中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 1 期: 289 ~ 300
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
论 文

基于吴方法的几何定理证明的恒等式方法

献给张景中、杨路教授 85 华诞

邹宇[1], 彭翕成[2], 饶永生[1*]

1. 广州大学计算科技研究院, 广州 510006;
2. 华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心, 武汉 430079
E-mail: zouyu020@126.com, pxc417@126.com, rysheng@gzhu.edu.cn

收稿日期: 2020-04-05; 接受日期: 2020-09-27; 网络出版日期: 2020-12-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11701118) 资助项目

摘要 多年来通常认为以吴方法为代表的几何定理机器证明的坐标法给出的证明不可读, 或不是图灵意义下的类人解答. 其实, 只要对吴氏的算法做不多的改进, 即将命题的结论多项式表示为其条件多项式的线性组合, 就能获得不依赖于理论、算法和大量计算过程的恒等式明证. 这样的恒等式可以转化为其他更简明且更有直观几何意义的点几何形式或向量及其他形式, 从而获得多种证明方法. 这也证明了点几何恒等式明证方法对等式型几何命题的普遍有效性.

关键词 吴方法 几何定理证明 恒等式方法 点几何

MSC (2010) 主题分类 03F07, 03F20, 03F65

1 引言

几何学具有悠久的历史, 两千多年来积累下来的几何知识是人类的宝贵财富. 其中, 几何证明是几何学的精华. 大部分的人, 只要学习过几何, 就会对几何定理证明的艰难曲折有所体会. 几何定理证明自古就被认为是典型的脑力活动, 也是自然被选为脑力劳动机械化最初尝试的问题 [1].

吴文俊 [2] 建立的数学机械化方法, 极大地推动了几何自动推理的研究. 自吴方法发表至今四十余年, 几何定理机器证明的研究有了丰富的成果 [3,4].

在吴方法的影响下, Chou 等 [5] 提出了能产生 "可读证明" 的消点法. 近年来, 几何定理可读机器证明的理论和算法的研究又有新的进展 [6].

所谓可读证明, 是指人容易理解和检验的证明, 但也是一个模糊且有争议的概念. 例如, 李晟和李长明在文献 [7] 中认为, "吴方法不可读是不贴切的, 阻碍了吴方法在国内的普及". 近年来, 对于 "机器解题的表达" 的要求, 更多使用 "类人解答" 的说法.

英文引用格式: Zou Y, Peng X C, Rao Y S. An identity method for proving geometry theorems based on Wu's method (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 289–300, doi: 10.1360/SSM-2020-0108

近年来随着信息技术特别是网络技术的发展, 人们对人工智能有了更多和更高的期望, 其中对类人解答给予了相当的关注. 吴方法解决了等式型几何命题 (前提和结论都可以由多项式等式关系来表达) 的机器判定, 但其给出的证明过程通常不被认为是类人解答. 基于数据库的搜索法 [8] 能自动生成类人证明, 并能发现几何图形的很多性质, 但不是能解决某一类几何问题的完全性算法. 基于几何不变量的消点法能解决可构图等式型几何命题, 给出的证明是类人解答, 但其解题范围比吴方法小.

类人证明要求解答过程容易被人理解和检验, 对于几何定理来说, 如果几何图形过于复杂或者证明过程繁复, 可读证明也可能会变得不易阅读和理解.

杨路在研究多项式不等式机器证明时, 提出了 "明证" 一说 [9]. 所谓明证, 是指一目了然的证明, 即读者很容易就能判断其正确性的证明.

张景中 [10] 最近提出了 "点几何". 点几何是一种几何代数系统, 兼有坐标方法、向量方法和质点几何方法三者的长处而避免其缺点. 基于 "点几何" 建立的点几何恒等式方法不受可构图的限制 [11–15], 很多情形能给出简单的类人证明甚至明证, 但目前该方法的理论还不完善, 其解题适用的范围有待确定.

本文将指出, 对吴方法的典型算法略加改进, 就可以得到一种将结论表示为条件的线性组合的恒等式, 这种恒等式本身就表明了命题成立, 不必再考虑算法的原理和前面的计算过程, 从而可以看作是类人证明甚至是明证. 在多数情形中, 通过适当的形式转化 (例如, 用点几何、向量或复数形式表述), 它甚至会比传统的证明更为简明严谨, 无疑地是类人的明证方法. 从而也回答了点几何恒等式方法适用范围的问题: 它与吴方法相通, 适合所有等式型几何命题.

2 吴方法与恒等式明证方法

按照吴方法, 在处理几何命题时, 通常的步骤是, 第一步, 将几何问题代数化, 即适当选择坐标系, 将几何问题的假设条件和结论部分都表示为多项式方程; 第二步, 整序, 确定自由变元和约束变元, 将假设条件三角化为升列, 使约束变元以逐个添加的方式依次在升列中出现; 第三步, 作伪除法求余, 验证结论真伪. 需要说明的是, 这里描述的是简化了的吴法, 未考虑相关代数簇可约的情形.

