中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 10 期: 1445～1462
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

Ahlfors 第二基本定理中等号成立的不可能性

献给杨乐教授 80 华诞

张广远*, 孙宗汉

清华大学数学科学系, 北京 100084
E-mail: gyzhang@mail.tsinghua.edu.cn, sun-zh13@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2019-01-30; 接受日期: 2019-07-29; 网络出版日期: 2019-09-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11531007) 资助项目

摘要 Ahlfors 第二基本定理断言, 对于扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上任意 q $(q \geqslant 3)$ 个互异点构成的集合 E_q, 都存在一个最小正常数 $H_0(E_q)$, 使得任意单连通曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$ 都满足

$$(q-2)A(\Sigma) - 4\pi\#(f^{-1}(E_q) \cap U) \leqslant H_0(E_q)L(\partial\Sigma),$$

其中 $A(\Sigma)$ 是 Σ 的面积, $L(\partial\Sigma)$ 是 Σ 的周长, $\#$ 表示元素的个数. 之前的论文已经证明, 上述定理中的等号不可能成立. 作为 Ahlfors 第二基本定理的特殊情形, 存在一个最小的正常数 $h_0(E_q)$, 使得每个内部不取 E_q 的单连通曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$ (即要求 $f(U) \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash E_q$), 都满足

$$(q-2)A(\Sigma) \leqslant h_0(E_q)L(\partial\Sigma).$$

本文证明这个不等式中的等号还是不可能成立 (Zhang (2013) 已经针对一个特殊情形发现此现象), 证明过程又给出了一些其他的结果, 回答了我们早先论文未解决的两个问题.

关键词 覆盖曲面 等周不等式 球面几何 Ahlfors 常数

MSC (2010) 主题分类 30D35, 30D45, 52D60

1 引言

Nevanlinna 的值分布理论是 20 世纪数学领域的伟大成就 (参见文献 [1–4]), 其中, 最核心的结果是 Nevanlinna 第二基本定理. 1935 年, Ahlfors 在他著名的工作 [5] 中建立了一个平行的理论, 即 Ahlfors 覆盖曲面论 (参见文献 [4, 6–9]). Nevanlinna 的方法偏重于分析, 而 Ahlfors 的方法则偏重于初等的几何直观. 作为文献 [10, 11] 的后续研究, 本文继续研究 Ahlfors 覆盖曲面论中一些尚未解决的问题.

英文引用格式: Zhang G Y, Sun Z H. The impossibility of the equality in Ahlfors' second fundamental theorem (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1445–1462, doi: 10.1360/N012019-00040

© 2019《中国科学》杂志社

1.1 覆盖曲面

本文中, Riemann 球面 S 即为 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为中心的单位球面. 利用通常的球极投影, 扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 可等同于 S, 因此, $\overline{\mathbb{C}}$ 自动带有 S 诱导的球面度量. 于是在 $\mathbb{C}$ 上, 球面的长度形式 dL 与球面的面积形式 dA 有如下的表达式:

$$dL = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}, \quad dA = \frac{4dx \wedge dy}{(1+|z|^2)^2}, \quad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

定义 1.1 (1) 对于区域 U 到 S 的连续映射 f, 如果 f 是开映射, 且对于 S 上的每个点 w, 原像 $f^{-1}(w)$ 都是 U 的离散子集, 则称 f 为拓扑全纯 (light) 映射. 对于闭若当区域 $\overline{U}$ 到 S 的映射 f, 如果 f 可以延拓为 $\overline{U}$ 的某个邻域 V 上的拓扑全纯映射, 则称 f 为 $\overline{U}$ 上的拓扑全纯映射.

(2) 若 f 是从闭若当区域 $\overline{U}$ 到 S 的保向拓扑全纯映射, 则序对 $(f, \overline{U})$ 被称为一个 (覆盖) 曲面. 对于曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$, 闭曲线 $f : \partial U \to S$ 称为 Σ 的边界, 记为 $\partial\Sigma = (f, \partial U)$, 参见文献 [10, 引言] 中 $L(\partial\Sigma)$ 和面积 $A(\Sigma)$ 的定义 (或本文注释 1.1).

(3) 若 f 是从 S 到 S 的保向拓扑全纯映射, 则序对 (f, S) 被称为一个闭曲面. 此时自然规定 $\partial\Sigma = \emptyset$, $L(\partial\Sigma) = 0$.

由于球面本身不是闭若当区域, 所以单独使用曲面一词时, 所指的并不含闭曲面. 尽管如此, 后面对于曲面的讨论, 其中一些可以自然地适用于闭曲面. 其次, 确实可以证明 $A(\Sigma)$ 总是有限的; 如果只从定义 1.1 看, 闭曲线 $\partial\Sigma$ 可能不可求长, 但后文会自动约束周长为有限值.

在本文中, $\mathrm{Homeo}(\overline{U}, \overline{V})$ 表示由 $\overline{U}$ 映满 $\overline{V}$ 的全体保向同胚的集合. 与文献 [10, 注释 2.4] 中一样, 对于任意 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\overline{V}, \varphi(\overline{V}))$, 形如 $\Sigma_1 = (f, \varphi(\overline{V}))$ 和 $\Sigma_2 = (f \circ \varphi, \overline{V})$ 的两个曲面称为等价的, 记为 $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$. 在我们的研究中, 等价的曲面确实可以彼此替换, 因为它们的面积和周长等性质全都相同. 由于任意两个闭若当区域同胚, 为方便起见, 不妨假设曲面的定义域 $\overline{U}$ 是闭单位圆 $\overline{\Delta}$. 最后, 由下面的注释 (参见文献 [10, 注释 2.5]), 覆盖曲面可以理解成非常值亚纯函数给出的曲面, 这时长度和面积有非常自然的解释.

注 1.1 每个曲面 Σ 都等价于某个形如 $(f, \overline{V})$ 的曲面, 其中 f 是 $\overline{V}$ 的某个邻域上的非常值亚纯函数. 此时, 我们有

$$A(\Sigma) = A(f, \overline{V}) = \int_V \frac{4|f'(z)|^2 dxdy}{(1+|f(z)|^2)^2},$$

以及

$$L(\partial\Sigma) = L(f, \partial V) = \int_{\partial V} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz|.$$

类似地, 每个闭曲面 $\Sigma = (f, S)$ 都等价于某个非常值有理函数 g 给出的闭曲面 (g, S). g 的次数只由 Σ 决定, 记作 $n(\Sigma, S) \in \mathbb{N}$, 且有 $A(\Sigma) = 4\pi n(\Sigma, S)$.

换言之, 忽略曲面的等价不计的意义下, 总可以认为曲面是由亚纯函数给出的. 在一定程度上说, 拓扑全纯映射可以看成是对亚纯函数的拓扑刻画, 主要作用在于, 避开了亚纯函数的刚性, 便于后续的一些讨论 (如引理 2.2). Ahlfors 第二基本定理表述如下:

定理 1.1 [5] 令 $a_1, \ldots, a_q$ 为 S 上 q $(q \geqslant 3)$ 个互异点, 则存在常数 $h = h(a_1, \ldots, a_q)$, 使得每个曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$ 都满足

$$(q-2)A(\Sigma) - 4\pi \sum_{m=1}^{q} \overline{n}(f, a_m) \leqslant hL(\partial\Sigma),$$

其中 $\overline{n}(f,a_m)$ (也记为 $\overline{n}(\Sigma,a_m)$) 表示 a_m 在 U 中原像的个数 $\#(f^{-1}(a_m)\cap U)$, 不计重数.

