 分别为 Banach 空间 X 和 Y 的子集, 并且它们满足下列条件之一:

(1) A 和 B 为具有内点的凸集;

(2) A 和 B 为非空的连通集.

如果 $f : A \to B$ 是一个等距满射, 则它一定是从 X 到 Y 的某个仿射等距的满射在 A 上的限制.

注 2.1 我们须指出, 当空间 Y 是严格凸空间, 即 $x, y \in S_Y$, $\|x+y\| = 2 \Rightarrow x = y$ 时, Mazur-Ulam 定理不需要 "满射" 条件. 但是在一般情形下是不能去掉的. 例如, 取 $X = \mathbb{R}$, $Y = \ell_\infty^2 \equiv (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, 并通过 $f(t) = (t, \sin t)$ 定义映射 $f : X \to Y$, 则

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \max\{|x-y|, |\sin x - \sin y|\} = |x-y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

但显然 f 不是仿射的.

2.2 等距嵌入

对于一般的等距映射, 除了 Mazur-Ulam 定理之外, 最著名的结果之一就是 Figiel 定理 [3] 了.

定理 2.2 [3] 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $f : X \to Y$ 是一个标准等距, 即满足 $f(0) = 0$, 则存在唯一的一个从 $Y_f \subset Y$ 到 X 的范数为 1 的线性满射 T, 使得 $T \circ f = \mathrm{id}_X$ (X 上的恒同映射), 其中 $Y_f = \overline{\mathrm{span}}[f(X)]$.

Figiel 定理同样揭示了一个深刻的事实: Banach 空间上的标准等距, 不管它的非线性程度有多高, 但总存在一个线性的左逆. 同时, 它的证明也与 Mazur-Ulam 定理的证明一样巧妙而简洁 (参见文献 [2, 定理 14.2]), 并且对后来相关的研究产生了较大的影响; 不同的是, Mazur-Ulam 定理的证明实质是实现局部化命题 "满等距把每个线段的中点映成其像的度量中点", 而 Figiel 定理的证明则是利用 "整体几何结构来导出从共轭空间 X^* 到 Y_f^* 的一个 w^*-w^* 连续的线性等距映射". 另外, 从定理 2.2 中的 $T \circ f = \mathrm{id}_X$ 来看, T 很像一个投影算子, 下面的结论解释了它和投影算子的本质差异.

定理 2.3 (参见文献 [5, 推论 4.5]) 设 $f: X \to Y$ 为一个标准等距, 则有一个范数为 1 的投影算子 $P: Y_f^{**} \to N^\perp$ 使得

$$Pf: X \to N^\perp \subset Y^{**} \tag{2.2}$$

为一个线性等距, 其中 $P = V^*F^{**}$, V 为文献 [6, 定理 2.3] 中 $Y^*/N \to X^*$ 的线性满等距, N 为文献 [6, 定理 2.3] 中通过 f 的不变平均导出的闭子空间, F 为相应于 f 的 Figiel 算子, 即 $Ff = I_X$ 且 $\|F\| = 1$. 特别地, 当 Y 自反时, $Pf: X \to N^\perp$ 是一个线性满等距.

注意, $N^\perp$ 与 X^{**} 线性等距, 当 X 不自反时, Pf 是从 "小" 空间到 "大" 空间上的投影.

问题 2.1 既然非满等距映射不一定是仿射的, 那么, 如果有一个从 X 到 Y 的等距 f, 是否一定有一个从 X 到 Y 的线性等距 g 呢?

当 X 是不可分空间时, 很早就有了反例. 2003 年, Šemrl 和 Väisälä [7] 证明了, 如果 Y 是一致凸空间, 则对于每个从 X 到 Y 的 ε- 等距 (特别地, 等距) f, 下列极限 G 就是一个从 X 到 Y 的线性等距:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n}, \quad x \in X.$$

同年, Godefroy 和 Kalton [8] 证明了, 当 X 为可分空间时, 答案是肯定的; 令我们意外的是, 当 X 是不可分的 "好" 空间时, 答案是否定的. 在叙述 Godefroy-Kalton 定理之前, 我们回顾弱紧生成 (weakly compactly generated, WCG) 空间的概念. 一个 Banach 空间 X 称为 WCG 空间, 如果有一个弱紧集 $K \subset X$ 使得 $\mathrm{span}(K)$ 在 X 中稠密. 例如, 可分空间和自反空间等都是 WCG 空间.

定理 2.4 [8] 设 X 和 Y 为 Banach 空间.

(1) 若 X 可分并且存在一个从 X 到 Y 的等距映射, 则一定存在一个从 X 到 Y 的线性等距映射;

(2) 如果 X 是不可分的弱紧生成空间, 则存在一个 Banach 空间 Y, 使得 X 不能线性同胚 Y 的任何子空间, 但存在一个从 X 到 Y 的等距映射.

这个定理的价值不仅在于肯定地回答了一个长期的公开问题 (open problem), 更在于彻底否定了不可分空间. 对于任何不可分的好的空间, 如不可分的自反空间, 甚至是不可分的 Hilbert 空间, 都存在一个 Banach 空间 Y 使得 X 能够等距嵌入到 Y 之中, 但 X 不仅不能线性等距嵌入 Y, 甚至不能线性嵌入 Y, 这是很令人意外的.

在这个问题上, Cheng 和 Zhou [6] 用 $\ell_\infty(X)$ 的 "不变平均" 方法, 以及 Cheng 等建立的弱稳定性公式 (参见文献 [9, 主引理]), 证明了上述定理 2.4 中的 Y 不可能是自反的. 因此, 可以看作对 Godefroy-Kalton 定理的补充.

定理 2.5 [6] 设 X 和 Y 为 Banach 空间. 如果存在从 X 到 Y 的 ε- 等距 (特别地, 等距), 则存在 Y^* 的一个闭子空间 N 和一个线性满等距 $V: X^* \to Y^*/N$, 因此,

$$U \equiv (V^*)^{-1}: X^{**} \to N^\perp \subset Y^{**}$$

是一个共轭满等距. 当 X 自反时, U 便是一个从 X 到 Y 的线性等距.

关于等距 (包括 ε- 等距) 与线性等距之间的关系及局部化问题可参见文献 [10–15].

3 ε- 等距

扰动等距, 或者 ε- 等距, 是等距概念的推广, 它是 Hyers 和 Ulam [16] 于 1945 年引入的; 对于某个 $\varepsilon \geqslant 0$, 一个映射 $f: X \to Y$ 被称为一个 ε- 等距, 如果它满足

$$|\|f(x)-f(y)\|-\|x-y\|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, x, y \in X. \tag{3.1}$$

0- 等距, 即当 $\varepsilon = 0$ 时的 ε- 等距, 就是等距. 称满足 $f(0)=0$ 的 ε- 等距 f 是标准的. 相比等距, ε- 等距的背景更加广泛. 最直观的背景就是测量: 我们把被测量的点放在一个 Banach 空间 X, 观测结果放在另一个 Banach 空间 Y 进行处理. 要测量的两点 $x, y \in X$ 的实际距离为 $\|x-y\|$, 而测量的距离为 $\|f(x)-f(y)\|$, 测量误差界 ε 根据测量精度和观测经验往往很容易给定. 这就是一个典型的 ε- 等距模型. Hyers [17] 和 Ulam [18] 还分别研究了与 ε- 等距类似但稍有不同的问题.

3.1 满 ε- 等距

1945 年, Hyers 和 Ulam [16] 引入了 ε- 等距概念, 同时提出了下面的问题, 这个问题从提出到 1995 年最终完全解决, 整整经历 50 年的过程.

问题 3.1 是否对于每对 Banach 空间 X 和 Y 都存在一个常数 $\alpha = \alpha(X, Y) > 0$, 使得对于任一标准的满 ε- 等距 f, 都存在一个线性满等距 $U: X \to Y$ 使得

$$\|f(x) - Ux\| \leqslant \alpha\varepsilon, \quad \forall\, x \in X? \tag{3.2}$$

从此以后, 在 "扰动等距" 这方面的研究便开始了. 如果问题 3.1 的答案是肯定的, 那么它就是 Mazur-Ulam 定理从等距到扰动等距的成功推广, 我们也可以把这个结论叙述为每个满的标准 ε- 等距都与某个线性等距只相差一个有界量. Hyers 和 Ulam [16] 首先证明了, 当 X 和 Y 均是 Hilbert 空间时, 问题 3.1 的答案是肯定的, 并且 $\alpha(X, Y) \leqslant 10$. Bourgin [19] 证明了, 当 X 和 Y 均为一致凸空间时, 答案也是肯定的, 并且常数 $\alpha(X, Y) \leqslant 12$. 1947 年, Hyers 和 Ulam [20] 进一步证明在下面的特殊情形下, 答案也是肯定的, 并且 $\alpha(X, Y) \leqslant 21$: 当 $X = C(K_1)$ 和 $Y = C(K_2)$ (紧 Hausdorff 拓扑空间 K_1 和 K_2 上实连续函数空间) 时, $f: X \to Y$ 除了是一个 ε- 等距外还是一个 X 到 Y 同胚映射. 1949 年, Bourgin [21] 证明了上述结论在去掉 f 的连续性和单射的条件下仍然成立. 1975 年, Bourgin [22] 证明了答案对于有限维 "多面体空间" 是肯定的 (多面体空间就是其单位球是一个多面体, 或者等价地, 单位球的端点为有限多个有限维空间), 而 Bourgin [23] 在 1978 年研究了二维多边形空间.

1978 年, Gruber [24] 对这一问题的研究取得了突破的进展, 证明了 "若 $f: X \to Y$ 是一个标准的满 ε- 等距, $U: X \to Y$ 是一个标准等距, 并且满足

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x) - U(x)\|}{\|x\|} = 0,$$

则 U 一定是满射, 且

$$\|f(x) - U(x)\| \leqslant 5\varepsilon, \quad \forall\, x \in X.$$

特别地, 如果 $\alpha(X,Y)<\infty$ 存在, 则 $\alpha(X,Y)\leqslant 5$". Gruber 同时证明了 $\alpha(X,Y)\leqslant 5$ 对有限维空间 X 与 Y 之间的标准满 ε- 等距总成立. 1983 年, Gevirtz [25] 在 Gruber [24] 的基础上终于给出了这个问题的完全肯定的答案: 对任何两个 Banach 空间 X 和 Y, 都存在常数 $\alpha(X,Y)\leqslant 5$, 使得对任何一个标准的满 ε- 等距 $f:X\to Y$, 都有线性满等距 $U:X\to Y$ 使得 (3.2) 成立.

1985 年, Lindenstrauss 和 Szankowski [26] 研究了被称为近似等距 (approximate isometry) 的大尺度扰动等距映射. 设 $f:X\to Y$ 为满射. 函数 $\alpha_f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 定义如下:

$$\alpha_f(t)=\sup\{\|f(x)-f(y)\|-\|x-y\|:\|x-y\|\wedge\|f(x)-f(y)\|\leqslant t\},\quad t>0. \tag{3.3}$$

他们采用了一种新颖的能够做到 "精确估计" 的方法, 证明了当 $\int_1^\infty\frac{\alpha_f(t)}{t^2}dt<\infty$ 时, 一定存在一个线性等距的满射 $U:X\to Y$ 使得

$$\|f(x)-U(x)\|=o(\|x\|),\quad \|x\|\to\infty.$$

1995 年, Omladič 和 Šemrl [27] 综合了 50 年来对这一问题研究的所有有效方法, 并用他们自己的特殊技巧, 最终给出了问题 3.1 中的最优估计 $\alpha=2$ (参见文献 [2, 第 360 页]).