不妨设定理的假设条件由多项式方程组 $HS=\{H_1=0,H_2=0,\ldots,H_m=0\}$ 表示, 结论由 $g=0$ 描述, $CS=\{f_1=0,f_2=0,\ldots,f_s=0\}$ 表示由多项式组 HS 整理后得到的升列.

吴方法的最后一步, 即将 g 对 $\{f_s,f_{s-1},\ldots,f_1\}$ 依次作伪除法求余, 最后判断余式是否为 0. 若余式为 0, 则有

$$c_1c_2\cdots c_sg=a_1f_s+a_2f_{s-1}+\cdots+a_sf_1, \tag{2.1}$$

在非退化条件 $c_1\neq 0,c_2\neq 0,\ldots,c_s\neq 0$ 下, 由 $f_1=f_2=\cdots=f_s=0$ 推出 $g=0$. 因此, 吴方法的证明过程本质上是获得了结论与三角列之间的一个恒等式.

在恒等式 (2.1) 中, 结论 g 这一项有明确的几何意义, 但前提假设 HS 经过整理转化为三角列 CS 之后, $\{f_1,f_2,\ldots,f_s\}$ 中的某些项的几何意义就可能不明确了. 仅从恒等式 (2.1) 推导出结论成立, 不能算是一个完整的证明, 因为它不仅依赖吴方法理论的正确性, 还依赖之前所有计算过程没有错误. 这个问题, 应用下述引理即可解决.

引理 2.1 对给定的多项式组 HS, 设 CS 是用吴方法求得的 HS 的升列, 则存在矩阵 M, 使得

$$CS=(M)HS.$$

证明 吴方法的整序, 可以用矩阵来表示.

整序的过程是, 从一个多项式组出发, 通过一系列运算, 得到一个所谓的 "升列". 这一系列的运算, 其中的每一步, 无非是下述两种操作之一:

(1) 换位: 改变多项式组中两个多项式的位置, 例如, 交换第 3 个多项式和第 5 个多项式的位置;

(2) 求余: 将多项式组中一个多项式 G 对组中另一个多项式 F 关于某一个变元求余, 这里有 $I^sG=\lambda F+R$, 其中 I 是 F 的主变元的最高次项的系数多项式, λ 是商多项式, 并把余式 R 加入多项式组.

用一个矩阵 (P_0) 表示原始多项式组, (P_k) 表示经过 k 次操作后获得的多项式组, 则有一个矩阵 (M_k), 使得

$$(M_k)(P_k)=(P_{k+1}).$$

具体地,

(i) 如果 (P_k) 经过 "换位" 操作成为 (P_{k+1}), 若 (P_k) 中第 i 与 j 元素换位, 则将单位矩阵的第 i 与 j 行互换即得 (M_k);

(ii) 如果 (P_k) 经过 "求余" 操作成为 (P_{k+1}), 若余式不为 0, 上述操作中多项式 G 为 (P_k) 中的第 i 项而多项式 F 为 (P_k) 中的第 j 项, 则 (M_k) 中的最后一行这样构成: 其第 i 元素为 I^s, 第 j 元素为 $-\lambda$, 其余元素为 0, 而 (M_k) 中其他行的元素与单位矩阵相同, 即 (M_k) 比单位矩阵多了一行.

由此可知, 存在矩阵 (M) 使得 $CS=(M)HS$ 成立. 在吴方法整序过程中, 记下每一步操作的矩阵表示, 容易获得矩阵 (M). □

吴方法是用三角列来表示恒等式, 三角列又可以还原为假设条件, 这样就能建立结论和假设条件之间的恒等式. 于是, 下面的定理成立:

定理 2.1 凡是由吴方法可证明的定理都可以给出其结论 g 表示为假设条件 HS 的线性组合的恒等式, 其组合系数是有关变元的多项式.

例 2.1 垂心定理: 三角形的三高交于一点.

文献 [16] 采用如下的方式描述垂心定理和建立坐标系:

在 ΔABC 中, 以 AB 为横轴, 取 C 在 AB 上的垂足为原点 O, 设 BC 与 AC 上的高线交于 D, 需要证明 D 在高线 CO 上 (参见图 1).