这个定理在值分布论中的应用, 往往关心 h 的存在性与上界 (如文献 [9]), 并不需要 h 的最佳值. 因此, 对 h 的最佳值以及使 Ahlfors 第二基本定理中的不等式两边差值尽量小的曲面进行的研究较少, 这是我们研究的兴趣所在.

记号 1.1 将 $a_1,\ldots,a_q$ 称为特殊点, $E_q=\{a_1,a_2,\ldots,a_q\}$ 称为特殊点集. 如果曲线 α 可以剖分为有限段简单解析弧, 则称 α 分段解析 (参见文献 [12, 定义 1.2]). 本文用 $\mathbf{F}$ 表示全体边界分段解析的曲面构成的曲面族.

对于 $\Sigma\in\mathbf{F}$, 周长 $L(\partial\Sigma)$ 总是有限的, 因此可以引入如下记号:

$$\begin{aligned}
&\overline{n}(\Sigma,E_q)=\sum_{m=1}^{q}\overline{n}(f,a_m),\\
&R(\Sigma,E_q)=(q-2)A(\Sigma)-4\pi\overline{n}(\Sigma,E_q),\\
&H(\Sigma,E_q)=\frac{R(\Sigma,E_q)}{L(\partial\Sigma)}.
\end{aligned}$$

对于闭曲面 Σ, 如上定义的 $\overline{n}(\Sigma,E_q)$ 和 $R(\Sigma,E_q)$ 也有意义, 但 $H(\Sigma,E_q)$ 无法定义.

尽管严格证明有些烦琐, 但直观上可以接受, 每个曲面实际上都可以由边界分段解析的曲面任意逼近. 明确些说, 对于每个曲面 Σ, 都存在 $\mathbf{F}$ 中的序列 $\{\Sigma_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}A(\Sigma_n)=A(\Sigma),\quad \lim_{n\to\infty}L(\partial\Sigma_n)=L(\partial\Sigma),$$

而且 $\overline{n}(\Sigma_n,E_q)=\overline{n}(\Sigma,E_q)$ 恒成立. 所以, 就研究 h 的最终目的来说, 我们不妨约定只讨论 $\mathbf{F}$ 中的曲面, 这样的限制并不失去一般性. 实际上, 部分文献中曲面的定义就直接要求了曲面的边界须有一定的正则性.

定义

$$H_0(E_q)=H_0(a_1,\ldots,a_q)=\sup\{H(\Sigma,E_q):\Sigma\in\mathbf{F}\}.$$

不难看出, 正实数 $H_0(E_q)$ 是定理 1.1 中系数 h 的最小允许值, 它只由 E_q 决定, 不妨称为 E_q 的 Ahlfors 常数. 由上面的说明, Ahlfors 常数的具体取值不依赖于 $\mathbf{F}$ 定义的一些非本质改动, 例如, 要求 f 是拓扑全纯映射还是亚纯函数, 以及对边界附加何种合理的正则性条件.

Ahlfors 第二基本定理的一个典型应用是证明 Picard 小定理 (参见文献 [13] 的结尾), 所以, 我们有时专门考虑满足 $f(U)\cap E_q=\emptyset$ 的曲面 $\Sigma=(f,\overline{U})$. 对于 $\Sigma=(f,\overline{U})$, 即使 $b\in\partial\Sigma$, 只要 $b\notin f(U)$, 我们依然称 Σ 不取 b.

记号 1.2 令 $\mathbf{F}_0(E_q)$ 表示 $\mathbf{F}$ 中全体满足 $\overline{n}(\Sigma,E_q)=0$ 的曲面 Σ 构成的曲面族. 引入记号

$$h_0(E_q)=h_0(a_1,\ldots,a_q)=\sup\{H(\Sigma,E_q):\Sigma\in\mathbf{F}_0(E_q)\},$$

并不妨称之为 E_q 的 ($q-2$ 倍面积 - 周长的) 最佳比值.

显然, 在只讨论不取特殊点的曲面时, $h_0(E_q)$ 是定理 1.1 中系数 h 的最小允许值. 用小扰动的思想不难发现, 内部不取特殊点但边界上可以取特殊点的曲面, 可以用连边界上都不取特殊点的曲面来任意逼近. 因此, $h_0(E_q)$ 的具体取值也不会依赖于 $\mathbf{F}_0(E_q)$ 定义的一些非本质改动, 如曲面边界正则性的要求, 以及是否允许边界取特殊点.

$H_0(E_q)$ 和 $h_0(E_q)$ 是 $a_1,\ldots,a_q$ 的很复杂的函数, 尚没有显式公式计算, 初步判断应该不是初等函数. 由这两个函数的定义, $H_0(E_q)\geqslant h_0(E_q)$ 恒成立, 但 $H_0(E_q)>h_0(E_q)$ 确实是可能发生的 (参见文献 [11, 断言 4.3(2)]), 所以, 二者确实并非同一个研究对象. 大体说来, 这两个函数既有较强的相似性, 又有一定差异性. 我们研究的最终目标是, 找到计算这两个函数的方法, 析出这两个函数的具体性质.

关于这两个函数, 已知性质主要是上界, 例如, 文献 [6] 中有上界估计 (δ_{E_q} 是最近的两个特殊点之间的球面距离):

$$H_0(E_q)\leqslant\frac{6\pi(q-2)}{\delta_{E_q}}.$$

而 Sun [9] 给出了 $H_0(E_q)$ 的另一个上界, 这些上界都可以用于研究亚纯函数的正规族和充满圆.

1.2 已知结果与本文结果

本小节将顺次介绍本文的四个主要结果及它们之间的关系. 迄今为止, $H_0(E_q)$ 还没有已知的具体值, 尚不清楚 $H_0(E_q)=h_0(E_q)$ 到底何时成立. 而 $h_0(E_q)$ 目前也只有一个已知的具体值, 即文献 [10] 中的 $h_0(0,1,\infty)$, 完整结果转述如下:

定理 1.2 (1) $h_0(0,1,\infty)=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}h(\theta)=h(\theta_0)\approx 4.03416$, 其中

$$h(\theta)=\frac{(\pi+\theta)\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\arctan\frac{\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\cos\theta}}-\sin\theta;$$

(2) 文献 [10, (1.4)] 表明所有 $\Sigma\in\mathbf{F}_0(\{0,1,\infty\})$ 都满足

$$A(\Sigma)\leqslant\max\{2L(\partial\Sigma),h_0(0,1,\infty)L(\partial\Sigma)-4\pi\}<h_0(0,1,\infty)L(\partial\Sigma);$$

(3) 如文献 [10] 中注释 3.3 之前所构造, $\mathbf{F}_0(\{0,1,\infty\})$ 中有一列曲面 Σ_n, 都满足

$$A(\Sigma_n)=h_0(0,1,\infty)L(\partial\Sigma_n)-4\pi,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}H(\Sigma_n,E_q)=h_0(0,1,\infty).$$

为了确定 $H_0(E_q)$ 和 $h_0(E_q)$, 一个初步的想法是, 试图找到 $\Sigma\in\mathbf{F}$ 满足 $H(\Sigma,E_q)=H_0(E_q)$, 或者找到 $\Sigma\in\mathbf{F}_0(E_q)$ 满足 $H(\Sigma,E_q)=h_0(E_q)$. 不过, 这个想法实际上行不通, 因为这样的曲面并不存在. 我们证明了 Ahlfors 第二基本定理中的等号永远无法成立 (参见文献 [11, 定理 1.5]), 表述如下.

定理 1.3 对于任意 $\Sigma\in\mathbf{F}$, 有 $H(\Sigma,E_q)<H_0(E_q)$.