定理 3.1 [27] 如果 $f:X\to Y$ 是标准的满 ε- 等距, 则存在一个满的线性等距 $U:X\to Y$ 使得

$$\|f(x)-Ux\|\leqslant 2\varepsilon,\quad \forall\, x\in X. \tag{3.4}$$

上述定理的证明可分成两个部分: 第一部分的总体思路参考了文献 [25], 证明了满 ε- 等距的渐近行为非常像等距映射, 用到了 Gevirtz [25] 所引入的 δ- 满 ε- 等距的概念和方法, 以及 Vogt [28] 的处理方法; 还采用了 Lindenstrauss 和 Szankowski [26] 的方法, 证明了每个满 ε- 等距都可以用既单且满的 "近似等距" 逼近. 本文的创新性重点体现在证明的第二部分. 主要参考了 Gruber [24] 的方法, 通过对此方法的改进, 从而得到满 ε- 等距到等距映射距离估计的最佳常数.

一般而言, 上述定理中假设映射为满射的条件是不能够去掉的. 关于怎样 "弱化" 满射的假设条件的讨论, 包括 "几乎满" 的假设条件下的结果, 可参见文献 [29–33].

3.2 ε- 等距的稳定性

非满 ε- 等距的研究 1995 年才开始, 主要针对的是稳定性.

定义 3.1 [34] 设 X 和 Y 为 Banach 空间.

(1) 称一标准 ε- 等距 $f:X\to Y$ 为稳定的, 如果存在有界线性算子 $T:Y_f\to X$ 以及 $\beta>0$, 使得

$$\|Tf(x)-x\|\leqslant\beta\varepsilon,\quad \forall\, x\in X, \tag{3.5}$$

其中 $Y_f=\overline{\mathrm{span}}[f(X)]$, 此时也称 f 是 β- 稳定的;

(2) 如果每个标准 ε- 等距 f 都是 β- 稳定的, 并且 β 不依赖于 f, 则称 (X,Y) 对于 ε- 等距是稳定的.

从稳定性的定义不难看出, 它的出发点是研究广义的 Figiel 定理, 标准 ε- 等距 $f:X\to Y$ 是稳定的, 等价的说法就是它有一个连续线性的 "伪" 左逆.

Qian [34] 率先研究了一般标准 ε- 等距的稳定性, 证明了对于某个 $1<p<\infty$, 如果 X 和 Y 都是 L_p 空间, 则 (X,Y) 对于 ε- 等距是稳定的. 2003 年, Šemrl 和 Väisälä [7] 在同样的条件下证明了 L_p 空间是 2- 稳定的, 即如下定理.

定理 3.2 [7] 设 X 和 Y 都是 L_p 空间 $(1 < p < \infty)$, 则存在范数为 1 的线性算子 $T: Y \to X$ 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{3.6}$$

根据 Qian-Šemrl-Väisälä 定理, 我们可以把 L_p 空间看作 Hilbert 空间以外的、对于 ε- 等距是稳定的空间的例子. 但另一方面, Qian 又给出下面的反例.

例 3.1 [34] 设 Y 是一个可分空间, 但具有一个不可补的闭子空间 X. 注意此时必有 $X^\sharp = Y^\sharp$ ($A^\sharp$ 表示集合 A 的基数). 选取从 Y 到 B_X 的任何一个满足把 0 变成 0 的双射 g (不一定连续), 则

$$f(x) = x + \frac{\varepsilon}{2} g(x), \quad x \in X \tag{3.7}$$

就是一个标准的 ε- 等距, 并且 $Y_f = Y$. 如果存在线性满射 $T: Y \to X$ 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant \beta\varepsilon, \quad x \in X,$$

则 $T: Y \to X$ 一定是投影算子. 因为 X 在 Y 中不可补, 所以 T 一定是不连续的.

定理 3.3 若 Banach 空间 Y 不线性同胚于 Hilbert 空间, 则对任何正数 ε, 一定存在 Y 的一个闭子空间 X 和不稳定的标准 ε- 等距 $f: X \to Y$.

证明 因为 Y 不线性同胚于 Hilbert 空间, 所以它一定有一个不与 Hilbert 空间线性同胚的可分闭子空间 Z. 根据 Lindenstrauss 和 Tzafriri 的一个著名结论 [35] 可知, 一定存在 Z 的一个不可补闭子空间 X. 再利用上述反例即可. □

从上述定理和反例可以看出, Banach 空间 ε- 等距稳定性理论研究一开始就遭遇了 "毁灭性" 打击. 最主要原因之一是, 在这个概念框架之下, 只有返回到 Hilbert 空间才有可能得到稳定性的结论. 另外一个原因是, 在一般的 Banach 空间, 哪怕是 $f = \mathrm{id} + \varepsilon g$ $(g: X \to B_Y)$ 这样简单的映射, 也极有可能是不稳定的. 因此, 下列问题就凸显出来.

问题 3.2 是否可以建立一个具有普遍适用性的 "弱稳定" 性概念?

问题 3.3 是否可以建立一个能把上述反例中的这一类 "简单映射" 作为 "稳定映射" 在内的 "稳定" 性概念?

问题 3.4 如果 Banach 空间 X 与 Y 之间有一个非满 ε- 等距, 那么是否一定有 X 与 Y 之间的等距?

4 ε- 等距的弱稳定性

4.1 弱稳定估计式

Cheng 等 [9] 率先研究了问题 3.1, 并得到了如下的弱稳定性估计式.

定理 4.1 [9] 设 $f: X \to Y$ 是一个标准的 ε- 等距, 则 $\forall\, x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| \equiv r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant \kappa r\varepsilon, \quad \forall\, x \in X, \tag{4.1}$$

其中 $\kappa = 4$.

最近, Cheng 和 Dong [36] 进一步证明了上述定理中的常数 $\kappa = 4$ 可优化为 $\kappa = 3$, 并且在一般情形下这个常数是最优的. 因此, 他们纠正了文献 [37] 中最优常数为 $\kappa = 2$ 的结论, 但当 Y^* 严格凸时, 仍然有 $\kappa = 2$.

由于弱稳定性估计式在 ε- 等距理论和应用研究中起着核心作用, 并且它的证明也不同于前人的做法, 我们将给出定理 4.1 的 (4.1) 中 $\kappa = 3$ 的完整证明. 为此, 首先回顾超滤子极限的概念. 设 Ω 为一个非空集合, $\mathfrak{F} \subset 2^{\Omega}$ 为 Ω 的一个子集族. 如果它满足 $F, G \in \mathfrak{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathfrak{F}$; $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset G \subset \Omega \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 Ω 上的一个滤子 (filter). 如果它还满足 $\bigcap\{F \in \mathfrak{F}\} = \emptyset$, 则称 $\mathfrak{F}$ 为 Ω 上的一个自由滤子. 一个 (自由) 滤子称为一个 (自由) 超滤子 (ultrafilter), 如果 $\forall A \subset \Omega$ 都有且只有下列情形之一出现: $A \in \mathfrak{F}$, $\Omega \setminus A \in \mathfrak{F}$. 通常用 $\mathfrak{U}$ 表示一个 (自由) 超滤子. 设 T 为一个 Hausdorff 拓扑空间, $\mathfrak{U}$ 为 Ω 上的一个超滤子, $f : \Omega \to T$ 为一个映射. 称 $\tau \in T$ 为 f 的 $\mathfrak{U}$ 极限 (记为 $\lim_{\mathfrak{U}} f = \tau$), 如果对于 τ 的任何开邻域 $V \subset T$, 都有 $\{\omega : f(\omega) \in V\} \in \mathfrak{U}$.

由上述定义, 不难验证下述性质.

性质 4.1 设 $\mathfrak{U}$ 是 Ω 上的一个自由超滤子, K 为紧 Hausdorff 空间, 则对任何映射 $f : \Omega \to K$, 超滤子极限 $\lim_{\mathfrak{U}} f$ 均存在.

下一个引理是 Šemrl 和 Väisälä (参见文献 [7, 定理 2.1]) 从 $\mathbb{R}^+$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个延拓, 也是文献 [9, 引理] 的一个优化. 应该说, 这一引理的证明体现了 Figiel 定理 [3] 证明方法的核心思想.

引理 4.1 [36] 设 Y 为 Banach 空间, $g : \mathbb{R} \to Y$ 为标准 ε- 等距, $\mathfrak{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\varphi_n \in S_{Y^*}$ 满足

$$|\langle \varphi_n, g(n) - g(-n) \rangle| = \|g(n) - g(-n)\|. \tag{4.2}$$

若记 $\varphi = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \varphi_n$, 则

$$|\langle \varphi, g(t) \rangle - t| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

证明 由题设条件 (4.2) 得

$$\langle \varphi_n, g(n) \rangle = \langle \varphi_n, g(n) - g(-n) \rangle + \langle \varphi_n, g(-n) \rangle \geqslant \|g(n) - g(-n)\| - 2\varepsilon.$$

进而,

$$\langle \varphi_n, g(-n) \rangle = \langle \varphi_n, g(n) \rangle - \|g(n) - g(-n)\| \leqslant -n + 2\varepsilon. \tag{4.4}$$

因此, $\forall t \in [0, n]$,

$$t + \varepsilon \geqslant \langle \varphi_n, g(t) \rangle = \langle \varphi_n, g(n) \rangle - \langle \varphi_n, g(n) - g(t) \rangle \geqslant t - 3\varepsilon. \tag{4.5}$$

再由 (4.4) 可知,

$$-t - \varepsilon \leqslant \langle \varphi_n, g(-t) \rangle = \langle \varphi_n, g(-n) \rangle + \langle \varphi_n, g(-t) - g(-n) \rangle \leqslant -t + 3\varepsilon. \tag{4.6}$$

(4.5) 和 (4.6) 联立可得

$$|\langle \varphi_n, g(t) - t \rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall t \in [-n, n]. \tag{4.7}$$

令 $\varphi = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \varphi_n$, 则 $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_n\| = 1$, 并且由 4.7 可得

$$|\langle \varphi, g(t)\rangle - t| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

这又进一步导出 $\|\varphi\| \geqslant 1$. 证毕. □

引理 4.2 [36] 设 $f: X \to Y$ 为一个标准 ε- 等距, $z \in S_X$ 为 X 的 Gâteaux 可微点并记其 Gâteaux 导数为 $x^* = d\|z\|$, 则有 $\varphi \in S_{Y^*}$ 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.8}$$

证明 对于上述 Gâteaux 可微点 $z \in S_X$, 令 $g(t) = f(tz)$, $t \in \mathbb{R}$, 则 $g: \mathbb{R} \to Y$ 是一个标准的 ε- 等距. 设 $\varphi_n \in S_{Y^*}$ 使得

$$\langle \varphi_n, g(n) - g(-n)\rangle = \|g(n) - g(-n)\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

根据引理 4.1, 有

$$|\langle \varphi, f(tz)\rangle - t| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

以及

$$2n + \varepsilon \geqslant \langle \varphi_n, f(nz) - f(-nz)\rangle = \|f(nz) - f(-nz)\| \geqslant 2n - \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.10}$$

其中 $\varphi = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \varphi_n$. 注意 $\langle \varphi_n, f(-nz)\rangle \geqslant -n - \varepsilon$, 因此,

$$n + \varepsilon \geqslant \langle \varphi_n, f(nz)\rangle = \|f(nz) - f(-nz)\| + \langle \varphi_n, f(-nz)\rangle \geqslant n - 2\varepsilon, \tag{4.11}$$

并且

$$n + \varepsilon \geqslant -\langle \varphi_n, f(-nz)\rangle = \|f(nz) - f(-nz)\| - \langle \varphi_n, f(nz)\rangle \geqslant n - 2\varepsilon. \tag{4.12}$$