第一步, 几何问题代数化: 设各点的坐标为

$$A=(x_1,0),\quad B=(x_2,0),\quad C=(0,x_3),\quad D=(x_4,x_5),$$

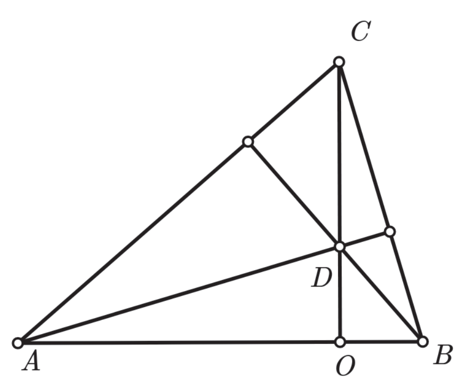

图 1 垂心定理

则定理的假设条件 $AD\perp BC$ 和 $BD\perp AC$ 分别对应于多项式方程

$$H_1 = x_3x_5 - x_2(x_4 - x_1) = 0,$$
$$H_2 = x_3x_5 - x_1(x_4 - x_2) = 0,$$

而结论等价于 $g = x_4 = 0$.

第二步, 将条件多项式组 $\{H_1, H_2\}$ 整序, 得到升列 $\{f_1, f_2\}$: 取定 x_1、x_2 和 x_3 为自由变元, 则 x_4 和 x_5 为约束变元; 将 H_1 对 H_2 关于变元 x_5 求余, 得到

$$f_1 = H_1 - H_2 = (x_1 - x_2)x_4;$$

而 $f_2 = H_2 = x_3x_5 - x_1(x_4 - x_2)$, 即

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}.$$

第三步, 伪除法求余: 将 $g = x_4$ 依次对 f_2 和 f_1 分别关于变元 x_5 和 x_4 求余, 容易验证, 在非退化条件 $x_3(x_1 - x_2) \neq 0$ 下, 最后的余式为 0.

在求余过程中, 记录每一步的商式和初式, 可确定 g 与升列 $\{f_1, f_2\}$ 之间的恒等式

$$(x_1 - x_2)g = 0 \cdot f_2 + f_1. \tag{2.2}$$

此时, 尽管已经得到了恒等式 (2.2), 但该恒等式中的 $f_1 = (x_1 - x_2)x_4$ 的几何意义已经不明显了.

根据 $\{f_1, f_2\}$ 与 $\{H_1, H_2\}$ 之间的关系, 进一步得到 g 与 $\{H_1, H_2\}$ 之间的恒等式

$$(x_1 - x_2)g = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = H_1 - H_2. \tag{2.3}$$

例 2.2 Simson 定理 (见图 2): 设 P 为 ΔABC 外接圆上任一点, 从点 P 向 ΔABC 三边 AB、BC 和 CA 分别作垂线, 三条垂线的垂足为 N、L 和 M, 求证: N、L 和 M 共线.

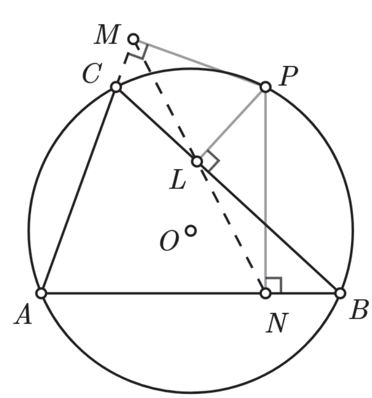

图 2 Simson 定理

文献 [17] 采用如下的方式建立坐标系:

取 A 为原点, 以 AB 所在的直线为 x 轴, 设 O 是 ΔABC 外接圆的圆心, 各点的坐标为 $A(0,0)$、$B(u_1,0)$、$C(u_2,u_3)$、$O(x_1,x_2)$、$P(u_4,x_3)$、$N(u_4,0)$、$L(x_4,x_5)$ 和 $M(x_6,x_7)$, 其中 (u_1,u_2,u_3,u_4) 为自由变元, $(x_1,x_2,x_3,\,x_4,x_5,x_6,x_7)$ 为约束变元.

假设条件 "$OA=OB$、$OA=OC$、$OA=OP$、$PL\perp BC$、L 在 BC 上、$PM\perp AC$、M 在 AC 上" 依次对应如下 7 个多项式方程:

$$\begin{aligned}
&H_1=x_1^2+x_2^2-(u_1-x_1)^2-x_2^2=2u_1x_1-u_1^2=0,\\
&H_2=x_1^2+x_2^2-(u_2-x_1)^2-(u_3-x_2)^2=2u_3x_2+2u_2x_1-u_2^2-u_3^2=0,\\
&H_3=(u_4-x_1)^2+(x_3-x_2)^2-x_1^2-x_2^2=x_3^2-2x_2x_3-2u_4x_1+u_4^2=0,\\
&H_4=(x_3-x_5)u_3+(u_4-x_4)(u_2-u_1)=0,\\
&H_5=x_5(u_2-u_1)-u_3(x_4-u_1)=0,\\
&H_6=(x_3-x_7)u_3+(u_4-x_6)u_2=0,\\
&H_7=x_7u_2-x_6u_3=0,
\end{aligned}$$