由文献 [10, (1.4)] (即定理 1.2(2)) 可知, 所有 $\Sigma\in\mathbf{F}_0(\{0,1,\infty\})$ 都满足

$$H(\Sigma,\{0,1,\infty\})<h_0(0,1,\infty).$$

我们自然想到将这个结论推广到一般的 E_q, 换言之, 希望说明即使只考虑不取特殊点的曲面, Ahlfors 第二基本定理的等号仍无法成立. 本文的第一个主要结果正是证明此结论 (如下定理 1.5), 证明过程较定理 1.3 复杂些. 文献 [11, 断言 4.3(1)] 已经宣布过这个定理, 但限于篇幅, 那里没给出证明.

定理 1.4 对于任意 $\Sigma\in\mathbf{F}_0(E_q)$, 有 $H(\Sigma,E_q)<h_0(E_q)$.

鉴于 $H_0(E_q)$ 总是达不到 $h_0(E_q)$, 文献 [10] 中提出首先考虑周长有给定上界的曲面全体.

定义 1.2 令 $\mathbf{F}(L)$ 表示曲面族 $\{\Sigma \in \mathbf{F} : L(\partial\Sigma) \leqslant L\}$, 而 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 表示曲面族 $\mathbf{F}(L) \cap \mathbf{F}_0(E_q)$. 对于 $L > 0$, 令 $H_L(E_q)$ 表示 $\sup\{H(\Sigma, E_q) : \Sigma \in \mathbf{F}(L)\}$, 而 $h_L(E_q)$ 表示 $\sup\{H(\Sigma, E_q) : \Sigma \in \mathbf{F}_0(E_q, L)\}$. 对 $\mathbf{F}$ 的子族 $\mathbf{G}$, $\Sigma_0 \in \mathbf{G}$ 称为 $\mathbf{G}$ 中的极值曲面, 如果 $H(\Sigma_0, E_q)$ 达到极大, 即

$$H(\Sigma_0, E_q) = \max\{H(\Sigma, E_q) : \Sigma \in \mathbf{G}\}.$$

由定义 1.2 可知, $H_L(E_q)$ 和 $h_L(E_q)$ 都是 L 的增函数, 但并不一定严格增 (参见文献 [11, 断言 4.3(3)]). 由于 $\mathbf{F} = \bigcup_{L>0} \mathbf{F}(L)$, $\mathbf{F}_0(E_q) = \bigcup_{L>0} \mathbf{F}_0(E_q, L)$, 我们有

$$\lim_{L\to\infty} H_L(E_q) = H_0(E_q),$$

以及

$$\lim_{L\to\infty} h_L(E_q) = h_0(E_q).$$

$\mathbf{F}(L)$ 或 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面有很多良好的性质 (参见文献 [11]), 这是证明定理 1.3 和 1.4 的基础. 在此先引入一些概念, 以介绍与本文结论密切相关的定理 1.5. 作为约定, 本文中的弧和曲线都要考虑定向, 而且谈到子弧时, 它永远要继承原弧的定向. 谈论 S 上简单曲线的左右侧时, 规定一律从 $\mathbb{R}^3$ 的原点观察. 一段圆弧被称为凸的, 如果它所在圆周的左侧的圆盘不超过半个球面大小; 凸圆弧的反向弧自然称为凹的. 一段凸圆弧, 如果不是直的, 就称为严格凸的. 对于若当区域 U, 约定若当曲线 ∂U 总是被合适地定向, 使得 U 在 ∂U 的左侧. 类似地, 对于若当曲线 α, $S\backslash\alpha$ 在 α 左侧的那个连通分支称为被 α 包围的区域, 这样 α 右侧的那个区域自然被 $-\alpha$ 包围. 定理 1.5 只是对文献 [11, 定理 1.7–1.9] 中相关结论的重新表述.

定理 1.5 若 Σ_L 是 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 则要么 $\partial\Sigma_L$ 是不交 E_q 的严格凸圆周, 且 $L = L(\partial\Sigma_L) < 2\pi$; 要么闭曲线 $\partial\Sigma_L$ 可以唯一地剖分为有限多段曲率相等的凸圆弧 (其中最多有一段是圆周), 使得每段圆弧的端点都在 E_q 中, 但每段圆弧的内部都不交 E_q.

当 $\partial\Sigma_L$ 含有特殊点时, 定理中所述的剖分称为 $\partial\Sigma_L$ 的自然剖分, 剖分出的每段圆弧都称为 Σ_L 的自然边. 当自然边是圆周时, 称为 Σ_L 的自然圆周; 作为补充, 当 $\partial\Sigma_L$ 是不含特殊点的严格凸圆周时, $\partial\Sigma_L$ 本身也被视为 Σ_L 的一个自然圆周. 不是圆周的自然边称为自然弧, 它的两个端点必然不同.

极值曲面的性质解释了我们为何不在曲面的定义中额外要求曲面边界必须是折线, 或者额外要求曲面边界是处处光滑的. 即使做了这样的要求, 因为这种曲面可被边界分段解析的曲面任意逼近, 所以, $H_L(E_q)$ 和 $h_L(E_q)$ 的值也不会变化. 于是, 此时 $\mathbf{F}(L)$ 和 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中往往不存在极值曲面, 给后续研究带来障碍.

本文的第二个主要结果是, 在 $\mathbf{F}(L)$ 和 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中发现了极值曲面 Σ 的两个新性质, 有助于确定极值曲面 Σ, 部分地回答了文献 [11] 结尾的问题. 第一个新性质是 $L(\partial\Sigma) > L/2$. 第二个新性质的动机来源于定理 1.2(2) 中的曲面序列 $\{\Sigma_n\}$: 根据文献 [10] 中的构造法, 对每个 $\Sigma_n = (f_n, \overline{U_n})$, f_n 在 $\overline{U_n}\backslash f_n^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ 上都是局部单射, 但在 $f_n^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ 处则未必是局部单射. 简单的分析即可初步解释这个现象 (见命题 2.1 之前的分析), 进一步研究发现这个现象可以推广至一般的 E_q.

定理 1.6 若 $\Sigma = (f, \overline{U})$ 是 $\mathbf{F}(L)$ 或 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面, 则 $L(\partial\Sigma) > L/2$, 而且对于任意 $z \in \overline{U}\backslash f^{-1}(E_q)$, f 在 z 的某个邻域上是单射.

根据第 2.1 小节中分支点和折返点的定义, 对 $z \in \overline{U}$, 若 f 在 z 处不是局部单射, 则 z 是 f 的分支点或折返点. 由定理 1.5 可知, 极值曲面的折返值一定是特殊点, 所以, 上述定理中的第二个性质可以表述为 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面 Σ 的分支值总是特殊点, 记作 $CV(\Sigma) \subset E_q$ (见第 2.1 小节).

经验地说, 极值曲面有自然圆周时, 往往没有其他自然边. 同时在后续研究中, 自然圆周又比自然弧更难处理, 所以我们希望在一定程度上说明自然圆周的不存在性. 定理 1.6 刚好可以与文献 [11] 中的一个结果相结合, 用于说明在一些情形下, 若 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 或 $\mathbf{F}(L)$ 中极值曲面的边界含有自然圆周, 则没有其他自然边, 这是本文的第三个主要结果.

定理 1.7 设 Σ_L 为 $\mathbf{F}(L)$ 中或 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面, 含有自然圆周 C, 而 D 是 C 所围的圆盘, 则要么 $\partial\Sigma_L = C$, 要么 $D \cap E_q \neq \emptyset$.