因为 $d\|z\| = x^*$, 由 (4.11) 可知, 对任何 $x \in X$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} -\langle x^*, x\rangle \leftarrow \frac{\|z - \frac{1}{n}x\| - \|z\|}{\frac{1}{n}} &= \|nz - x\| - n \geqslant (\|f(nz) - f(x)\| - \varepsilon) - n \\ &\geqslant \langle \varphi_n, f(nz) - f(x)\rangle - (n + \varepsilon) \\ &\geqslant \langle -\varphi_n, f(x)\rangle - 3\varepsilon \to \langle -\varphi, f(x)\rangle - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

这样证明了

$$\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle \leqslant 3\varepsilon. \tag{4.13}$$

由 (4.12) 可知, 对任何 $x \in X$, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \langle x^*, x\rangle \leftarrow \frac{\|z + \frac{1}{n}x\| - \|z\|}{\frac{1}{n}} &= \|nz + x\| - n \\ &\geqslant (\|f(x) - f(-nz)\| - \varepsilon) - n \end{aligned}$$

$$\geqslant \langle \varphi_n, -f(-nz)+f(x)\rangle - (n+\varepsilon)$$
$$\geqslant \langle \varphi_n, f(x)\rangle - 3\varepsilon \to -\langle \varphi, f(x)\rangle - 3\varepsilon,$$

这样又证明了

$$\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle \geqslant -3\varepsilon. \tag{4.14}$$

(4.13) 和 (4.14) 联立即得 (4.8). 证毕. □

Gâteaux 可微性空间 (Gâteaux differentiability space, GDS) 的概念是 Larman 和 Phelps [38] 于 1979 年引入的. Banach 空间 X 称为一个 Gâteaux 可微性空间, 如果定义在其上的每个连续凸函数都在 X 的一个稠密子集中处处 Gâteaux 可微. 例如, 每个可分的 Banach 空间都是 Gâteaux 可微性空间 (参见文献 [39]). 设 A 为 X 的对偶空间 X^* 中的非空有界子集. 称 $x^* \in A$ 是 A 的一个 w^*- 暴露点, 如果存在 $x \in X$ 使得 $\langle x^*, x\rangle > \langle y^*, x\rangle$, $\forall y^* \in A \setminus \{x^*\}$. 此时, 称 x 为 A 的一个 w^*- 暴露泛函并且在点 x^* 处 w^*- 暴露 A.

性质 4.2 [40] x 是 X 的 Gâteaux 光滑点并且 $d\|x\| = x^*$ 当且仅当 $x^* \in S_{X^*}$ 是 B_{X^*} 的 w^*- 暴露点, x 为 B_{X^*} 的一个 w^*- 暴露泛函并且在点 x^* 处 w^*- 暴露 B_{X^*}.

下面的定理可参见文献 [40], 称它为 Larman-Phelps-Fabian 定理. Larman 和 Phelps [38] 证明了 "Banach 空间 X 是 GDS 当且仅当 $X^* \times \mathbb{R}$ 中的每个非空 w^*- 紧凸子集都是子集 w^*- 暴露点的 w^*- 闭凸包". 而 Fabian 借用最优化理论中 "罚函数" 的方法证明了它等价于 "X^* 中的每个非空 w^*- 紧凸子集都是子集 w^*- 暴露点的 w^*- 闭凸包", 并将这个证明通过私人通信告诉了 Phelps.

定理 4.2 Banach 空间 X 是 Gâteaux 可微性空间当且仅当其对偶空间 X^* 中的每个非空 w^*- 紧凸子集都是子集 w^*- 暴露点的 w^*- 闭凸包.

准备工作已经完毕, 下面将给出定理 4.1 中 $\kappa = 3$ 的证明, 也就是下面的定理.

定理 4.3 [36] 设 $f: X \to Y$ 是一个标准的 ε- 等距, 则对任意的 $x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| \equiv r = \|x^*\|$ 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3r\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.15}$$

证明 设 $f: X \to Y$ 为一个标准的 ε- 等距. 我们有 $\mathfrak{F}$ 表示 X 的所有有限维子空间所构成的集族, 则对任意的 $F \in \mathfrak{F}$, (f 限制在 F 上) $f_F: F \to Y$ 仍然是一个标准的 ε- 等距. 因为 F 是一个 Gâteaux 可微性空间, 根据定理 4.3 和性质 4.2 可知, $F^* = X^*/F^\perp$ 的单位球 B_{F^*} 是自身 w^*- 暴露点的 w^*- 闭凸包, 即 B_{F^*} 的 w^*- 暴露点集 w^*-exp(B_{F^*}) 的凸包在 B_{F^*} w^*- 稠密 (因为 F 是有限维空间, 实际上在范数拓扑意义下稠密). 任取 $x_F^* \in w^*$-exp(B_{F^*}), 由性质 4.2 可知, 存在 $z \in S_F$ 使得 $d\|z\|_F = x_F^*$. 再由引理 4.2 可知, 存在 $\varphi_F = \varphi \in S_{Y^*}$ 使得

$$|\langle x_F^*, x\rangle - \langle \varphi_F, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in F. \tag{4.16}$$

任给 $z^* \in S_{F^*}$, 由定理 4.2 可知, 存在子集族 $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ ($F_\alpha \subset \mathbb{N}$ 为有限子集), $\{x_{\alpha,n}^*\}_{n\in F_\alpha} \subset w^*$-exp$(B_{F^*})$, $\{\lambda_{\alpha,n}\}_{n\in F_\alpha} \subset \mathbb{R}^+$, 满足 $\sum_{n\in F_\alpha} \lambda_{\alpha,n} = 1$ 使得

$$w^*\text{-}\lim_\alpha z_\alpha^* = z^*, \quad z_\alpha^* \equiv \sum_{n\in F_\alpha} \lambda_{\alpha,n} x_{\alpha,n}^*, \quad \alpha \in I. \tag{4.17}$$

由 (4.15) 可得

$$|\langle z_\alpha^*, x\rangle - \langle \varphi_\alpha, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in F, \quad \alpha \in I, \tag{4.18}$$

其中 $\varphi_\alpha = \sum_{n\in F_\alpha} \lambda_{\alpha,n}\varphi_{\alpha,n}$, $\varphi_{\alpha,n}$ 满足

$$|\langle x_{\alpha,n}^*, x\rangle - \langle \varphi_{\alpha,n}, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in F.$$

对 (4.17) 两端分别取 w^*- 极限可得 $\varphi \in B_{Y^*}$ 使得

$$|\langle z^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in F. \tag{4.19}$$

取 $u \in S_F$ 使得 $\langle z^*, u\rangle = 1$, 用 $x = nu$ 代入上式, 并用 n 除以其两端, 再令 $n \to \infty$ 可知,

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \varphi, \frac{f(nu)}{n} \right\rangle = \langle z^*, u\rangle = 1.$$

这说明 $\|\varphi\| \geqslant 1$. 进而, $\|\varphi\| = 1$. 这样, 我们便证明了对任意的 $z^* \in S_{F^*}$, 存在 $\varphi \in S_{Y^*}$ 使得 (4.18) 成立. 由这个不等式的绝对齐次性得到对任意的 $z^* \in F^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| = r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle z^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in F. \tag{4.20}$$

下面证明, 对任何范数可达泛函 $x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| = r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.21}$$

设 $x_0 \in S_X$ 使得 $\langle x^*, x_0\rangle = \|x^*\| = r$. 我们把所有含有 x_0 的有限维子空间构成的集合记为 $\mathfrak{F}_0$, 则由已证事实, 对于任何 $F \in \mathfrak{F}_0$, 均有 $\varphi_F \in rS_{Y^*}$ 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi_F, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in F. \tag{4.22}$$

我们把对于上述 x^* 满足 (4.21) 和 $\|\varphi_F\| = \|x^*\| = r$ 的所有 φ_F 构成的集合记为 K_F, 则不难验证, $\forall\, F \in \mathfrak{F}_0$, K_F 是 rS_{Y^*} 中的一个非空 w^*- 紧凸子集. 令 $\mathfrak{K} = \{K_F : F \in \mathfrak{F}_0\}$, 则这个 w^*- 紧凸子集族满足 $\forall\, E, F \in \mathfrak{F}_0$, 都有

$$\emptyset \neq K_G \subset K_E \cap K_F,$$

其中 $G = \mathrm{span}(E \cup F)$. 这说明 $\mathfrak{K}$ 具有有限交性质, 进而

$$K_0 \equiv \bigcap \{K_F : F \in \mathfrak{F}_0\} \neq \emptyset.$$

任取 $\varphi \in K_0$, 则易知 $\varphi \in rS_{Y^*}$ 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.23}$$

最后证明, 对任何 $x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| = r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.24}$$

事实上, 根据 Bishop-Phelps 定理 [41] (也可参见文献 [40]), $x^* \in rS_{X^*}$, 存在范数可达泛函序列 $\{x_n^*\} \in rS_{X^*}$ 使得 $x_n^* \to x^*$. 设 $\varphi_n \in rS_{Y^*}$ 使得

$$|\langle x_n^*, x\rangle - \langle \varphi_n, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in X, \tag{4.25}$$

则对 $\{\varphi_n\}$ 的任何 w^*- 聚点 φ 都有 $\|\varphi\| \leqslant r$, 并且

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 3\varepsilon r, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.26}$$

而由上式又可以导出 $\|\varphi\| \geqslant r$. 因此, 定理得证. □

下面的例子说明定理 4.3 中的常数 3 是最优的.

例 4.1 (参见文献 [36, 例 2.4]) 对于 $\varepsilon > 0$, 定义 $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -\varepsilon, & x = 2\varepsilon, \\ x - \varepsilon, & 0 \neq x < \varepsilon, \\ x - 2\varepsilon, & 2\varepsilon \neq x \geqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 0, & x = 2\varepsilon, \\ \varepsilon - x, & 0 \neq x < \varepsilon, \\ x - \varepsilon, & 2\varepsilon \neq x \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{4.28}$$

然后, 令 $f(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, 则 $f : \mathbb{R} \to \ell_\infty^2$ 是一个标准的 ε- 等距. 取 $x^* = 1 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, 则定理 4.2 中弱稳定公式相应的 $\varphi = (0, 1) \in (\ell_\infty^2)^* = \ell_1^2$. 这样,

$$|\langle x^*, 2\varepsilon\rangle - \langle \varphi, f(2\varepsilon)\rangle| = 3\varepsilon.$$

4.2 光滑空间上的最优估计

本小节证明当 Y^* 严格凸时, 定理 4.1 中的最优常数是 $\kappa = 2$ (参见文献 [37, 42]). 根据性质 4.1 和定理 4.1 或定理 4.3 不难验证下面的引理.

引理 4.3 (参见文献 [37, 引理 2.1]) 设 $f : X \to Y$ 为一个标准 ε- 等距, $\mathfrak{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子, 则

$$\Phi(x) = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{u}} \frac{f(nx)}{n}, \quad x \in X \tag{4.29}$$

定义了一个从 X 到 Y^{**} 的等距, 其中 $w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{u}}$ 表示 Y^{**} 中 w^*- 拓扑意义下的超滤子 $\mathfrak{U}$- 极限.

对于 Banach 空间 X 的对偶空间 X^*, 用 $\mathfrak{K}(X^*)$ 表示 X^* 中的所有 w^*- 紧凸子集所构成的集族. 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 为凸函数. 它的次微分映射 $\partial f : X \to \mathfrak{K}(X^*)$ 定义为

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geqslant \langle x^*, y - x\rangle, \forall\, y \in X\}.$$

特别地, 当 $f = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2$ 时, ∂f 称为对偶映射; 当 $f = \|\cdot\|$ 时, ∂f 称为支撑映射.

下面的引理是对文献 [37, 引理 2.2] 的一个修正.