结论 "N、L 和 M 共线" 即

$$g=(x_4-u_4)x_7-(x_6-u_4)x_5=0.$$

对多项式组 $HS=\{H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,H_7\}$ 整序, 得到升列

$$\begin{aligned}
&f_1=H_1,\\
&f_2=H_2,\\
&f_3=H_3,\\
&f_4=(u_2-u_1)H_4+u_3H_5,\\
&f_5=H_5,\\
&f_6=u_2H_6+u_3H_7,\\
&f_7=H_7,
\end{aligned}$$

且 $CS=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\}$ 中各项的初式分别记为

$$\begin{aligned}
&I_1=2u_1,\\
&I_2=2u_3,\\
&I_3=1,\\
&I_4=-(u_2-u_1)^2-u_3^2,\\
&I_5=u_2-u_1,\\
&I_6=-u_2^2-u_3^2,\\
&I_7=u_2.
\end{aligned}$$

将 g 依次对 $\{f_7,f_6,f_5,f_4,f_3,f_2,f_1\}$ 作伪除法求余, 满足

$$I_7g=a_7f_7+R_6,$$

$$
\begin{aligned}
I_6R_6 &= a_6f_6 + R_5,\\
I_5R_5 &= a_5f_5 + R_4,\\
I_4R_4 &= a_4f_4 + R_3,\\
I_3R_3 &= a_3f_3 + R_2,\\
I_2R_2 &= a_2f_2 + R_1,\\
I_1R_1 &= a_1f_1 + R_0,
\end{aligned}
$$

在各初式不为 0 的情形下, 可得 $R_0 = 0$, 且

$$
\begin{aligned}
a_7 &= x_4 - u_4,\\
a_6 &= u_3x_4 - u_2x_5 - u_3u_4,\\
a_5 &= u_2u_3(u_2x_3 - u_3u_4),\\
a_4 &= u_2u_3(u_1u_2u_4 + u_1u_3x_3 - u_2^2u_4 - u_3^2u_4),\\
a_3 &= u_1u_2u_3^3(u_1 - u_2),\\
a_2 &= 2u_1u_2u_3^3x_3(u_1 - u_2),\\
a_1 &= -4u_1u_2u_3^3(u_1 - u_2)(u_2x_3 - u_3u_4),
\end{aligned}
$$

于是, 可得结论 g 与升列 CS 间的恒等式为

$$
\begin{aligned}
I_7I_6I_5I_4I_3I_2I_1g = {} & a_1f_1 + a_2I_1f_2 + a_3I_2I_1f_3 + a_4I_3I_2I_1f_4\\
& + a_5I_4I_3I_2I_1f_5 + a_6I_5I_4I_3I_2I_1f_6 + a_7I_6I_5I_4I_3I_2I_1f_7.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

进一步将升列 CS 还原为假设条件 HS, 可得恒等式

$$
cg = b_7H_7 + b_6H_6 + b_5H_5 + b_4H_4 + b_3H_3 + b_2H_2 + b_1H_1, \tag{2.5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
c &= I_7I_6I_5I_4I_3I_2I_1,\\
b_1 &= a_1,\\
b_2 &= a_2I_1,\\
b_3 &= a_3I_2I_1,\\
b_4 &= a_4I_3I_2I_1(u_2 - u_1),\\
b_5 &= I_3I_2I_1(a_5I_4 + a_4u_3),\\
b_6 &= a_6I_5I_4I_3I_2I_1u_2,\\
b_7 &= I_5I_4I_3I_2I_1(a_7I_6 + a_6u_3).
\end{aligned}
$$

注意到 $\{c, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ 有公因式

$$
4u_1u_2u_3(u_2 - u_1) = I_7I_5I_2I_1,
$$

则恒等式 (2.5) 可化为

$$
\begin{aligned}
&(u_2^2+u_3^2)((u_2-u_1)^2+u_3^2)g\\
&\quad=u_3^2(u_2x_3-u_3u_4)H_1-u_1u_3^2x_3H_2-u_1u_3^3H_3\\
&\qquad+u_3(u_1u_2u_4+u_1u_3x_3-u_2^2u_4-u_3^2u_4)H_4\\
&\qquad+u_3(u_1u_2x_3-u_1u_3u_4-u_2^2x_3-u_3^2x_3)H_5\\
&\qquad+((u_2-u_1)^2+u_3^2)(u_2x_5+u_3u_4-u_3x_4)H_6\\
&\qquad+((u_2-u_1)^2+u_3^2)(u_2x_4+u_3x_5-u_2u_4)H_7.
\end{aligned}\tag{2.6}
$$

综上可知, 在吴方法的基础上, 可以将几何定理的结论与初式的积表示为其条件的线性组合, 即可以找到 $b_1,b_2,\dots,b_m$ 使得恒等式

$$cg=b_1H_1+b_2H_2+\cdots+b_mH_m \tag{2.7}$$

成立.