当含有自然圆周 C 的 Σ_L 是 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面时, 还有

(1) 总存在某个只依赖于 E_q 的正实数 $L(E_q)$, 使得 $L(\partial\Sigma_L) \leqslant L(E_q)$. 换言之, 利用

$$\lim_{L\to\infty} H(\Sigma_L, E_q) = H_0(E_q)$$

决定 $H_0(E_q)$ 时, 可以无视自然圆周带来的困难.

(2) 若 $\partial\Sigma_L \neq C$, 则 $(q-2)A(D)/L(C) \geqslant H_L(E_q)$, 而且 E_q 不可能完全落入一个闭的半球面.

本文对定理 1.7(1) 和 1.7(2) 的证明不能直接移植到 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 的情形, 结论是否可推广有待研究. 如果推广不成立, 则这是两种曲面族中极值曲面的第一个有明显差异的性质. $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面 Σ_L 满足 $\partial\Sigma_L = C$ 时, 有必要进一步探索是否总有 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$. 本文的第四个主要结果在 $\overline{D}$ 中最多有一个特殊点时保证了 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$, 而其他情形则等价性不必成立. 这个定理刚好回答了文献 [11] 中的问题 4.5.

定理 1.8 设 Σ_L 为 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, $\partial\Sigma_L$ 是一个自然圆周 (即 $\#(\partial\Sigma_L \cap E_q) \leqslant 1$), 且 D 是 $\partial\Sigma_L$ 所围的圆盘, 则如下结论成立:

(1) 若 $\#(\overline{D} \cap E_q) \leqslant 1$, 则有 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$;

(2) 若 $\#(\overline{D} \cap E_q) \geqslant 2$, 则有 $H(\Sigma_L, E_q) = H((\mathrm{Id}, \overline{D}), E_q)$, 但 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$ 不必成立.

本文的四个主要结论现在列全了, 它们的证明过程都在第 3 节.

2 曲面的性质

本节的前两小节先介绍一般曲面的性质和极值曲面的性质, 多为其他文献所证出的, 在后续的证明中直接引用. 第 2.3 小节中, 进行一个粘合极值曲面的操作, 是证明本文主要结论的必备步骤.

2.1 曲面的局部性质

对于 S 上不对径的两点 $a, b \in S$, S 上从 a 到 b 的最短连线, 记为线段 $\overline{ab}$; 而 $d(a, b)$ 表示 a 和 b 之间的球面距离, 即 a 和 b 之间最短连线的长度. 记号 $\alpha(a \to b)$ 表示一条从 a 到 b 的曲线 α, 用以强调定向和端点. 对于曲线 α 和从 α 到 S 的连续映射 f, 记号 (f, α) 表示新曲线 $f : \alpha \to S$. 对于曲线 α, 不妨将其参数化为 $\alpha = (f(t), [0, 1])$, 记号 α° 表示 α 的内部 $(f(t), (0, 1))$, 而 $-\alpha$ 表示 α 的反向曲线 $(f(1-t), [0, 1])$. 设 φ 是简单弧 α_1 到 $\varphi(\alpha_1)$ 的保向同胚. 只相差一个重新参数化的两条曲线 $(g \circ \varphi, \alpha_1)$ 和 $(g, \varphi(\alpha_1))$ 被称为等价的, 记作 $(g \circ \varphi, \alpha_1) \sim (g, \varphi(\alpha_1))$.

设 $\Sigma = (f, \overline{U}) \in \mathbf{F}$, 而 $p \in \overline{U}$. Σ 在 p 处的重数 $v_\Sigma(p)$ 定义为最大的自然数 N, 使得无论 U_p 是 p 在 $\overline{U}$ 中多么小的邻域, 总存在某点 $w \in S$ 在 $U_p \cap U$ 至少有 N 个原像. 对于 $p \in U$, $v_\Sigma(p)$ 就是 f 在 p 处的映射度. Σ 在 p 处的分支指数 $b(\Sigma, p)$ 定义为 $v_\Sigma(p) - 1$, 而 $w \in S$ 处的总分支指数 $B(\Sigma, w)$ 则定

义为

$$B(\Sigma, w) = \sum_{p \in f^{-1}(w)} b(\Sigma, p).$$

若 $b(\Sigma, p) \geqslant 1$, 则 p 称为 Σ 的分支点, 此时 $B(\Sigma, f(p)) \geqslant 1$, $f(p)$ 称为 Σ 的分支值. Σ 的全体分支点和全体分支值分别构成的两个有限集记为 $C(\Sigma)$ 和 $CV(\Sigma)$. 最后, Σ 的总分支指数 $B(\Sigma)$ 定义为

$$B(\Sigma) = \sum_{p \in C(\Sigma)} b(\Sigma, p) = \sum_{w \in CV(\Sigma)} B(\Sigma, w).$$

对于 $p \in \partial U$, 若 $f|_{\partial U}$ 在 p 的附近是局部单射, 则 p 称为非折返点; 否则 $f|_{\partial U}$ 必在 p 的任意小邻域内不是单射, 而 p 称为折返点, $f(p)$ 称为折返值. 由下面的引理 2.1, 折返点 p 附近 ∂U 总有两段子弧 $\alpha_1(p_1 \to p)$ 和 $\alpha_2(p \to p_2)$, 使得 $(f, \alpha_1) \sim (f, -\alpha_2)$. 此外, 若 $p \in \overline{U}$ 既不是折返点也不是分支点, 则 $f|_{\overline{U}}$ 在 p 的充分小邻域上是单射.

引入记号: $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, $\Delta^+ = \Delta \cap \mathbb{H}^+$, 以及 $\Delta^- = \Delta \backslash \overline{\Delta^+}$. 下述引理正是文献 [12, 引理 2.3], 此处证明从略. 它说明曲面的映射 f 局部地看, 很接近于一个幂函数.

引理 2.1 (1) 设 $\Sigma = (f, \overline{U}) \in \mathbf{F}$, 而 $z \in U$, 则 z 和 $f(z)$ 可以分别选择充分小的邻域 U_z 和 $f(\overline{U_z})$, 经两个适当的同胚 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\overline{\Delta}, \overline{U_z})$ 和 $\psi \in \mathrm{Homeo}(\overline{\Delta}, f(\overline{U_z}))$ 分别参数化为单位圆, 满足 $\varphi(0) = z$, $\psi(0) = f(z)$, 以及对任意 $w \in \overline{\Delta}$, 有

$$\psi^{-1} \circ f|_{\overline{U_z}} \circ \varphi(w) = w^{v_\Sigma(z)}.$$

(2) 设 $\Sigma = (f, \overline{U}) \in \mathbf{F}$, 而 $z \in \partial U$ 不是 Σ 的折返点, 则 z 在 $\overline{U}$ 中有充分小的邻域 U_z, 使得 $f(z)$ 有小邻域 $W_{f(z)}$ 满足 $f(\overline{U_z}) \subset \overline{W_{f(z)}}$; 两个邻域经两个适当的同胚 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(\overline{\Delta^+}, \overline{U_z})$ 和 $\psi \in \mathrm{Homeo}(\overline{\Delta}, \overline{W_{f(z)}})$ 分别参数化后, 满足 $\varphi(0) = z$, $\psi(0) = f(z)$, $(\varphi, [-1, 1]) = \partial U \cap \overline{U_z}$, 以及对任意 $w \in \overline{\Delta^+}$, 有

$$\psi^{-1} \circ f|_{\overline{U \cap U_z}} \circ \varphi(w) = w^{2v_\Sigma(z)-1}.$$

若 $z \in \partial U$ 是 Σ 的折返点, 则只需将最后的式子替换为

$$\psi^{-1} \circ f|_{\overline{U \cap U_z}} \circ \varphi(w) = w^{2v_\Sigma(z)}.$$