引理 4.4 设 $f: X \to Y$ 为一个标准 ε- 等距, $\mathfrak{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子, Φ 为引理 4.3 中定义的从 X 到 Y^{**} 的等距, $z \in S_X$ 为 Gâteaux 光滑点, $x^* = d\|z\|$, 则对任何 $x \in X$, 均存在 $\varphi, \psi \in \partial\|\Phi(z)\| \cap Y^*$, 使得

$$\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle \leqslant 2\varepsilon, \tag{4.30}$$

以及

$$\langle x^*, x\rangle - \langle \psi, f(x)\rangle \geqslant -2\varepsilon. \tag{4.31}$$

特别地, 当 Y^* 严格凸时, 对上述 z, 存在唯一 $\varphi \in \partial\|\Phi(z)\| \cap Y^*$, 使得

$$|\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.32}$$

证明 因 $x^* = d\|z\|$ $(\in S_{X^*})$, 故对任何 $x \in X$, 有

$$\lim_{t\to+\infty}(\|x+tz\| - t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\|z+tx\| - \|z\|}{t} = \langle x^*, x\rangle. \tag{4.33}$$

对 $n \in \mathbb{N}$, 取 $\varphi_n \in S_{Y^*}$ 使得 $\langle \varphi_n, f(x+nz)\rangle = \|f(x+nz)\|$, 则

$$\begin{aligned}\|f(x+nz)\| &= \langle \varphi_n, f(x+nz)\rangle \\ &= \langle \varphi_n, f(x)\rangle + \langle \varphi_n, f(x+nz) - f(x)\rangle \\ &= \langle \varphi_n, f(x)\rangle + \|f(x+nz) - f(x)\| \\ &\leqslant \langle \varphi_n, f(x)\rangle + (n+\varepsilon).\end{aligned}$$

进而,

$$\liminf_n(\|f(x+nz)\| - n) \leqslant \lim_{\mathfrak{U}}\langle \varphi_n, f(x)\rangle + \varepsilon = \langle \varphi, f(x)\rangle + \varepsilon, \tag{4.34}$$

其中 $\varphi = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}}\varphi_n \in B_{Y^*}$. 另一方面,

$$\begin{aligned}\liminf_n(\|f(x+nz)\| - n) &\geqslant \liminf_n[(\|x+nz\| - \varepsilon) - n] \\ &= \liminf_n \frac{\|z+\frac{1}{n}x\| - \|z\|}{n^{-1}} - \varepsilon \\ &= \langle x^*, x\rangle - \varepsilon.\end{aligned}$$

因此,

$$\liminf_n(\|f(x+nz)\| - n) \geqslant \langle x^*, x\rangle - \varepsilon. \tag{4.35}$$

(4.34) 和 (4.35) 联立便得

$$\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle \leqslant 2\varepsilon. \tag{4.36}$$

下面证明 $\varphi \in \partial\|\Phi(z)\| \cap Y^*$. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$t + \varepsilon \geqslant \|f(tz)\|$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \langle \varphi_n, f(tz)\rangle \\
&= \langle \varphi_n, f(x+tz)\rangle - \langle \varphi_n, f(x+tz)-f(tz)\rangle \\
&\geqslant \|f(x+tz)\| - \|f(x+nz)-f(tz)\| \\
&\geqslant (\|x+nz\|-\varepsilon) - \|x-(n-t)z\| - \varepsilon \\
&\geqslant t - 2(\|x\|+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

在上式中令 $n\to\infty$, 则

$$
t+\varepsilon \geqslant \|f(tz)\| \geqslant \langle \varphi, f(tz)\rangle \geqslant t-2(\|x\|+\varepsilon). \tag{4.37}
$$

上式两端分别除以 $t\ (>0)$, 令 $t\to+\infty$, 并注意 $w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \frac{f(tz)}{t} = \Phi(z)$, 则有

$$
\langle \varphi, \Phi(z)\rangle = \|\Phi(z)\| = 1. \tag{4.38}
$$

因此, $\varphi\in\partial\|\Phi(z)\|\cap Y^*$. 这样就证明了, 对任意的 $x\in X$, 存在 $\varphi\in\partial\|\Phi(z)\|\cap Y^*$ 使得 (4.30) 成立.

另一方面, 对于给定的 $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, 令 $\psi_n\in S_{Y^*}$ 使得

$$
\langle \psi_n, f(x+nz)-f(x)\rangle = \|f(x+nz)-f(x)\|,
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\|f(x+nz)\| &\geqslant \langle \psi_n, f(x+nz)\rangle \\
&= \|f(x+nz)-f(x)\| + \langle \psi_n, f(x)\rangle \\
&\geqslant (\|nz\|-\varepsilon) + \langle \psi_n, f(x)\rangle \\
&= n-\varepsilon + \langle \psi_n, f(x)\rangle.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\liminf_n (\|f(x+nz)\|-n) \geqslant \langle \psi, f(x)\rangle - \varepsilon, \tag{4.39}
$$

其中 $\psi = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \psi_n$. 又因

$$
\begin{aligned}
\|f(x+nz)\| - n &\leqslant (\|x+nz\|+\varepsilon) - n \\
&= \frac{\|z+n^{-1}x\|-\|z\|}{n^{-1}} + \varepsilon \to \langle x^*, x\rangle + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

故

$$
\liminf_n (\|f(x+nz)\|-n) \leqslant \langle x^*, x\rangle - \varepsilon. \tag{4.40}
$$

(4.39) 和 (4.40) 联立便得

$$
\langle x^*, x\rangle - \langle \psi, f(x)\rangle \geqslant -2\varepsilon. \tag{4.41}
$$

注意

$$
t+\varepsilon \geqslant \|f(tz)\| \geqslant \langle \psi_n, f(tz)\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \psi_n, f(x+tz) - f(x) \rangle - \langle \psi_n, f(x+tz) - f(tz) \rangle + \langle \psi_n, f(x) \rangle \\
&\geqslant \|f(x+tz) - f(x)\| - \|f(x+tz) - f(tz)\| - \|f(x)\| \\
&\geqslant (\|nz\| - \varepsilon) - (\|x + (n-t)z\| - \varepsilon) - (\|x\| + \varepsilon) \\
&\geqslant t - 2\|x\| - 3\varepsilon,
\end{aligned}
$$

则有

$$t + \varepsilon \geqslant \|f(tz)\| \geqslant \langle \psi, f(tz) \rangle \geqslant t - 2\|x\| - 3\varepsilon.$$

因此,

$$1 = \lim_{t \to +\infty} \left\langle \psi, \frac{f(tz)}{t} \right\rangle = \langle \psi, \Phi(z) \rangle.$$

进而由 $\langle \psi, \Phi(z) \rangle = \|\Phi(z)\| = 1$ 可知,

$$\psi \in \partial \|\Phi(z)\| \cap Y^*.$$

这样, 我们便证明了对任意的 $x \in X$, 存在 $\psi \in \partial \|\Phi(z)\| \cap Y^*$ 使得 (4.31) 成立.

特别地, 当 Y^* 严格凸时, $\partial \|\Phi(z)\| \cap Y^*$ 是单点集. 因此, $\varphi = \psi$. (4.30) 和 (4.31) 联立即得 (4.32). 证毕. □

有了上述引理, 就可以给出下面的当 Y^* 是严格凸空间时的 "更优" 的估计了.

定理 4.4 [42] 设 $f: X \to Y$ 是一个标准的 ε- 等距. 如果 Y^* 是严格凸的, 则对任意的 $x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| \equiv r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \varphi, f(x) \rangle| \leqslant 2r\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{4.42}$$

证明 与定理 4.3 相比, 除了用引理 4.4 中的 (4.32) 替换引理 4.3 中的 (4.8) 之外, 其余部分完全相同. □

5 再论稳定性

本节回顾利用弱稳定性定理研究 ε- 等距的系列结果, 同时给出一个新的证明.

5.1 自反空间的稳定性

近年来弱稳定性估计式在 ε- 等距的研究中发挥着不可替代的作用, 例如, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 它就是 Figiel 定理 (定理 2.2 [3]); 当 $\varepsilon = 0$ 且映射是满射时, 它就是 Mazur-Ulam 定理 (定理 2.1 [1]). 再如引理 4.3 就是弱稳定性估计式的一个直接推论. 它的作用从下面的对 Qian-Šemrl-Väisälä定理 [7] 的证明便可看出一斑.

定理 5.1 [7] 设 X 和 Y 都是 L_p 空间 $(1 < p < \infty)$, $f: X \to Y$ 为一个标准的 ε- 等距, 则存在范数为 1 的线性算子 $T: Y \to X$ 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{5.1}$$

证明 注意 L_p 空间 $(1 < p < \infty)$ 是自反且一致光滑和一致凸的, 由定理 4.4 知, 对任意的 $x^* \in X^*$, 存在 $\varphi \in Y^*$ 满足 $\|\varphi\| \equiv r = \|x^*\|$, 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \varphi, f(x) \rangle| \leqslant 2r\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{5.2}$$

由引理 4.3 知,

$$\Phi(x) = w^*\text{-}\lim_n \frac{f(nx)}{n} = \lim_n \frac{f(nx)}{n}, \quad x \in X \tag{5.3}$$

定义了一个线性等距 $\Phi : X \to Y$, 并且 $\Phi^*(\varphi) = x^*$. 因而, $Z \equiv \Phi(X) \subset Y$ 是 Y 的 1- 可补子空间 (参见文献 [43, 第 162 页]), 并且 $x^* \to \varphi|_Z$ 是一个线性等距映射. 进而, $Sx^* = \varphi$ 定义了一个线性等距映射 $S : X^* \to Y^*$. 令 $T = S^*$, 则 $T : Y \to X$ 是一个范数为 1 的线性满射. 进而,

$$\begin{aligned} 2r\varepsilon &\geqslant |\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \\ &= |\langle x^*, x\rangle - \langle Sx^*, f(x)\rangle| \\ &= |\langle x^*, x\rangle - \langle x^*, Tf(x)\rangle|. \end{aligned}$$

易见, 上式等价于 (5.1). □

为了使稳定性得到一致化的讨论, 先证明一个引理.

引理 5.1 设 X 是一个无穷维可分 Banach 空间, 则存在一个线性无关的子集 $S \subset X$ 使得 $\overline{S} = X$.

证明 任意取定 X 的一个可数的稠密子集 $(x_n)_{n=1}^\infty$, 令 $X_0 = \operatorname{span}(x_n)_{n=1}^\infty$. 设 $I_0 \subset (x_n)_{n=1}^\infty$ 为 X_0 的一个线性无关的极大子集, 则有 X 的线性无关的子集 $I_1 \equiv (z_\alpha) \subset S_X$ 使得 $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, 并且 $I = I_0 \cup I_1$ 为 X 的一个线性无关的极大子集, 其中 $X_1 = \operatorname{span}(I_1)$. 这样一来, 我们知道 I_1 是不可数集且 $X = X_0 \oplus X_1$ (代数直和). 从 I_1 取出可数无穷多个互不相交的可数无穷子集 $\{I_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ (其中 $I_{1,n} = \{z_{n,j}\}_{j=1}^\infty$), 再令 $J_n = \{\frac{z_{n,j}}{j} : j \in \mathbb{N}\}$. 然后, 令 $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n + J_n\}$ 即可. □

定理 5.2 如果 Y 自反, 则标准的 ε- 等距 $f : X \to Y$ 的稳定性是可分决定的, 即 f 稳定的充要条件为存在 $\beta, \gamma > 0$, 满足对 X 的每个可分子空间 E, 都有线性算子 $T_E : E \to Y$ 使得

$$\|T_E\| \leqslant \beta, \quad \|T_E f(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in E. \tag{5.4}$$

证明 只需证充分性. 由引理 4.3 知, 对 $\mathbb{N}$ 上的任何自由超滤子 $\mathfrak{U}$, $\Phi(x) = w\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \frac{f(nx)}{n}$ $(x \in X)$ 定义了一个等距 $\Phi : X \to Y$. 根据 Figiel 定理知, 存在范数为 1 的线性算子 $F : \overline{\operatorname{span}}(\Phi(X)) \to X$ 使得 $F \circ \Phi = \mathrm{id}_X$. 设 E 为 X 的一个可分子空间, 依照假设条件, 存在范数不超过 β 的线性算子 $T_E : E \to Y$ 和 $\beta > 0$ 使得

$$\|T_E f(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in E.$$

我们用 J 表示 X 所有有限维子空间所构成的集族, 则它的势集 2^J 中以集合的包含关系的所有共尾子集组成的集合 $\mathfrak{F}$ 形成 J 上的一个滤子, 我们把包含这个滤子的超滤子记为 $\mathfrak{U}_J$, 则

$$w\text{-}\lim_{\mathfrak{U}_J} T_F(y), \quad y \in Y_f \equiv \overline{\operatorname{span}}[f(X)]$$

定义了一个线性算子 $T : X \to Y$, 并且满足

$$\|T\| \leqslant \beta, \quad \|Tf(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{5.5}$$

证毕. □

下面的定理是关于自反空间上 ε- 等距稳定性的特征定理 (参见文献 [6, 定理 3.2]), 不过这里将给出一个新的证明.