这样的改进, 工作量增加很少, 却有下列显著的效果:

(1) 只要检验恒等式 (2.7) 成立, 就能直接判定定理成立, 既不依赖于吴方法理论上的正确性, 也不用考虑整序和求余等步骤的计算过程是否可靠; 恒等式 (2.7) 本身就是一个明证.

(2) 对于恒等式 (2.7) 来说, 因为非退化条件保证了结论项 g 的系数不为 0, 如果条件项的某项系数为 0, 说明这个条件是多余的.

(3) 对恒等式进行等价变形, 条件和结论互换, 可能立即得到更多命题的明证. 例如, 将 (2.5) 中的结论项 cg 和条件项 b_4H_4 移项换位置, 得到的恒等式

$$-b_4H_4=b_7H_7+b_6H_6+b_5H_5-cg+b_3H_3+b_2H_2+b_1H_1 \tag{2.8}$$

是命题 "设 P 为 ΔABC 外接圆上任一点, 从点 P 向 ΔABC 的边 AB 和 CA 分别作垂线, 垂足为 N 和 M, 若 NM 交 BC 于点 L, 则 $PL\perp BC$" 的明证; 又如, 将 (2.5) 中的结论项 cg 和条件项 b_3H_3 移项换位置, 得到的恒等式

$$-b_3H_3=b_7H_7+b_6H_6+b_5H_5+b_4H_4-cg+b_2H_2+b_1H_1 \tag{2.9}$$

是命题 "P 是 ΔABC 所在平面上的一点, 过 P 向 ΔABC 三边 AB、BC 和 CA 分别作垂线, 垂足为 N、L 和 M, 如果 N、L 和 M 共线, 则 A、B、C 和 P 四点共圆" 的明证.

(4) 将恒等式中的坐标表达式转换为其他形式, 如向量或几何不变量, 得到该命题的不同形式的明证, 有可能更为简洁优美.

(5) 在吴方法保证恒等式明证存在的基础上, 有可能发展多种构造恒等式证明的方法, 如 Gröbner 基方法和待定系数法等, 使几何证明更为丰富多彩.

文献 [18] 是国际上第一本详细介绍吴方法的英文著作, 其中列举了用 Lisp 语言实现的吴方法程序所证明的 512 条几何定理, 并给出了每条定理的输入形式和证明该定理所用的时间, 但限于篇幅, 不可能给出证明的运算过程, 这就明显地减弱了对读者的说服力. 如果对算法略加改进, 对每条定理列出其恒等式明证, 其效果将大不相同, 其参考价值将远远高于只记录证明时间的价值.

但是, 借助吴方法先确定结论与三角列之间的恒等式, 再根据三角列与假设条件的关系导出结论与假设条件之间的恒等式, 这种方法不直接, 特别是手工操作起来费时费力; 再者, 在恒等式中直接用

坐标表示结论和条件及其关系还是不够直观, 其几何意义不很明显. 我们一方面希望有更直观的方法来表示几何定理的条件和结论, 另一方面希望有更直接的方法来确定结论与条件之间的恒等式. 可以想到的简化办法有很多, 用向量、复数或者三角来代替坐标都是可行的. 目前看来, 效果最好的是下面介绍的点几何方法.

3　恒等式明证的点几何表示

人们对几何学的代数形式已经进行了长期深入的研究, 并有了坐标系统、三角函数、向量空间、质点几何 [19], 以及其他几何代数体系等丰富成果. 在基础数学教育中, 常用的是坐标和向量的语言、记号和方法.

文献 [10] 提出了 "点几何" 的构想. 所谓点几何, 相当于把从原点 O 出发的向量 $\overrightarrow{OA}$ 叫作点 A, 并在平面情形引入虚数乘点的运算如下:

(1) 虚数 i 乘点: 若在 Descartes 坐标系中 $A=(x,y)$, 则定义 $\mathrm{i}A=(-y,x)$, 此处字母 i 为保留专用符号.

(2) 复数乘点: 若在 Descartes 坐标系中 $A=(x,y)$ 而复数 $\alpha=u+v\mathrm{i}$, 则定义

$$\alpha A=uA+\mathrm{i}(vA).$$

令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A$ 表示将 A 绕原点反时针旋转 θ 弧度.

尽管上述规则很简单, 但点几何表现力相当丰富. 综合点几何中的定义和基本性质容易看到, 点几何的运算结果仅与原点有关, 与坐标标架无关. 点几何能更方便、更简明和更直观地描述一些常见的几何事实.