设 $\Sigma = (f, \overline{U}) \in \mathbf{F}$, 而 $w \in S$, 定义

$$n(\Sigma, w) = \sum_{p \in f^{-1}(w)} v_\Sigma(p) - \#(f^{-1}(w) \cap \partial U).$$

易见, 在 $S \backslash \partial\Sigma$ 的每个连通分支 V 内, $n(\Sigma, w)$ 是定值, 记为 $n(\Sigma, V)$, 称 Σ 取 V 恰好 $n(\Sigma, V)$ 次. 而 $\overline{n}(\Sigma, w)$ 在 V 内则可能不是定值, 在分支值处偏小, 因为

$$\begin{aligned} n(\Sigma, w) - \overline{n}(\Sigma, w) &= \sum_{p \in f^{-1}(w)} v_\Sigma(p) - \#(f^{-1}(w) \cap \partial U) - \#(f^{-1}(w) \cap U) \\ &= \sum_{p \in f^{-1}(w)} (v_\Sigma(p) - 1) = \sum_{p \in f^{-1}(w)} b(\Sigma, p) = B(\Sigma, w). \end{aligned}$$

设简单弧 α 是 $\partial\Sigma$ 的子弧, 内部不含有折返值, 且 $S\backslash\partial\Sigma$ 有两个连通分支 V_1 和 V_2, 分居 α 左右, 满足 $\alpha\subset\overline{V_1}$, $\alpha\subset\overline{V_2}$. 不妨设 α 作为 $\partial\Sigma$ 的子弧的重数为 $m(\partial\Sigma,\alpha)$, 而 $-\alpha$ 作为 $\partial\Sigma$ 的子弧的重数为 $m(\partial\Sigma,-\alpha)$, 即 $\partial\Sigma$ 正向通过 α 恰 $m(\partial\Sigma,\alpha)$ 次, 反向通过 α 恰 $m(\partial\Sigma,-\alpha)$ 次. 对任意 $w\in\alpha^\circ$, 有重数关系:

$$n(\Sigma,V_1)-m(\partial\Sigma,\alpha)=n(\Sigma,w)=n(\Sigma,V_2)-m(\partial\Sigma,-\alpha).$$

设 $\Sigma=(f,\overline{U})\in\mathbf{F}$, $p\in\partial U$, f 将 $\overline{U}$ 在 p 处的内角映为 Σ 在 $f(p)$ 处的内角 θ_p. 除去有限个点以外, $\partial\Sigma$ 在所有其他点附近都是解析弧, Σ 在这些解析点处的内角当然是平角. 显然有关系 $2\pi(v_\Sigma(p)-1)\leqslant\theta_p\leqslant 2\pi v_\Sigma(p)$, 且 p 为折返点时有 $\theta_p=2\pi v_\Sigma(p)$.

下面的引理是文献 [10, 引理 2.6] 的简单推广, 证明从略.

引理 2.2 设 $\Sigma_1=(f_1,\overline{U_1})$, $\Sigma_2=(f_2,\overline{U_2})\in\mathbf{F}$, ∂U_1 和 ∂U_2 分别含有子弧 α_1 和 α_2, 使得 $(f_1,\alpha_1)\sim(f_2,-\alpha_2)$, 则 Σ_1 与 Σ_2 可以沿 (f_1,α_1) 粘合出新的 (闭) 曲面 Σ_3, 满足 $A(\Sigma_3)=A(\Sigma_1)+A(\Sigma_2)$,

$$L(\partial\Sigma_3)=L(\partial\Sigma_1)+L(\partial\Sigma_2)-2L(f_1,\alpha_1),$$

以及下述结论:

(1) 若 α_1 是 ∂U_1 的真子弧, 则 $\Sigma_3\in\mathbf{F}$ 且满足

$$\overline{n}(\Sigma_3,E_q)=\overline{n}(\Sigma_1,E_q)+\overline{n}(\Sigma_2,E_q)+\#(\alpha_1^\circ\cap f_1^{-1}(E_q));$$

(2) 若 $\alpha_1=\partial U_1$, $\alpha_2=\partial U_2$, 则 Σ_3 是闭曲面且满足

$$\overline{n}(\Sigma_3,E_q)=\overline{n}(\Sigma_1,E_q)+\overline{n}(\Sigma_2,E_q)+\#(\partial U_1\cap f_1^{-1}(E_q)).$$

只要 ∂U_1 上没有 Σ_1 的折返点, ∂U_2 上就没有 Σ_2 的折返点, 则对任意 $w\in S$, 有

$$B(\Sigma_1,w)+B(\Sigma_2,w)=B(\Sigma_3,w).$$

举简单例子即可粗糙地看到, $CV(\Sigma)\subset E_q$ 有助于增大 $R(\Sigma,E_q)$. 当曲面有分支值在 E_q 之外时, 按文献 [12] 中的思路, 可以尝试将这个分支值挪入 E_q, 这个过程可能导致曲面分裂为多个曲面. 总之, 可以得到如下命题 (即文献 [12, 定理 4.1]):

命题 2.1 设 $\Sigma\in\mathbf{F}$, 且 $CV(\Sigma)\backslash E_q\neq\emptyset$, 则存在有限个曲面 $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_m\in\mathbf{F}$ $(m>0)$, 满足

$$L(\partial\Sigma)\geqslant L(\partial\Sigma_1)+\cdots+L(\partial\Sigma_m)$$

和

$$\overline{n}(\Sigma,E_q)\geqslant\overline{n}(\Sigma_1,E_q)+\cdots+\overline{n}(\Sigma_m,E_q).$$

此外, 可要求如下两种情形必居其一:

(1) $m=1$, 且 $R(\Sigma_1,E_q)>R(\Sigma,E_q)$;

(2) $m\geqslant 2$, 且

$$R(\Sigma_1,E_q)+\cdots+R(\Sigma_m,E_q)\geqslant R(\Sigma,E_q).$$

2.2 极值曲面的性质

文献 [11] 给出了 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 或 $\mathbf{F}(L)$ 中极值曲面的一些性质, 有助于证明本文的结论.

为了描述这些性质, 还需要引入一些记号. 设 β 是圆周 C 上的一段弧, 若 $2L(\beta) > L(C)$ (允许 $\beta = C$), 则称 β 为优弧; 反之, 若 $2L(\beta) < L(C)$, 则 β 称为劣弧. 半圆则既不算优弧也不算劣弧, 而本文中实质上不需要考虑超过全圆的非简单圆弧. S 上的圆弧有两种曲率: 大圆 $\partial\Delta$ 的全曲率 $k_t(\partial\Delta)$ 为 1, 而测地曲率 $k(\partial\Delta)$ 为 0. 对于一般的圆周 C, 两种曲率的关系是 $k_t^2(C) = 1 + k^2(C)$. 设圆周 C 的角半径 (不同于 Euclid 半径, C 的角半径是 C 上的一点到 C 的球面圆心的球面距离) 为 θ, 则 C 的 Euclid 半径为 $\sin\theta$, 因此, $k_t(C) = \csc\theta$, 故有 $k(C) = \pm\cot\theta$. 约定 $k(C)$ 的符号表现 C 的凸凹性: C 是严格凸圆周时, $k(C) > 0$; 而 $-C$ 是严格凸圆周时, $k(C) < 0$. 下述定理是文献 [11] 中的定理 1.9.