定理 5.3 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $f: X \to Y$ 为标准的 ε- 等距, N 为文献 [6, 定理 2.3] 定义的 Y^* 的闭子空间. 如果 Y 自反, 则 f 稳定的充分必要条件为 $N^\perp$ 在 Y 中可补.

证明 充分性. 因 Y 自反, 故由引理 4.3 可知, 对 $\mathbb{N}$ 上的任何自由超滤子 $\mathfrak{U}$, $\Phi(x) = w\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \frac{f(nx)}{n}$ $(x \in X)$ 定义了一个等距 $\Phi: X \to Y$. 根据 Gâteaux 可微性定理 (参见文献 [44–47]), X 的每个可分子空间均线性等距同构 Y 的一个子空间, 进而, X 自反. 根据定理 5.2, 可假设 X 可分.

由 Figiel 定理知, 存在一个范数为 1 的线性算子 $F: \overline{\mathrm{span}}[\Phi(X)] \to X$ 使得 $F \circ \Phi = \mathrm{id}_X$. 另一方面, 根据定理 2.3 知, 存在一个范数为 1 的投影算子 $P: \overline{\mathrm{span}}[\Phi(X)] \to N^\perp$, 使得

$$P \circ \Phi: X \to N^\perp \subset Y^{**} = Y \tag{5.6}$$

为一个线性等距, 其中 $P = V^*F^{**} = V^*F$, V 为文献 [6, 定理 2.3] 中 $Y^*/N \to X^*$ 的线性满等距, N 为文献 [6, 定理 2.3] 中通过 f 的不变平均导出的闭子空间. 因为 Y 自反, 所以, $P \circ \Phi: X \to N^\perp$ 是一个线性满等距.

给定 $x^* \in X^*$, 设 $\varphi \in Y^*$ 是定理 4.3 中的 (4.15) 中相应于 x^* 的线性泛函, 则 $V\varphi = x^*$. 因此,

$$\langle \varphi, \Phi(x) \rangle = \langle x^*, x \rangle = \langle V\varphi, x \rangle = \langle \varphi, V^*x \rangle = \langle \varphi, V^*(F\Phi)(x) \rangle = \langle \varphi, (V^*F)\Phi(x) \rangle = \langle \varphi, P\Phi(x) \rangle.$$

进而 $Wx^* = \varphi|_{N^\perp}$ 定义了一个线性满等距 $W: X^* \to (N^\perp)^* = Y^*/N$. 依据引理 5.1 知, 存在 X^* 的一个极大线性无关组 $\{x_\alpha^* \subset S_{X^*}\}$ 使得它在 S_{X^*} 中稠密. 注意 $\mathrm{co}\{x_\alpha^*\}$ 为 X^* 在 B_{X^*} 中稠密的吸收子集. 对任意的 $a > 0$, $x^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x_j^* \in \{x_\alpha^*\}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^n |\lambda_j| = 1$, 令

$$\Psi(x^*) = \sum_{j=1}^n \lambda_j W(x_j^*) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j,$$

以及

$$\Psi(ax^*) = a\Psi(x^*).$$

易见, Ψ 是 X^* 上的线性算子, 它把 B_{X^*} 的一个稠密的吸收凸子集 $\mathrm{co}\{x_\alpha^*\}$ 映成 B_{Y^*} 的一个子集, 因此, 它的范数不超过 $N^\perp$ 在 $Y_f \equiv \overline{\mathrm{span}}[f(X)]$ 中的可补常数. 令 $T = \Psi^*$. 这样一来, 由定理 4.3 知, 对任意的 $x^* \in X^*$ 和 $x \in X$, 有

$$3\|x^*\|\varepsilon \geqslant |\langle x^*, x \rangle - \langle \Psi x^*, f(x) \rangle| = |\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, Tf(x) \rangle|.$$

易见, 上式等价于

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant 3\varepsilon, \quad \forall\, x \in X.$$

必要性. 这正是文献 [6, 定理 3.1]. 证毕. □

从上面定理的证明可以看出, ε- 等距的稳定性与弱稳定性估计式中的 x^* 与 φ 的线性关系有本质联系, 这就是下面的定理.

定理 5.4 设 Y 为自反空间, 则标准的 ε- 等距 $f: X \to Y$ 稳定的充分必要条件为存在一个有界线性算子 $\Psi: X^* \to Y_f^*$ 和 $\gamma > 0$ 使得

$$|\langle x^*, x \rangle - \langle \Psi x^*, f(x) \rangle| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad x \in X.$$

6 w^*- 稳定性和万有稳定性

6.1 ε- 等距 w^*- 稳定性

为了 "稳定性" 的概念有更广泛的适用性, 我们提出了 w^*- 稳定性的概念 [5]. 除特殊声明外, 本小节内容均取材于文献 [5].

定义 6.1 设 $f: X \to Y$ 为标准 ε- 等距, $\gamma > 0$ 为常数, 则

(1) 称 f 是 γ- 稳定的, 如果存在有界线性算子 $T: Y_f \equiv \overline{\mathrm{span}}[f(X)] \to X$ 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in X; \tag{6.1}$$

(2) 称 f 是 w^*-γ- 稳定的, 如果存在有界线性算子 $T: Y_f^{**} \to X^{**}$ 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in X; \tag{6.2}$$

(3) 称 f 是 γ- 逼近线性等距 (approximate linear isometry), 如果存在线性等距 $U: X \to Y_f$ 使得

$$\|f(x) - Ux\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in X. \tag{6.3}$$

注 6.1 "f 是 γ- 逼近线性等距" 蕴涵 "f 是 γ- 稳定的", 但反之不真; "f 是 γ- 稳定的" 又进一步推出 "f 是 w^*-γ- 稳定的", 反过来同样不成立 (见下例).

例 6.1 设 $g: c_0 \to B_{\ell_\infty}$ (ℓ_∞ 的闭单位球) 为双射且 $g(0) = 0$. 对于 $\varepsilon > 0$, 令 $f: c_0 \to \ell_\infty$ 如下定义:

$$f(x) = x + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) g(x), \quad x \in c_0. \tag{6.4}$$

显然, f 是一个标准 ε- 等距. 因为 $L(f) = \ell_\infty$ 且 $c_0 \ell_\infty$ 中不可补, 故 f 不是稳定的.

另一方面, 注意 $Y_f^{**} = \ell_\infty^{**} = \ell_\infty \oplus \ell_1^\perp$. 设 $T: Y_f^{**} \to \ell_\infty = c_0^{**}$ 为沿 $\ell_1^\perp$ 的投影, 则

$$\|Tf(x) - x\| = \|f(x) - x\| = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\|g(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, x \in c_0.$$

这说明 f 是 w^*- 稳定的.

定理 6.1 (参见文献 [5, 定理 4.1]) 设 $f: X \to Y$ 为标准 ε- 等距, $N \subset Y_f^*$ 为相应于 f 的闭子空间. 如果有 w^*-w^* 连续的投影 $P: Y_f^{**} \to N^\perp$, 使得 $g \equiv Pf$ 是某个 δ- 等距 ($\delta \geqslant 0$), 那么有 w^*- 连续有界算子 $T: Y_f^{**} \to X^{**}$, $\|T\| \leqslant \|P\|$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant 2\delta, \quad x \in X, \tag{6.5}$$

即 f 是 w^*-$\frac{2\delta}{\varepsilon}$- 稳定的.

定理 6.2 (参见文献 [5, 定理 4.4]) 设 $f: X \to Y$ 为标准 ε- 等距, $N \subset Y_f^*$ 为相应于 f 的闭子空间. 如果 f 是 w^*- 稳定的, 即有常数 $\gamma > 0$ 和 w^*- 连续有界算子 $T: Y_f^{**} \to X^{**}$, 使得

$$\|Tf(x) - x\| \leqslant \gamma\varepsilon, \quad \forall\, x \in X, \tag{6.6}$$

则存在 w^*-w^* 连续的投影 $P: Y_f^{**} \to N^\perp$, 使得 $g \equiv Pf: X \to N^\perp$ 为 γ- 逼近线性 $2\gamma\varepsilon$- 等距.

由弱稳定性估计式 (定理 4.3) 可知, 对任何 $\gamma \geqslant 3$, 都可以定义如下的非空集值映射 $\imath_\gamma : X^* \to 2^{Y_f^*}$:

$$\imath_\gamma(x^*) = \{\varphi \in L(f)^* : \sup |\langle x^*, x\rangle - \langle \varphi, f(x)\rangle| \leqslant \gamma\varepsilon\|x^*\|, \forall\, x \in X\}. \tag{6.7}$$

定理 6.3 (参见文献 [5, 定理 5.1]) 设 $f : X \to Y$ 为标准 ε- 等距, 则 f 是 w^*- 稳定的 (相应地, 稳定的) 当且仅当对某个 $\gamma > 0$, 存在 $\imath_\gamma : X^* \to 2^{Y_f^*}$ 一个线性 (相应地, w^*-w^*) 连续的选择 $S : X^* \to Y_f^*$.

类似于定理 5.3, 对于 ε- 等距的 w^*- 稳定性, 我们也有如下的定理.

定理 6.4 (参见文献 [6, 定理 3.2]) 设 $f : X \to Y$ 为标准 ε- 等距, $N \subset Y_f^*$ 为相应于 f 的闭子空间, 则 f 是 w^*- 稳定的充分必要条件为 N 在 Y_f 中可补.

6.2 万有稳定性

Cheng 等 [48] 和 Bao 等 [49] 进一步引入了 "万有稳定空间" 的概念, 并研究了这类空间的特征. 下面回顾稳定空间的概念. 一对 Banach 空间 (X, Y) 称为稳定的, 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 每个标准 ε- 等距 $f : X \to Y$ 都是稳定的.

定义 6.2 [48] 设 X 为 Banach 空间.

(1) 称 X 是万有左稳定的, 如果对任何 Banach 空间 Y, (X, Y) 均是稳定的;

(2) 称 X 是万有右稳定的, 如果对任何 Banach 空间 Y, (Y, X) 均是稳定的;

(3) 称 X 是万有稳定的, 如果它既是万有左稳定的又是万有右稳定的.

定理 6.5 [48] (1) Banach 空间 X 是万有右稳定的充分必要条件是它与 Hilbert 空间同胚;

(2) Banach 空间 X 是万有稳定的充分必要条件是 X 为有限维空间;

(3) 可分 Banach 空间 X 对可分 Banach 空间 Y 是万有左稳定的充分必要条件是它同胚于 c_0;

(4) 如果 X 同胚 ℓ_∞ 的一个子空间, 则它是万有左稳定的当且仅当它同胚于 ℓ_∞.