在第 2 节的例 2.1 中, 我们得到了垂心定理的结论与条件之间的恒等式 (2.3) 为

$$(x_1-x_2)g=H_1-H_2,$$

注意到垂心定理的结论 "D 在高线 CO 上" 既可以表述为 $x_4=0$, 也可以等价描述为 (以下的运算 "$\cdot$" 表示向量的内积)

$$CD\perp AB\Leftrightarrow(C-D)\cdot(A-B)=0.$$

再注意到, 定理的假设条件可以描述为

$$\begin{aligned}&AD\perp BC\Leftrightarrow H_1=(A-D)\cdot(B-C)=0,\\&BD\perp AC\Leftrightarrow H_2=(B-D)\cdot(A-C)=0,\\&H_1-H_2\Leftrightarrow(A-D)\cdot(B-C)-(B-D)\cdot(A-C),\end{aligned}$$

容易验证,

$$(A-D)\cdot(B-C)-(B-D)\cdot(A-C)=-(C-D)\cdot(A-B)\tag{3.1}$$

在点几何的定义和运算下是一个恒等式.

这样, 一个点几何恒等式直接把结论和条件组合起来, 且恒等式中的各项更具有明显的几何意义, 更容易人工检验.

如果取 D 为原点, 则恒等式 (3.1) 成为更简单的

$$A\cdot(B-C)+B\cdot(C-A)+C\cdot(A-B)=0. \tag{3.2}$$

恒等式 (3.2) 不仅与吴方法原来的计算过程无关, 甚至与所取的坐标也无关; 它比垂心定理内容更丰富. 例如, 若其中一项为 0, 则另两项和为 0; 又如, 若原点 D 不在 ABC 平面上, 则它成为一条立体几何的定理. 这都是把坐标表示转换为点几何表示所得到的副产品.

在第 2 节的例 2.2 中, 诸条件和结论可以化为点几何的形式 (取 A 为原点):

$$\begin{aligned}
&H_1 \Leftrightarrow B\cdot(2O-B)=0,\\
&H_2 \Leftrightarrow C\cdot(2O-C)=0,\\
&H_3 \Leftrightarrow P\cdot(P-2O)=0,\\
&H_4 \Leftrightarrow (P-L)\cdot(B-C)=0,\\
&H_5 \Leftrightarrow \mathrm{i}(C-B)\cdot(L-B)=0,\\
&H_6 \Leftrightarrow (P-M)\cdot C=0,\\
&H_7 \Leftrightarrow \mathrm{i}C\cdot M=0,\\
&g \Leftrightarrow (L-N)\cdot\mathrm{i}(N-M)=0,
\end{aligned}$$

而恒等式 (2.6) 中诸系数项也有明确的几何意义:

$$\begin{aligned}
&u_2^2+u_3^2=C^2,\\
&(u_2-u_1)^2+u_3^2=(B-C)^2,\\
&u_3^2=C^2-\frac{(C\cdot B)^2}{B^2},\\
&u_2x_3-u_3u_4=\mathrm{i}C\cdot P,\\
&u_1x_3=\mathrm{i}B\cdot P,\\
&u_1u_3=\mathrm{i}B\cdot C,\\
&u_3(u_1u_2u_4+u_1u_3x_3-u_2^2u_4-u_3^2u_4)=(\mathrm{i}B\cdot C)(C\cdot P)-(\mathrm{i}C\cdot N)(C^2),\\
&u_3(u_1u_2x_3-u_1u_3u_4-u_2^2x_3-u_3^2x_3)=(\mathrm{i}B\cdot C)(\mathrm{i}C\cdot P)-(C\cdot(P-N))(C^2),\\
&u_2x_5+u_3u_4-u_3x_4=\mathrm{i}C\cdot(L-N),\\
&u_2x_4+u_3x_5-u_2u_4=C\cdot(L-N).
\end{aligned}$$

用点几何恒等式方法证明几何命题的更多例子可参见文献 [11–15]. 在点几何中, 选取适当的点作为原点, 能简化恒等式的推导和表示. 一旦获得了定理的点几何恒等式, 让结论和条件互换有可能得到多个命题. 有些定理的条件过强或者多余, 也可以通过恒等式方法发现.

例 3.1 Cantor 定理 (见图 3): 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O, E、F 和 G 分别是 BC、AD 和 CD 的中点, 作平行四边形 $FOEN$, 求证: $GN\perp AB$.

文献 [15] 不用坐标而直接用待定系数法获得了此命题的点几何恒等式明证, 即 (取 O 为原点)

$$2\left(\frac{A+D}{2}+\frac{B+C}{2}-\frac{C+D}{2}\right)\cdot(A-B)+(B^2-A^2)=0. \tag{3.3}$$

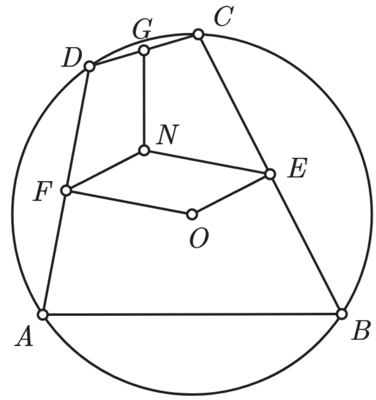

图 3 Cantor 定理

从恒等式 (3.3) 可以看出, 条件 “$ABCD$ 四点共圆” 其实要求过强, 只需保证 $OA = OB$ 即可.