定理 2.1 设 Σ_L 为 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 而 $k(\partial\Sigma_L)$ 表示 Σ_L 所有的自然边的公共的测地曲率. 此时则有 $0 \leqslant k(\partial\Sigma_L)H(\Sigma_L, E_q) \leqslant q-2$, 且 Σ_L 最多有一条自然边是优弧 (含自然圆周). 若此时还有 $L(\partial\Sigma_L) < L$, 则可得 $k(\partial\Sigma_L)H(\Sigma_L, E_q) = q-2$, 且 Σ_L 没有自然边是优弧.

令

$$\delta_{E_q} = \min\{d(a_i, a_j) : 1 \leqslant i < j \leqslant q\}$$

为特殊点间的最小球面距离. 当 $L < 2\delta_{E_q}$ 时, $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面 Σ_L 必然满足 $\#(\partial\Sigma_L \cap E_q) \leqslant 1$, 即 Σ_L 无法含有自然弧. 根据定理 1.5, 此时 $\partial\Sigma_L$ 必是一个严格凸圆周, 而且 $L = L(\partial\Sigma_L) < 2\pi$. 由 Bernstein 等周不等式 (参见文献 [14] 或 [10, 引理 3.4]) 可知, 文献 [11, 定理 1.8] 可推出如下结论.

定理 2.2 (1) 设 Σ_L 为 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面, $\partial\Sigma_L$ 只是一个自然圆周, 且 D 是 $\partial\Sigma_L$ 所围的圆盘, 则 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$.

(2) 当 $L < 2\delta_{E_q}$ 时,

$$h_L(E_q) = \frac{(q-2)(2\pi - \sqrt{4\pi^2 - L^2})}{L},$$

而且 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中所有的极值曲面恰好是所有等价于 $(\mathrm{Id}, \overline{D})$ 的曲面, 其中 D 是任意满足 $L(\partial D) = L$ 和 $D \cap E_q = \emptyset$ 的圆盘.

定理 1.8(2) 说明定理 2.2(1) 无法向 $\mathbf{F}(L)$ 推广, 即 Σ_L 可能不等价于 $(\mathrm{Id}, \overline{D})$. 定理 1.8 的证明要用到下面的引理, 即文献 [11, 注释 3.3].

引理 2.3 对于 $\Sigma = (f, \overline{U}) \in \mathbf{F}$, 设 $\partial\Sigma_L$ 可以剖分为有限段凸圆弧, 且每段端点都在 E_q 中 (除非 $\partial\Sigma_L$ 恰是一个自然圆周, 可以认为没有端点). 设 ∂U 的子弧 $\beta_1(p_0 \to p_1)$ 满足 $\beta_1 \backslash \{p_0, p_1\} \cap C(\Sigma) = \emptyset$ (允许 $p_0 = p_1$), 且 (f, β_1) 是凸圆周 $\alpha_1(b_0 \to b_0)$, 满足 $\alpha_1 \cap E_q \subset \{b_0\}$.

(1) 令 $\gamma_1(b_0 \to b_0)$ 为在 α_1 左侧的严格凸圆周 (两者必在 b_0 相切), 而 D 是 $\alpha_1 + (-\gamma_1)$ 所围的月牙形区域, 满足 $D \cap (CV(\Sigma) \cup E_q) = \emptyset$, 则 $\overline{U}$ 中必含有闭若当区域 $\overline{V}$, 满足 $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{V} \backslash \{p_0, p_1\}, \overline{D} \backslash \{b_0\})$ 和 $\partial V \cap \partial U = \beta_1$.

(2) 若 α_1 所围的圆盘 D_{α_1} 满足 $D_{\alpha_1} \cap (CV(\Sigma) \cup E_q) = \emptyset$, 则 $\beta_1 = \partial U$, 而且 $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \overline{D_{\alpha_1}})$.

现在给 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面 Σ 的顶点进行分类, 只需考虑 $\partial\Sigma \cap E_q \neq \emptyset$ 的情形. 此时不妨设 $\partial\Sigma$ 的自然剖分为

$$\alpha_1(p_0 \to p_1) + \alpha_2(p_1 \to p_2) + \cdots + \alpha_m(p_{m-1} \to p_0).$$

根据定理 1.5 可知, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 都是凸圆弧, 曲率相同, 而顶点 $p_0,\dots,p_{m-1}$ 都是特殊点. 每个顶点 p_j 可归为如下四种类型之一, 分别称为严格凸顶点、圆顶点、严格凹顶点和折返顶点. 如果 α_j 和 α_{j+1} 在 p_j 的切向量相同, 即 $\alpha_j+\alpha_{j+1}$ 在 p_j 附近仍是圆弧, 则称 p_j 为圆顶点. 另外一个特殊情形是 p_j 为折返值, 此时 α_j 和 α_{j+1} 均为线段且 $\alpha_j\sim-\alpha_{j+1}$, 而 p_j 称为折返顶点. 一般情形时, 设 V 是在 $\alpha_j+\alpha_{j+1}$ 左侧的区域 (尽管 $\alpha_j+\alpha_{j+1}$ 可能并不包围一个区域, 但是无妨). 如果 V 在 p_j 处的内角严格小于平角, 则称 p_j 为严格凸顶点. 反之, 如果 V 在 p_j 处的内角严格大于平角, 则称 p_j 为严格凹顶点. 注意, 很可能有两个重合的顶点, 其类型不同.

为推广定理 2.2(1), 可以思考 $\mathbf{F}_0(E_q,L)$ 中的极值曲面 $\Sigma=(f,\overline{U})$ 只有圆顶点时, f 是否一定是同胚. 此时, 作为集合, $\partial\Sigma$ 一定是个凸圆周, 但可能不是自然圆周, 而是由多条自然弧拼成的. 所以作为曲线, $\partial\Sigma$ 的重数 m 可能大于 1, 这并不与定理 2.1 相矛盾. 设 D 是 $\partial\Sigma$ 所围的圆盘, 则根据重数关系, Σ 取 D 至少 m 次, 因此, $D\cap E_q=\emptyset$.

$E_q\backslash\partial\Sigma\neq\emptyset$ 的情形是简单的. 此时 $S\backslash\overline{D}$ 也含有特殊点, 即 Σ 只能取 $S\backslash\overline{D}$ 0 次, 而取 D 刚好 m 次. f 为 $\overline{U}$ 到 $\overline{D}$ 的 m 对 1 的分支覆盖, 必恰好有 $m-1$ 个分支点 (计重数). 由于 f 在 ∂U 上每一点附近都不是局部满射, 故 $\partial U\cap C(\Sigma)=\emptyset$. 只要 $m\geqslant 2$, Σ 必有分支值落入 D 而无法落入 E_q, 这与定理 1.6 矛盾. 所以只能 $m=1$, 即 $\Sigma\sim(\mathrm{Id},\overline{D})$. 之后证明定理 1.6 时, 没有利用本情形下 f 是同胚这条性质, 避免了逻辑循环.

比较困难的是 $E_q\subset\partial\Sigma$ 的情形, 此时 $S\backslash\overline{D}$ 也不含特殊点. 设 Σ 取 $S\backslash\overline{D}$ 共 t 次, 根据重数关系, Σ 取 D 恰好 $m+t$ 次. 若 $t=0$, 则仿照上面讨论, 仍可得到 $m=1$, 即 $\Sigma\sim(\mathrm{Id},\overline{D})$. 需要关注的是, 是否可能 $t\geqslant 1$, 即 $f\notin\mathrm{Homeo}(\overline{U},\overline{D})$. 只从拓扑的角度看, 这类曲面 Σ 确实是存在的, 可以构造如下.