称 Banach 空间 X 为单空间 (injective space), 如果 X 等距同构 Y 的一个子空间, 则与 X 等距同构的那个子空间在 Y 中可补. X 是基数单空间 (cardinality injective space), 如果 X 等距同构 Y 的一个子空间, 且作为集合 Y 与 X 有相同的基数, 则与 X 等距同构的那个子空间在 Y 中可补.

定理 6.6 [49] (1) Banach 空间 X 是万有左稳定的充分必要条件为它是基数单空间;

(2) 若 Banach 空间 X 是一个共轭空间, 则它是万有左稳定的充分必要条件为它是单空间.

问题 6.1 不可分基数单空间一定是单空间吗?

另外, Cheng 等也研究了 ε- 等距的某些特殊行为, 例如, ε- 等距的对称化 [50]; 对任何一个 ε- 等距 $f : X \to Y$, $g \equiv \frac{f(\cdot)-f(-\cdot)}{2}$ 便是一个对称的 4ε- 等距; 遗传不可分解空间上 ε- 等距的稳定性 [51]; 定义在 Banach 空间的锥上的 ε- 等距的弱稳定性估计 [52] 等.

7 粗等距

称一个映射 $f : X \to Y$ 为一个粗等距, 如果

$$\frac{\varepsilon_f(t)}{t} \to 0, \quad t \to 0^+, \tag{7.1}$$

其中

$$\varepsilon_f(t) = \sup\{|\|f(y) - f(x)\| - \|y - x\|| : \|y - x\| \leqslant t\}, \quad t \geqslant 0. \tag{7.2}$$

显然, ε_f 是 $\mathbb{R}^+$ 上的单调不减函数. 特别地, 若 $\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_f(t)\equiv\varepsilon<+\infty$, 则 f 就是一个 ε- 等距.

这个概念是 Cheng 等 [53] 于 2019 年引入的. 这里借用了 "粗几何" (coarse geometry) 中的 "粗" 字, 而在此之前这类映射曾经被 Lindenstrauss 和 Szankowski [26] 及 Benyamini [2] 称为 "近似等距" 和 "大尺度扰动等距映射".

1985 年, Lindenstrauss 和 Szankowski [26] 对下面的满射 $f:X\to Y$ $(f(0)=0)$ 引入了如下 "扰动函数":

$$\alpha_f(t)=\sup_{x,y\in X,\ \|x-y\|\wedge\|f(x)-f(y)\|\leqslant t}|\|f(x)-f(y)\|-\|x-y\||,\quad t\geqslant 0, \tag{7.3}$$

其中 $a\wedge b=\min\{a,b\}$, 并证明了如下结果 (参见文献 [2, 定理 15.4]). 注意 ε_f 与 α_f 的差异.

定理 7.1 [26] 设 X 和 Y 为 Banach 空间, $f:X\to Y$ 为满射并且 $f(0)=0$. 如果

$$\int_1^\infty\frac{\alpha_f(s)}{s^2}ds<\infty, \tag{7.4}$$

则存在一个线性满射 $U:X\to Y$ 使得

$$\|f(x)-Ux\|=o(\|x\|),\quad \|x\|\to\infty. \tag{7.5}$$

同时也给出了下面的反例 (参见文献 [2, 例 15.6]).

例 7.1 设 $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 为一个非负单调不增的函数, 它满足

$$\frac{\varphi(t)}{t}\leqslant 2\frac{\varphi(s)}{s},\quad t\geqslant s>0, \tag{7.6}$$

并且

$$\int_1^\infty\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=\infty, \tag{7.7}$$

则存在两个不等距同构的 Banach 空间 E 和 F (例如, 可以在 Hilbert 空间 ℓ_2 上定义两个都与原范数等价的新范数) 以及线性同胚 $f:E\to F$ 满足 $f(0)=0$, 使得 $\alpha_f\leqslant\varphi$.

注 7.1 Benyamini 和 Lindenstruss 进一步证明了例 7.1 中的空间 E 和 F 都能够被实直线所取代, 即可取 $X=Y=\mathbb{R}$ (参见文献 [2, 命题 15.7 ii)]). 从这里可以看出, 相比 ε- 等距而言, 粗等距研究的难度更加难以想象, 即便是一维实直线 (实值函数) 作为粗等距, 也难以满足 (7.5).

文献 [54, 命题 1] 证明了, 如果把积分收敛条件 (7.4) 中的 ε_f 换成 α_f, 即

$$\int_1^\infty\frac{\varepsilon_f(s)}{s^2}ds<\infty, \tag{7.8}$$

则定理 7.1 的结论仍然成立.

2019 年, Cheng 等 [53] 首次研究了非满粗等距, 并得到如下结论.

定理 7.2 [53] 设 X 和 Y 为 Banach 空间, 并且 Y 具有指数型凸性模 p, $f:X\to Y$ 为标准粗等距. 如果

$$\int_1^\infty\frac{\varepsilon_f(s)^{\frac{1}{p}}}{s^{1+\frac{1}{p}}}ds<\infty, \tag{7.9}$$

则存在线性等距 $U: X \to Y$ 使得

$$\|f(x) - Ux\| = o(\|x\|), \quad \|x\| \to \infty. \tag{7.10}$$

特别地, 当 Y 是 L_p 空间 $(1 < p < \infty)$, 并且满足

$$\int_1^\infty \frac{\varepsilon_f(s)^{\frac{1}{2}}}{s^{1+\frac{1}{2}}} ds < \infty \quad (1 < p \leqslant 2)$$

或者

$$\int_1^\infty \frac{\varepsilon_f(s)^{\frac{1}{p}}}{s^{1+\frac{1}{p}}} ds < \infty \quad (2 < p < \infty)$$

时, (7.10) 成立.

注意, 当 $X = \mathbb{R}$ 或 $X = \mathbb{C}$ 时, $p = 1$. 上述定理说明, 考虑一维空间时, (7.9) 就变成了 (7.8), 因此, 文献 [26] 中的满射条件可以去掉.

Sun 和 Zhang [55] 分别讨论了 L_p $(1 < p < \infty)$ 上的粗等距的强稳定性和弱稳定性的关系.

由于粗等距性质的稳定性研究方法和工具都不多, 因此存在的问题就多了.

问题 7.1 如果有满的粗等距 $f: X \to Y$, 是否存在从 X 到 Y 的等距嵌入?

问题 7.2 如果 X 是可分空间, 且有粗等距 $f: X \to Y$, 是否存在从 X 到 Y 的等距嵌入?

问题 7.3 设 X 和 Y 为 Banach 空间, 怎样给出 (非满) 粗等距 $f: X \to Y$ 满足 (7.10) 的合适条件?

在 $f: X \to Y$ 是 ε- 等距的情形下, 对于自然数集 $\mathbb{N}$ 上的任何一个自由超滤子 $\mathfrak{U}$,

$$U(x) = w^*\text{-}\lim_{\mathfrak{U}} \frac{f(nx)}{n}, \quad x \in X \tag{7.11}$$

都定义了一个从 X 到 Y^{**} 的等距嵌入 U. 当 $f: X \to Y$ 是粗等距时, 我们可以证明上式定义的 U 是一个 1-Lipschitz 映射 [53].

问题 7.4 当 $f: X \to Y$ 是粗等距时, 由 (7.11) 定义的 U 还是一个等距吗?

8 几点注记

无论是在理论上还是在应用上, 以等距为轴衍生出的一系列研究领域已经形成一个庞大的体系. 下面就前面没有提到的几个方面, 作几点注记.

8.1 集值型的 Mazur-Ulam 定理

对于 Banach 空间 X, 用 $\mathscr{C}(X)$ (相应地, $\mathscr{K}(X)$) 表示由 X 的所有非空有界闭 (相应地, 非空紧) 凸子集构成的集族, 赋予其上如下的加法和数乘运算:

$$A \oplus B = \overline{A + B}, \quad kA = \{ka : a \in A\}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad A, B \in \mathscr{C}(X), \tag{8.1}$$

并赋予其 Hausdorff 度量 d_H:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + \varepsilon B_X, B \subset A + \varepsilon B_X\}. \tag{8.2}$$

1980, Gruber 和 Lettl [56] 证明了如下定理.

定理 8.1 [56] 设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间, $f:\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$ 为满等距映射, 则

(1) $f|_{\mathbb{R}^n}$ 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个仿射等距映射;

(2) $f(K)=\bigcup\{f(x):x\in K\},\forall K\in\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$.

1986 年, Bandt [57] 证明了 Gruber-Lettl 定理中的 Euclid 空间换成 "一致凸一直光滑的有限维空间" 结论仍然成立. 2018 年, Zhou 等 [58] 率先在无穷维空间考虑了这一问题, 证明了如下定理.

定理 8.2 [58] 设 X 为 w^*- 光滑的 Banach 空间 (即 B_{X^*} 的 w^*- 暴露点在 X^* 的单位球面上稠密, 特别地, X 是 Gâteaux 光滑的). $f:\mathscr{K}(X)\to\mathscr{K}(X)$ 为满等距映射, 则

(1) $f|_X$ 为从 X 到 X 的一个仿射等距映射;

(2) $f(K)=\bigcup\{f(x):x\in K\},\forall K\in\mathscr{K}(X)$.

Cheng 和 Zheng 等 1) 进一步证明了如下结论.

定理 8.3 1) 设 X 为 Banach 空间, $f:\mathscr{K}(X)\to\mathscr{K}(X)$ 为满等距映射, 则

(1) $f|_X$ 为从 X 到 X 的一个仿射等距映射;

(2) 如果 X 严格凸或者 Gâteaux 光滑, 则 $f(K)=\bigcup\{f(x):x\in K\},\forall K\in\mathscr{K}(X)$.

关于 "集值型" 的等距问题的研究才刚刚开始, 下列问题还没有弄清楚.

问题 8.1 设 X 为有限维赋范空间, $f:\mathscr{C}(X)\to\mathscr{C}(X)$ 为满等距映射. 是否一定有

$$f(C)=\bigcup\{f(x):x\in C\},\quad\forall C\in\mathscr{C}(X)?$$

或者等价地, f 是全保序映射吗? (f 称为全保序的, 如果它是双射并且 $C\subset D\in\mathscr{C}(X)\Leftrightarrow f(C)\subset f(D)$.)

问题 8.2 设 X 为无穷维赋范空间, $f:\mathscr{K}(X)\to\mathscr{K}(X)$ 为满等距映射. 是否一定有

$$f(K)=\bigcup\{f(x):x\in K\},\quad\forall K\in\mathscr{K}(X)?$$

问题 8.3 设 X 为无穷维赋范空间, $f:\mathscr{C}(X)\to\mathscr{C}(X)$ 为满等距映射. 是否一定有

$$f(\mathscr{K}(X))\subset\mathscr{K}(X)?$$

8.2 球面等距延拓

1987 年, Tingley [59] 提出了如下问题: 如果两个 Banach 空间 X 和 Y 的单位球面 S_X 和 S_Y 之间存在一个等距满射, 这个映射是否可以延拓成从 X 到 Y 的等距映射? 现在称这个问题为 Tingley 问题 [60–62], 或者广义 Mazur-Ulam 问题 [63,64], 经定光桂和他的学生们几十年的潜心研究, 几乎对所有的经典 Banach 空间, 这个问题的答案都是肯定的 (参见文献 [60]). 目前这个问题已经发展为国际同行所关注的一个问题, 一大批研究成果陆续发表出来. 尽管如此, 仍然不知道下面问题的答案如何.

问题 8.4 设 X 和 Y 均为二维赋范空间. 如果存在等距满射 $f:S_X\to S_Y$, 那么是否有 (满) 等距映射 $\tilde{f}:X\to Y$ 使得 $\tilde{f}|_{S_X}=f$?