吴文俊和吕学礼在文献 [17] 中提到, 广义的 Morley 定理涉及内、外角三等分线的 27 种情形的交点, 用吴方法来证明, 其过程中不止一次出现了 12 个变量的含有一千多项 (有的有 1,960 项) 的多项式, 认为这样的问题不用机器而用人工处理是非常困难的. 文献 [20] 利用点几何恒等式方法统一给出了广义 Morley 定理的 18 种正三角形情形的一个相对简短的证明.

前面指出, 对于等式型几何定理, 基于吴方法总是可以获得将结论多项式与初式之积表示为假设条件多项式的线性组合这样的多项式恒等式. 而多项式中的变元是点的坐标. 若记 $P = (x, y)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, 则 $x = P \cdot A$, $y = P \cdot B$, 说明 Descartes 直角坐标系中的点的坐标都可以转化为点几何的形式. 因此, 点几何恒等式方法与吴方法本质上是相通的, 适合于所有的等式型几何命题. 尽管如此, 但由这种方法得到的点几何恒等式往往不是最简洁的. 至于恒等式的长度到底有多长, 能不能做出相关的估计, 都值得进一步探讨.

文献 [15] 给出了一种用待定系数法获得点几何恒等式的机械化算法, 但该方法对等式型几何定理是否普遍适用, 仍需要进一步考察.

由吴方法获得的恒等式 (2.7) 描述的是结论和条件之间的线性组合关系. 事实上, 线性组合中的量可以用不同的形式来表示, 如几何不变量、三角函数、复数和向量等, 而且同一个线性组合中也允许用不同形式的量, 只要能得到一个恒等式, 就是一个明证. 例如, 从角度入手, 利用全角表示法, 可以得到 Simson 定理的非常简单和直观的恒等式明证 [21]. 此外, 涉及条件和结论的恒等式其结构能不能不限于线性组合? 我们目前还没有找到具体的例子, 有待更进一步的研究.

4 结论

综上, 我们对等式型的几何定理机器证明的算法, 获得了如下结论:

(1) 在吴方法的基础上, 对算法 (简单情形) 做不多的改进, 可以求出一个恒等式将定理的结论多项式表示为其条件多项式的线性组合 (线性组合的系数为有理分式, 且有理分式的分母为非退化条件), 此恒等式可以看作是该定理的明证; 它本身可以直接验证, 从而定理的成立不再依赖于吴方法的理论与算法, 也与获得恒等式前的繁复计算无关.

(2) 上述所获得的以坐标为变元的恒等式, 可以转化为点几何或向量等其他形式, 使之更为直观简

明. 这也就回答了点几何恒等式明证是否具有普遍性的问题, 肯定了点几何恒等式证明方法对等式型几何定理的普遍有效性.

(3) 在吴方法的理论保证基础上, 可以用多种方法 (不限于吴方法) 获得几何定理的不同类型的恒等式明证, 这使得几何证明的研究更为丰富多彩.

关于进一步的研究, 初步想到有下列几个方面的问题:

(1) 探索基于其他已有的几何定理机器证明方法 (如 Gröbner 基法、消点法和质点几何法等) 获得恒等式明证的可能性;

(2) 探索对有序几何和几何不等式获取恒等式明证的方法;

(3) 探索更直接地构造恒等式明证的理论与算法;

(4) 探索恒等式明证与传统几何推理方法的关系和相互转化的可能;

(5) 探索用恒等式明证发现新定理的可能性和算法;

(6) 探索恒等式明证方法在教育信息技术领域的应用.

恒等式明证是在古老的初等几何世界发现的新方法, 它体现出吴方法的丰富内涵, 显示出吴文俊开创的数学机械化有着旺盛的生命力, 值得更进一步深入的开掘和考察.