不妨设

$$\partial\Delta=\alpha_1(a_1\to a_2)+\alpha_2(a_2\to a_3)+\cdots+\alpha_q(a_q\to a_1).$$

取 $\Sigma_0=(\mathrm{Id},S\backslash\Delta)$, 及 q 个曲面 $\Sigma_1,\dots,\Sigma_q$ 都是 $(\mathrm{Id},\overline{\Delta})$. 由引理 2.2, 将每个 Σ_j 与 Σ_0 沿 α_j 粘合, 最后即可得到 $\Sigma\in\mathbf{F}_0(E_q)$, 且 $\partial\Sigma$ 是重数为 $q-1$ 的圆周 $\partial\Delta$. 但尚不清楚这样构造的曲面可否作为 $\mathbf{F}_0(E_q,L(\partial\Sigma))$ 中的极值曲面. 仿照后面引理 2.6 的证明思路, 如果这样的 Σ 存在, 则 ∂D 必为大圆.

2.3 $h_L(E_q)$ 关于 L 的增长性

如下命题是之后证明定理 1.4 的基础, 其证明过程分布于整个小节.

命题 2.2 若 $\mathbf{F}_0(E_q,L)$ 中存在极值曲面, 则 $h_L(E_q)<h_{2L}(E_q)$.

总体思路是使用反证法, 假设 $\Sigma=(f,\overline{U})$ 为 $\mathbf{F}_0(E_q,L)$ 中的一个极值曲面, 且 $h_L(E_q)=h_{2L}(E_q)$. 这样, Σ 同时也是 $\mathbf{F}_0(E_q,2L)$ 中的极值曲面. 事实上, 按照如下的办法分五类情形讨论, 即可在各种情形都导出矛盾, 从而完成证明.

由定理 2.1 知, Σ 没有自然圆周, 所以, $\#(\partial\Sigma\cap E_q)\geqslant 2$. 设 $\partial\Sigma$ 的自然剖分为

$$\alpha_1(p_0\to p_1)+\alpha_2(p_1\to p_2)+\cdots+\alpha_m(p_{m-1}\to p_0).$$

一共有如下五种情形: (1) Σ 有折返顶点 p_1; (2) Σ 有严格凹顶点 p_1; (3) Σ 有严格凸顶点 p_1; (4) Σ 只有圆顶点, 且 $E_q\backslash\partial\Sigma\neq\emptyset$; (5) Σ 只有圆顶点, 且 $E_q\subset\partial\Sigma$. 我们按这个由易至难的次序分情形讨论, 以完成证明.

首先, 不妨设 p_1 是 Σ 的一个折返顶点, 此时 $\alpha_1 \sim -\alpha_2$, 且 $\alpha_1^\circ \cap E_q = \emptyset$. 由引理 2.2 知, 取 $\Sigma_1 \sim \Sigma$, Σ 和 Σ_1 可以沿着 $\partial\Sigma$ 的 α_1 和 $\partial\Sigma_1$ 的 α_2 粘合. 形成的新曲面 Σ' 必属于 $\mathbf{F}_0(E_q, 2L)$, 因为

$$L(\partial\Sigma') = 2L(\partial\Sigma) - 2L(\alpha_1) < 2L.$$

因为 $A(\Sigma') = 2A(\Sigma)$, 所以有

$$h_{2L}(E_q) \geqslant H(\Sigma', E_q) > H(\Sigma, E_q) = h_L(E_q).$$

其次, 不妨设 p_1 是 Σ 的一个严格凹顶点. 取 $z_1 \in \alpha_1$ 和 $z_2 \in \alpha_2$ 充分靠近 p_1, 令 $\alpha_1'(z_1 \to p_1)$ 和 $\alpha_2'(p_1 \to z_2)$ 分别为 α_1 和 α_2 的很短的子弧. 由于充分短的圆弧的几何性质接近于线段, $\overline{z_1z_2} + (-\alpha_2') + (-\alpha_1')$ 必为若当曲线, 包围小若当区域 D, 使得 $\overline{D} \cap E_q = \{p_1\}$. 由引理 2.2, 取 $\Sigma_1 \sim \Sigma$, Σ_1 和 Σ 可以分别粘合到小曲面 $(\mathrm{Id}, \overline{D}) \in \mathbf{F}_0(E_q)$ 上, 具体言之, Σ_1 的 α_1' 粘合到 $(\mathrm{Id}, \overline{D})$ 的 $-\alpha_1'$, 而 Σ_2 的 α_2' 粘合到 $(\mathrm{Id}, \overline{D})$ 的 $-\alpha_2'$. 形成的新曲面 Σ' 必属于 $\mathbf{F}_0(E_q, 2L)$, 因为

$$\begin{aligned} L(\partial\Sigma') &= L(\partial\Sigma_1) + L(\partial\Sigma) + L(\overline{z_1z_2}) - L(\alpha_2') - L(\alpha_1') \\ &\leqslant L(\partial\Sigma_1) + L(\partial\Sigma) = 2L(\partial\Sigma) \leqslant 2L. \end{aligned}$$

因为 $A(\Sigma') > 2A(\Sigma)$, 所以有

$$h_{2L}(E_q) \geqslant H(\Sigma', E_q) > H(\Sigma, E_q) = h_L(E_q).$$

剩下三种情形稍复杂, 各自写为一个引理.

引理 2.4 若 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$ 有一个严格凸顶点 p_1, 则 $h_{2L}(E_q) > h_L(E_q)$.

证明 不妨设 $\beta_1(P_0 \to P_1)$ 和 $\beta_2(P_1 \to P_2)$ 为 ∂U 的子弧, 使得 $(f, \beta_1) = \alpha_1$, $(f, \beta_2) = \alpha_2$. 任选充分小的 $l > 0$, 则存在 $z_1 \in \alpha_1$ 和 $z_2 \in \alpha_2$ 充分靠近 p_1, 使得 α_1 和 α_2 分别有很短的子弧 $\alpha_1'(z_1 \to p_1)$ 和 $\alpha_2'(p_1 \to z_2)$, 满足 $L(\alpha_1') = L(\alpha_2') = l$. 设 z_0 为 $\overline{z_2z_1}$ 的中点, 而 2θ 为 $\alpha_1 + \alpha_2$ 左侧区域在 p_1 的内角, 则有 $\theta < \pi/2$. 由于充分短的圆弧的几何性质接近于线段, 因此, $\alpha_1' + \alpha_2' + \overline{z_2z_1}$、$\alpha_1' + \overline{p_1z_0} + \overline{z_0z_1}$ 和 $\overline{z_0p_1} + \alpha_2' + \overline{z_2z_0}$ 必皆为若当曲线. 设 $\alpha_1' + \overline{p_1z_0} + \overline{z_0z_1}$ 和 $\overline{z_0p_1} + \alpha_2' + \overline{z_2z_0}$ 分别包围小若当区域 V_1 和 V_2. 类比平面几何, 随着 $l \to 0$, 易见

$$A(V_1 \cup V_2) = O(l^2) = o(l),$$

而 $L(\overline{z_2z_1}) = 2l\sin\theta + o(l)$.