这个问题实质上是低维度量决定高维度量的问题. 这里还应该提到一个有趣的故事: 马玉梅首先在数学期刊 *Geometriae Dedicata* 发现了 Tingley 提出的这个问题 (当时她正在南开大学跟着导师定光桂教授攻读博士学位), 非常感兴趣, 证明了在严格凸空间和 ℓ_1 上, 这个问题的答案都是肯定的 (参见文献 [65]). 这一问题同时引起了定光桂的关注, 于是, 这个问题的研究便有了今天的局面.

1) Cheng L, Zheng Z. A set-valued extension of the Mazur-Ulam theorem. Preprint

8.3 局部准等距

局部准等距的概念由 John [66] 引入, 其动机来源于弹性问题 [66] 和纯几何问题 [67].

定义 8.1 设 $\Omega \subset X$ 为非空开子集, $f:\Omega \to Y$ 称为一个 (m,M)- 局部准等距, 如果它满足

(1) f 是一个局部同胚;

(2) $0 < m \equiv \inf_{x\in\Omega} D^- f(x) \leqslant \sup_{x\in\Omega} D^+ f(x) \equiv M < +\infty$, 其中

$$D^+ f(x) = \limsup_{y\to x} \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|},$$
$$D^- f(x) = \liminf_{y\to x} \frac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|}.$$

局部准等距可以理解为一类特殊的局部 Lipschitz 同胚 (参见文献 [68,69] 或者 [2, 定理 14.7]). 关于此内容进一步的讨论, 可参见文献 [2, 第 14 章].

8.4 各种同胚问题

从 Banach 空间的等距到 Banach 空间的同胚, 是一种推广. 从数学直观上讲, 这是从 "几何" 视角转向 "拓扑" 视角来看同一类问题. 因此, 这里不得不谈 Banach 空间的同胚问题. "等距" 和 "同胚", 或者 "等价" 以及相关内容的理论研究, 一直以来就是泛函分析及其相关领域数学家们高度关注的课题, 在内容上构成了经典泛函分析的理论、方法和应用中最重要、最深刻的组成部分之一.

定义 8.2 设 X 和 Y 为 Banach 空间.

(1) 称 X 与 Y 线性同胚, 如果存在连续的线性满射 $f:X\to Y$, 使得 $f^{-1}:Y\to X$ 也连续;

(2) 称 X 与 Y Lipschitz 同胚, 如果存在连续的 Lipschitz 满射 $f:X\to Y$, 使得 $f^{-1}:Y\to X$ 也是 Lipschitz 的;

(3) 称 X 与 Y 一致 (连续) 同胚, 如果存在一致连续的满射 $f:X\to Y$, 使得 $f^{-1}:Y\to X$ 也是一致连续的;

(4) 称 X 与 Y 连续同胚, 如果存在连续的满射 $f:X\to Y$, 使得 $f^{-1}:Y\to X$ 也是连续的.

著名的 Banach-Mazur 定理 [70] 告诉我们, 每个可分 Banach 空间 (度量空间) 都是 $C[0,1]$ 的一个线性子空间 (子集); Dvoretsky 定理 [71–78] 告诉我们, 每个无限维 Banach 空间都包含任意有限维的 Euclid 空间. Kadec 定理 [79] 告诉我们, 任何两个可分无限维 Banach 空间都拓扑同胚. 因此, 它也宣布了 Banach 空间的一般意义下的连续同胚研究的终结. Aharoni 定理 [80,81] 告诉我们, 每个可分度量空间都是 c_0 的 Lipschitz 同胚意义下的一个子集. Aronszajn-Christensen-Mankiewicz-Phelps 定理 [40,44–46] 告诉我们, 如果 Banach 空间 Y 具有 Radon-Nikodỳm 性质, 则每个从可分 Banach 空间 X 到 Y 的 Lipschitz 映射都在 X 的一个稠密子集的每一点处 Gâteaux 可微. 而 Johnson-Lindenstrauss 定理 [82] 却出人意料地成了计算理论的最基本定理之一.

粗几何是 "非交换几何" 和 "非交换群论" 领域 20 世纪 90 年代以来发展起来的重要研究方向. 20 世纪 90 年代中期, 人们逐渐发现用以通过几何空间 (如非紧完备 Riemann 流形和有限生成群等) 的大尺度几何结构探索指标代数 (即 Roe 代数) 的 K- 理论群的信息, 从而建立几何空间的几何、拓扑和分析之间的联系, 并应用于解决其他重要问题, 如 Novikov 猜测、Gromov-Lawson-Rosenberg 正标量曲率猜测和群 C^*- 代数幂等元问题等的粗几何, 尤指粗 Baum-Connes 猜想和粗 Novikov 猜想, 与 "粗嵌入" 竟有如此本质内在的联系—它们可以归结为离散的有界几何空间 (discrete metric space with bounded geometry, 即离散度量空间 M, 存在一个函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{N}$, 满足 M 中以任何点 x 为中心、半

径为 r 的球 $B(x,r)$ 所包含的点数都不超过 $f(r)$) 是否能够 "粗嵌入" 到一个 Hilbert 空间或者超自反空间, 这实质是 "嵌入" 研究领域目前国际同行高度关注的一个崭新课题 (参见文献 [83–88]).

定义 8.3 设 X 和 Y 为 Banach 空间. 称 X 与 Y 粗同胚, 如果存在满射 $f: X \to Y$ 和两个非负函数 $\rho_1, \rho_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 满足 $\rho_j(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, 使得

$$\rho_1(\|y-x\| \leqslant \|f(y)-f(x)\| \leqslant \rho_2(\|y-x\|), \quad \forall\, x, y \in X.$$

联系这几种同胚之间 "通用" 的桥梁有两个. 一个是粗同胚或一致同胚与 Lipschitz 同胚之间的: 如果 $f: X \to Y$ 是粗同胚映射, 则取定正整数集 $\mathbb{N}$ 上的一个自由超滤子 $\mathfrak{U}$, 分别用 $X_{\mathfrak{U}}$ 和 $Y_{\mathfrak{U}}$ 表示 X 和 Y 的超幂, 并定义映射 $f_{\mathfrak{U}}: X_{\mathfrak{U}} \to Y_{\mathfrak{U}}$ 如下:

$$f_{\mathfrak{U}}(x_{\mathfrak{U}}) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n), \ldots), \quad \forall\, x_{\mathfrak{U}} = (x_1, x_2, \ldots) \in X_{\mathfrak{U}},$$

其中

$$f_n(x) = \frac{f(nx)}{n},$$

则 $f_{\mathfrak{U}}: X_{\mathfrak{U}} \to Y_{\mathfrak{U}}$ 便是一个 Lipschitz 同胚. 另一个是 Lipschitz 同胚与线性嵌入之间的: 如果 $f: X \to Y$ 是一个 Lipschitz 同胚映射, 并且 X 可分, Y 具有 Radon-Nikodỳm 性质, 则 f 在 X 的一个稠密子集的每一点处 Gâteaux 可微, 而 f 在每一点处的 Gâteaux 微分都是一个从 X 到 Y 的线性同胚嵌入.

8.5 性质 (H)

为了解决强 Novikov 猜测, 2012 年 Kasparov 和 Yu [89] 提出性质 (H) 的概念. 称一个 (可分) Banach 空间 X 具有性质 (H), 如果 X 有一列单调递增的有限维子空间 $\{X_n\}$, 可分 Hilbert 空间 H 有一列单调递增的有限维子空间 $\{Y_n\}$, 满足

(i) $X_n \subset X_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, 并且 $\bigcup_n X_n$ 在 X 中稠密;

(ii) 存在一个一致连续的映射 $\varphi: S_X \to S_Y$ 使得 $\varphi|_{S_{X_n}}: S_{X_n} \to S_{Y_n}$ 为一致同胚, 其中

$$Y = \overline{\bigcup_n Y_n}.$$

他们证明了任何群只要能够粗嵌入到具有性质 (H) 的 Banach 空间, 相应的强 Novikov 猜测就成立. 这是继 "如果一个离散的有界几何空间可以粗嵌入到一个 Hilbert 空间, 则相应的粗 Baum-Connes 猜测成立" [84], "如果一个离散的有界几何空间可以粗嵌入到超自反空间, 则相应的粗 Novikov 猜测成立" [87], "任何一个群如果能够粗嵌入到 Hilbert 空间, 则相应的强 Novikov 猜测成立" [84,90,91] 之后的又一次突破. Chen 等 [92] 进一步证明了, 如果一个有界几何空间可以粗嵌入具有性质 (H) 的 Banach 空间, 则相应的粗 Novikov 猜测成立.

因此, 搞清楚哪些 Banach 空间具有性质 (H) 就特别重要了. 目前, 我们已经知道对于 $1 \leqslant p < \infty$, ℓ_p、Hilbert 空间上 Schatten p- 算子类空间 (即非交换 ℓ_p) [89]、$L_p(\mu, X)$ (其中 X 具有性质 (H)) [93] 和具有非平凡余型的 Banach 格 [94]. 但很多重要的 Banach 空间是否具有性质 (H) 我们知道得并不多.

问题 8.5 对于 $1 \leqslant p < \infty$, $L_p[0,1]$ 的闭子空间是否也具有性质 (H)?

问题 8.6 对于 $1 < p < \infty$, 非交换 L_p 空间是否也具有性质 (H)?

问题 8.7 c_0 是否具有性质 (H)?

问题 8.8 性质 (H) 是否具有遗传性? 即如果 X 具有性质 (H), 那么它的闭子空间是否也具有?

问题 8.9 设 X 为 Banach 空间, $D \subset X$ 为一个离散子集. 记 $D/|D| = \{d/\|d\| : 0 \neq d \in D\}$ (D 的标准化集), 如果 $D/|D|$ 可以一致嵌入另一个 Banach 空间 Y, 那么 D 是否可以粗嵌入 Y? (集合 B 可以一致嵌入到 Banach 空间 Y 是指, 存在映射 $f : B \to Y$ 使得 f 和 $f^{-1} : f(B) \to B$ 均一致连续.)

本文至此就要结束了, 但仍然有与 "等距" 相关的很多重要的方面没有提及, 如关于非线性算子方程的 Hyers-Ulam 稳定性和关于函数空间之间等距的 Banach-Stone 定理等.

致谢 正值吴从炘先生 85 华诞之际, 谨以此文敬献给恩师吴先生, 以表对先生的崇敬和爱戴, 同时对吴先生多年来给予的关怀和指导表示衷心的谢意. 非常感谢《中国科学: 数学》编辑部给予的支持和帮助. 非常感谢审稿人提出的很有见地的意见和建议.