参考文献

1 Wu W T. Mathematics mechanization: Its origin, status, and prospect (in Chinese). J Systems Sci Math Sci, 2008, 28: 898–904 [吴文俊. 数学机械化的研究与展望. 系统科学与数学, 2008, 28: 898–904]

2 Wu W T. On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry (in Chinese). Scientia Sinica, 1977, 7: 507–516 [吴文俊. 初等几何判定问题与机械化证明. 中国科学, 1977, 7: 507–516]

3 Zhang J Z. Automatic geometry theorem proving for 20 years (in Chinese). Chinese Sci Bull, 1997, 42: 2248–2259 [张景中. 几何定理机器证明二十年. 科学通报, 1997, 42: 2248–2259]

4 Zhang J Z, Li Y B. Automatic geometry theorem proving for three decades (in Chinese). J Systems Sci Math Sci, 2009, 29: 1155–1168 [张景中, 李永彬. 几何定理机器证明三十年. 系统科学与数学, 2009, 29: 1155–1168]

5 Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. Machine Proofs in Geometry. Singapore: World Scientific, 1994

6 Jiang J G, Zhang J Z. A review and prospect of readable machine proofs for geometry theorems. J Syst Sci Complex, 2012, 25: 802–820

7 Li S, Li C M. Studies in Elementary Geometry, 2nd ed (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2015 [李晟, 李长明. 初等几何研究 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2015]

8 Zhang J Z, Gao X S, Chou S C. The geometry information search system by forward reasoning (in Chinese). Chinese J Comput, 1996, 19: 722–727 [张景中, 高小山, 周咸青. 基于前推法的几何信息搜索系统. 计算机学报, 1996, 19: 722–727]

9 Yang L, Xia B C. Machine Proving and Automatic Discovering of Inequalities (in Chinese). Beijing: Science Press, 2008 [杨路, 夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现. 北京: 科学出版社, 2008]

10 Zhang J Z. Outlines for point geometry (in Chinese). Studies College Math, 2018, 21: 1–8 [张景中. 点几何纲要. 高等数学研究, 2018, 21: 1–8]

11 Zhang J Z, Peng X C. The educational value of point geometry (in Chinese). J Math (China), 2019, 58(2): 1–4 [张景中, 彭翕成. 点几何的教育价值. 数学通报, 2019, 58(2): 1–4]

12 Zhang J Z, Peng X C. The problem solving application of point geometry: Calculation (in Chinese). J Math (China), 2019, 58(3): 1–5 [张景中, 彭翕成. 点几何的解题应用: 计算篇. 数学通报, 2019, 58(3): 1–5]

13 Peng X C, Zhang J Z. The problem solving application of point geometry: Geometric identities (in Chinese). J Math (China), 2019, 58(4): 11–15 [彭翕成, 张景中. 点几何的解题应用: 恒等式篇. 数学通报, 2019, 58(4): 11–15]

14 Peng X C, Zhang J Z. The problem solving application of point geometry: Complex geometric identities (in Chinese). J Math (China), 2019, 58(5): 1–4 [彭翕成, 张景中. 点几何的解题应用: 复数恒等式篇. 数学通报, 2019, 58(5): 1–4]

15 Zhang J Z, Peng X C, Chen M. Self-evident automated proving based on point geometry from the perspective of Wu's method identity. J Syst Sci Complex, 2019, 32: 78–94

16 Wu W T. Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries (Elementary Geometry) (in Chinese). Beijing: Science Press, 1984 [吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理 (初等几何部分). 北京: 科学出版社, 1984]

17 Wu W T, Lv X L. Triangles with Equal Angle Bisectors (in Chinese). Beijing: People's Education Press, 1985 [吴文俊, 吕学礼. 分角线相等的三角形. 北京: 人民教育出版社, 1985]
18 Chou S C. Mechanical Geometry Theorem Proving. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988
19 Mo S K. Particle Geometry (in Chinese). Chongqing: Chongqing Press, 1992 [莫绍揆. 质点几何学. 重庆: 重庆出版社, 1992]
20 Zhang J Z, Zou Y, Peng X C. A point-geometry proof for generalized Morley's theorem (in Chinese). J Math (China), 2019, 58(11): 1–3 [张景中, 邹宇, 彭翕成. 广义莫莱定理的点几何证明. 数学通报, 2019, 58(11): 1–3]
21 Zhang J Z. How Does a Computer Solve Geometry Problems—Talking about Automated Reasoning (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 2006 [张景中. 计算机怎样解几何题—谈谈自动推理. 北京: 清华大学出版社, 2006]

An identity method for proving geometry theorems based on Wu's method

Yu Zou, Xicheng Peng & Yongsheng Rao

Abstract For many years it was generally considered that the proofs given by the coordinate method of mechanical geometry theorem proving represented by Wu's method were unreadable or not a humanoid solution in the Turing sense. In fact, as long as a few improvements are made to Wu's algorithm, i.e., expressing the conclusion polynomial as a linear combination of rational fraction coefficients of all condition polynomials, the self-evident identity proof can be obtained which is not dependent on the theory, algorithm of Wu's method and a large number of calculation processes. Such identities can be converted to other more concise and more intuitive geometric forms, such as point geometry or vector and other forms, to obtain a variety of proving methods. This also proves the general validity of the point geometry identity method for the geometric propositions of equality type.

Keywords **Wu's method, geometry theorem proving, identity method, point geometry**

MSC(2010) **03F07, 03F20, 03F65**

doi: 10.1360/SSM-2020-0108