参考文献

1 Mazur S, Ulam S. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés. C R Acad Sci Paris, 1932, 194: 946–948
2 Benyamini Y, Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis I. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48. Providence: Amer Math Soc, 2000
3 Figiel T. On non linear isometric embeddings of normed linear spaces. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Math Astron Phys, 1968, 16: 185–188
4 Mankiewicz P. On extension of isometries in normed linear spaces. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Math Astron Phys, 1972, 20: 367–371
5 Cheng L, Fang Q, Kato M, et al. Classification of ε-isometries by stability. Pure Appl Funct Anal, 2020, in press
6 Cheng L, Zhou Y. On perturbed metric-preserved mappings and their stability characterizations. J Funct Anal, 2014, 266: 4995–5015
7 Šemrl P, Väisälä J. Nonsurjective nearisometries of Banach spaces. J Funct Anal, 2003, 198: 268–278
8 Godefroy G, Kalton N J. Lipschitz-free Banach spaces. Studia Math, 2003, 159: 121–141
9 Cheng L, Dong Y, Zhang W. On stability of nonlinear non-surjective ε-isometries of Banach spaces. J Funct Anal, 2013, 264: 713–734
10 Dai D, Dong Y. Stability of Banach spaces via nonlinear ε-isometries. J Math Anal Appl, 2014, 414: 996–1005
11 Dutrieux Y, Lancien G. Isometric embeddings of compact spaces into Banach spaces. J Funct Anal, 2008, 255: 494–501
12 Vestfrid I A. Hyers-Ulam stability of isometries and non-expansive maps between spaces of continuous functions. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 2481–2494
13 Zhou Y, Zhang Z, Liu C. On linear isometries and ε-isometries between Banach spaces. J Math Anal Appl, 2016, 435: 754–764
14 Zhou Y, Zhang Z, Liu C. On isometric representation subsets of Banach spaces. Bull Aust Math Soc, 2016, 93: 486–496
15 Zhou Y, Zhang Z, Liu C. Linearization of isometric embedding on Banach spaces. Studia Math, 2015, 230: 31–39
16 Hyers D H, Ulam S M. On approximate isometries. Bull Amer Math Soc (NS), 1945, 51: 288–293
17 Hyers D H. The stability of homomorphisms and related topics. In: Global Analysis on Manifolds. Teubner-Texte zur Mathematik, 57. Leipzig: Teubner, 1983, 140–153
18 Ulam S M. A Collection of Mathematical Problems. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8. New York: Interscience Publishers, 1960
19 Bourgin D G. Approximate isometries. Bull Amer Math Soc (NS), 1946, 52: 704–714
20 Hyers D H, Ulam S M. Approximate isometries of the space of continuous functions. Ann of Math (2), 1947, 48: 285–289
21 Bourgin D G. Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings. Duke Math J, 1949, 16: 385–397
22 Bourgin R D. Approximate isometries on finite dimensional Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1975, 207: 309–328
23 Bourgin D G. Two dimensional ε-isometries. Trans Amer Math Soc, 1978, 244: 85–102
24 Gruber P M. Stability of isometries. Trans Amer Math Soc, 1978, 245: 263–277
25 Gevirtz J. Stability of isometries on Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 1983, 89: 633–636
26 Lindenstrauss J, Szankowski A. Non linear perturbations of isometries. Astéisque, 1985, 131: 357–371

27 Omladič M, Šemrl P. On non linear perturbations of isometries. Math Ann, 1995, 303: 617–628
28 Vogt A. Maps which preserve equality of distance. Studia Math, 1973, 45: 43–48
29 Cheng L, Shen Q, Zhang W, et al. More on stability of almost surjective ε-isometries of Banach spaces. Sci China Math, 2017, 60: 277–284
30 Dilworth S J. Approximate isometries on finite-dimensional normed spaces. Bull Lond Math Soc, 1999, 31: 471–476
31 Väisälä J. A survey of nearisometries. In: Papers on Analysis: A Volume Dedicated to Olli Martio on the Occasion of His 60th Birthday, vol. 83. Jyväskylä: University Jyväskylä, 2001, 305–315
32 Vestfrid I A. Stability of almost surjective ε-isometries of Banach spaces. J Funct Anal, 2015, 269: 2165–2170
33 Vestfrid Igor A. ε-isometries in ℓ_∞^n. Nonlinear Funct Anal Appl, 2007, 12: 433–438
34 Qian S. ε-isometric embeddings. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 1797–1803
35 Lindenstrauss J. On complemented subspaces of m. Israel J Math, 1967, 5: 153–156
36 Cheng L, Dong Y. A note on the stability of nonsurjective ε-isometries of Banach spaces. Proc Amer Math Soc, 2020, 148: 4837–4844
37 Cheng L, Cheng Q, Tu K, et al. A universal theorem for stability of ε-isometries of Banach spaces. J Funct Anal, 2015, 269: 199–214
38 Larman D G, Phelps R R. Gateaux differentiability of convex functions on Banach spaces. J Lond Math Soc (2), 1979, s2-20: 115–127
39 Mazur S. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math, 1933, 4: 70–84
40 Phelps R R. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364. Berlin: Springer-Verlag, 1989
41 Bishop E, Phelps R R. A proof that every Banach space is subreflexive. Bull Amer Math Soc (NS), 1961, 67: 97–98
42 Cheng L, Dong Y. Corrigendum to "A universal theorem for stability of ε-isometries of Banach spaces" [J Funct Anal, 2015, 269: 199–214]. J Funct Anal, 2020, 279: 108518
43 Lacey H E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1974
44 Aronszajn N. Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces. Studia Math, 1976, 57: 147–190
45 Christensen J P R. On sets of Haar measure zero in Abelian polish groups. Israel J Math, 1972, 13: 255–260
46 Mankiewicz P. On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces. Studia Math, 1973, 45: 15–29
47 Phelps R R. Gaussian null sets and differentiability of Lipschitzian maps on Banach spaces. Pacific J Math, 1978, 77: 522–531
48 Cheng L, Dai D, Dong Y, et al. Universal stability of Banach spaces for ε-isometries. Studia Math, 2014, 221: 141–149
49 Bao L, Cheng L, Cheng Q, et al. On universally left-stability of ε-isometry. Acta Math Sin Engl Ser, 2013, 29: 2037–2046
50 Cheng L, Sun L. On the symmetrization of ε-isometries of Banach spaces (in Russian). Funktsional Anal i Prilozhen, 2019, 53: 93–97, translation in Funct Anal Appl, 2019, 53: 74–77
51 Cheng L, Sun L. Stability characterizations of ε-isometries on certain Banach spaces. Acta Math Sin Engl Ser, 2019, 35: 123–134
52 Cheng L, Tu K, Zhang W. On weak stability of ε-isometries on wedges and its applications. J Math Anal Appl, 2016, 433: 1673–1689
53 Cheng L, Fang Q, Luo S, et al. On non-surjective coarse isometries between Banach spaces. Quaest Math, 2019, 42: 347–362
54 Dolinar G. Generalized stability of isometries. J Math Anal Appl, 2000, 242: 39–56
55 Sun Y, Zhang W. Non-surjective coarse isometries between L_p spaces. J Math Anal Appl, 2020, 489: 124165
56 Gruber P M, Lettl G. Isometries of the space of convex bodies in Euclidean space. Bull Lond Math Soc, 1980, 12: 455–462
57 Bandt C. On the metric structure of hyperspaces with Hausdorff metric. Math Nachr, 1986, 129: 175–183
58 Zhou Y, Zhang Z, Liu C. On representation of isometric embeddings between Hausdorff metric spaces of compact convex subsets. Houston J Math, 2018, 44: 917–925
59 Tingley D. Isometries of the unit sphere. Geom Dedicata, 1987, 22: 371–378
60 Ding G G. On isometric extension problem between two unit spheres. Sci China Ser A, 2009, 52: 2069–2083
61 Fernández-Polo F J, Peralta A M. Low rank compact operators and Tingley's problem. Adv Math, 2018, 338: 1–40
62 Fernández-Polo F J, Peralta A M. On the extension of isometries between the unit spheres of a C^*-algebra and $B(H)$. Trans Amer Math Soc Ser B, 2018, 5: 63–80

63 Cheng L, Dong Y. On a generalized Mazur-Ulam question: Extension of isometries between unit spheres of Banach spaces. J Math Anal Appl, 2011, 377: 464–470

64 Tan D, Huang X, Liu R. Generalized-lush spaces and the Mazur-Ulam property. Studia Math, 2013, 219: 139–153

65 Ma Y. Isometries of the unite sphere. Acta Math Sci, 1992, 12: 366–373

66 John F. Rotation and strain. Comm Pure Appl Math, 1961, 14: 391–413

67 John F. Quasi isometric mappings. In: 1965 Seminari 1962/63 Analysis Algebraic and Geometric Topology, vol. 2. Instituto Nazioale di Aita Mathematica, 1964, 462–473

68 Gevirtz J. Injectivity in Banach spaces and the Mazur-Ulam theorem on isometries. Trans Amer Math Soc, 1982, 274: 307–318

69 Gevirtz J. Injectivity of quasi-isometric mappings of balls. Proc Amer Math Soc, 1982, 85: 345–349

70 Banach S. Théorie des opérations linéaires (Monografje Matematyczne, Tom I). Seminar Matem Univ Warszawa, 1932

71 Dvoretzky A. Some results on convex bodies and Banach spaces. In: Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces (Jerusalem, 1960). Jerusalem-Pergamon-Oxford: Jerusalem Academic Press, 1961, 123–160

72 Mil'man V D. Spectrum of bounded continuous functions specified on a unit sphere in Banach space. Funct Anal Appl, 1969, 3: 137–146

73 Milman V D. New proof the the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies. Funct Anal Appl, 1971, 5: 25–37

74 Milman V. Dvoretzky's theorem—thirty years later. Geom Funct Anal, 1992, 2: 455–479

75 Figiel T, Lindenstrauss J, Milman V D. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. Acta Math, 1977, 139: 53–94

76 Gordon Y. Some inequalities for Gaussian processes and applications. Israel J Math, 1985, 50: 265–289

77 Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics, vol. 152. Basel: Birkhäuser, 1999

78 Lindenstrauss J. Almost spherical sections: Their existence and their applications. Jber d Dt Math Verein Jubiläumstagung, 1990, 39–61

79 Kadets M I. Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. Funct Anal Appl, 1967, 1: 53–62

80 Aharoni I. Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of c_0. Israel J Math, 1974, 19: 284–291

81 Assouad P. Remarques sur un article de Israel Aharoni sur les prolongements Lipschitziens dans c_0. Israel J Math, 1978, 31: 97–100

82 Johnson W B, Lindenstrauss J. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space. In: Conference in Modern Analysis and Probability (New Haven, Conn, 1982). Contemporary Mathematics, vol. 26. Providence: Amer Math Soc, 1984, 189–206

83 Yu G. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups. In: International Congress of Mathematicians, vol. II. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 1623–1639

84 Yu G. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. Invent Math, 2000, 139: 201–240

85 Yu G. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension. Ann of Math (2), 1998, 147: 325–355

86 Yu G. Higher index theory of elliptic operators and geometry of groups. In: International Congress of Mathematicians, vol. II. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 1623–1639

87 Kasparov G, Yu G. The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity. Adv Math, 2006, 206: 1–56

88 Mineyev I, Yu G. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups. Invent Math, 2002, 149: 97–122

89 Kasparov G, Yu G. The Novikov conjecture and geometry of Banach spaces. Geom Topol, 2012, 16: 1859–1880

90 Higson N. Bivariant K-theory and the Novikov conjecture. Geom Funct Anal, 2000, 10: 563–581

91 Skandalis G, Tu J L, Yu G. The coarse Baum-Connes conjecture and groupoids. Topology, 2002, 41: 807–834

92 Chen X, Wang Q, Yu G. The coarse Novikov conjecture and Banach spaces with Property (H). J Funct Anal, 2015, 268: 2754–2786

93 Cheng Q, Dong Y. Uniform homeomorphisms of unit spheres and Property H of Lebesgue-Bochner function spaces. Acta Math Sin Engl Ser, 2017, 33: 681–690

94 Cheng Q, Wang Q. On Banach spaces with Kasparov and Yu's property (H). J Math Anal Appl, 2018, 457: 200–213

Perturbed metric-preserving mappings of Banach spaces

Lixin Cheng

Abstract The study of isometries of Banach spaces and their generalizations has lasted over 80 years since the celebrated Mazur-Ulam theorem (1932): Every surjective isometry between two Banach spaces is necessarily affine. This survey paper gives a historical overview of the research field. It focuses on the progress in the last ten years, especially, on the stability problems of isometries, perturbed isometries and coarse isometries defined on real Banach spaces with the special emphases on the recent developments and some open questions in this field and related topics.

Keywords **isometry, perturbed isometry, coarse isometry, coarse isomorphism, Banach space**

MSC(2010) **46B04, 46B20, 46B03, 46B08**

doi: 10.1360/SSM-2020-0185