由引理 2.1 可知, 在 P_1 的某个小邻域上, f 的拓扑性态犹如一个幂函数. 只要 l 小到刚才规定出的各个几何对象都落入 P_1 的这个邻域, 就存在 U 的子区域 U_1 和 U_2, 使得 $f|_{\overline{U_1}} \in \mathrm{Homeo}(\overline{U_1}, \overline{V_1})$, $f|_{\overline{U_2}} \in \mathrm{Homeo}(\overline{U_2}, \overline{V_2})$, 而且 $(f, \partial U_1 \cap \partial U) = \alpha_1'$, $(f, \partial U_2 \cap \partial U) = \alpha_2'$. 于是, 曲面 $(f, \overline{U \backslash U_1})$ 和 $(f, \overline{U \backslash U_2})$ 的边界就分别有了反向子弧 $\overline{z_0p_1}$ 和 $\overline{p_1z_0}$, 由引理 2.2 可知, 这两个曲面可以沿此子弧粘合. 得到的新曲面 Σ' 必属于 $\mathbf{F}_0(E_q, 2L)$, 因为

$$\begin{aligned} L(\partial\Sigma') &= 2L(\partial\Sigma) - L(\alpha_1') - L(\alpha_2') + L(\overline{z_2z_1}) \\ &= 2L(\partial\Sigma) - 2l + 2l\sin\theta + o(l) \leqslant 2L. \end{aligned}$$

进一步, 随着 $l \to 0$, 有

$$\frac{A(\Sigma')}{L(\partial\Sigma')} = \frac{2A(\Sigma) - o(l)}{2L(\partial\Sigma) - 2l + 2l\sin\theta + o(l)} > \frac{A(\Sigma)}{L(\partial\Sigma)} = \frac{h_L(E_q)}{q-2}.$$

最后得到

$$h_{2L}(E_q) \geqslant H(\Sigma', E_q) > H(\Sigma, E_q) = h_L(E_q).$$

证毕. □

引理 2.5 若 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面 Σ 只有圆顶点, 且 $E_q \backslash \partial\Sigma \neq \emptyset$, 则对任意 $L' > L$, 有 $h_{L'}(E_q) > h_L(E_q)$.

证明 若不然, 则有 $h_{L'}(E_q) = h_L(E_q)$, 即 Σ 也是 $\mathbf{F}_0(E_q, L')$ 中极值曲面. 由定理 2.1, 有

$$k(\partial\Sigma)H(\Sigma, E_q) = q - 2.$$

不妨设 $\partial\Sigma$ 是 m 重的圆周 C, 而 C 围住圆盘 D. 设 C 的角半径为 $\theta \leqslant \pi/2$, 则 $k(C) = \cot\theta$. 因 $(S\backslash\overline{D}) \cap E_q \neq \emptyset$, Σ 不取 $S\backslash\overline{D}$, 由重数关系可知, Σ 取 D 恰好 m 次. 于是, $L(\partial\Sigma) = mL(C)$, $A(\Sigma) = mA(D)$, 进而,

$$H(\Sigma, E_q) = \frac{(q-2)A(D)}{L(C)} = (q-2)\tan\frac{\theta}{2}.$$

因此有

$$(q-2)\tan\frac{\theta}{2}\cot\theta = q - 2,$$

即与 $0 < \theta \leqslant \pi/2$ 矛盾. 所以, 必然有 $h_{L'}(E_q) > h_L(E_q)$. □

引理 2.6 若 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面 Σ 只有圆顶点, 且 $E_q \subset \partial\Sigma$, 则对任意 $L' > L$, 有 $h_{L'}(E_q) > h_L(E_q)$.

证明 若不然, 则有 $h_{L'}(E_q) = h_L(E_q)$, 故 Σ 也是 $\mathbf{F}_0(E_q, L')$ 中的极值曲面. 由定理 2.1, 得 $k(\partial\Sigma) = (q-2)/H(\Sigma, E_q) > 0$. 不妨设 $\partial\Sigma$ 是 m 重的严格凸圆周 C, 包围出圆盘 D, 则有 $A(S\backslash D) > A(D)$. 由重数关系可知, 设 Σ 取 $S\backslash\overline{D}$ 刚好 t 次, 则 Σ 取 D 刚好 $m+t$ 次, 于是,

$$A(\Sigma) = tA(S\backslash D) + (m+t)A(D).$$

显然存在 $\varphi \in \mathrm{Homeo}(S, S)$, 使得 $(\varphi, \partial D) \sim -\partial D$, $\varphi(E_q) = E_q$, 且 $\varphi(D) = S\backslash\overline{D}$. 令 $\Sigma' = (\varphi \circ f, \overline{U})$, 则 Σ' 取 D 恰 t 次, 而取 $S\backslash\overline{D}$ 恰 $m+t$ 次. 因为 $L(\partial\Sigma') = mL(\partial D) = L(\partial\Sigma)$, 所以, $\Sigma' \in \mathbf{F}_0(E_q, L)$. 但另一方面, 我们又有

$$A(\Sigma') = (m+t)A(S\backslash D) + tA(D) > mA(S\backslash D) + (m+t)A(D) = A(\Sigma).$$

这与 Σ 的极值性相矛盾, 所以必然有 $h_{L'}(E_q) > h_L(E_q)$. □

综合以上引理及之前的讨论, 命题 2.2 的证明已经完成. 由于各种情形之间, 证明方法的差别确实很大, 值得思考命题 2.2 是否存在统一的直接证明.

3 主要定理的证明

本节证明本文的四个主要定理.

3.1 $\mathbf{F}_0(E_q)$ 中无极值曲面

现在 $\mathbf{F}_0(E_q)$ 中没有极值曲面这个事实, 已经是命题 2.2 的一个简单推论.

定理 1.4 的证明 若不然, 则存在 $\Sigma \in \mathbf{F}_0(E_q)$ 满足 $H(\Sigma, E_q) = h_0(E_q)$. 设 $L(\partial\Sigma) = L$, 由定义 1.2 有

$$h_L(E_q) \geqslant H(\Sigma, E_q) = h_0(E_q) \geqslant h_L(E_q).$$

所以, Σ 是 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面. 由命题 2.2, 可得 $h_L(E_q) < h_{2L}(E_q)$. 这与事实

$$h_{2L}(E_q) \leqslant h_0(E_q) = h_L(E_q)$$

相矛盾, 所以, 任意曲面 $\Sigma \in \mathbf{F}_0(E_q)$ 都满足 $H(\Sigma, E_q) < h_0(E_q)$. □

另一个简单的推论, 可以把命题 2.2 中的 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 转化为 $\mathbf{F}(L)$, 即下面的推论 3.1. 同理, 由于 $\mathbf{F}(L)$ 中似乎永远存在极值曲面, $H_L(E_q) < H_{2L}(E_q)$ 很可能无条件地成立.

推论 3.1 若 $\mathbf{F}(L)$ 中存在极值曲面, 或 $h_L(E_q) < h_{2L}(E_q)$, 则 $H_L(E_q) < H_{2L}(E_q)$.

证明 首先, 设 $\mathbf{F}(L)$ 中存在极值曲面 Σ. 用等价的极值曲面代替 Σ, 不妨设 $\Sigma = (f, \overline{\Delta})$. 如果 $\overline{n}(\Sigma, E_q) = 0$, 则有

$$H(\Sigma, E_q) = H_L(E_q) \geqslant h_L(E_q) \geqslant H(\Sigma, E_q),$$

于是, Σ 也是 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面. 由命题 2.2, 立得

$$H_L(E_q) = h_L(E_q) < h_{2L}(E_q) \leqslant H_{2L}(E_q).$$

如果 $\overline{n}(\Sigma, E_q) \geqslant 1$, 不妨用等价的曲面代替 Σ, 以满足 $f(0) \in E_q$. 于是有 $\Sigma' = (f(z^2), \overline{\Delta}) \in \mathbf{F}(2L)$, 因为 $L(\Sigma') = 2L(\partial\Sigma) \leqslant 2L$. 又显然 $A(\Sigma') = 2A(\Sigma)$, 以及 $\overline{n}(\Sigma', E_q) = 2\overline{n}(\Sigma, E_q) - 1$. 于是,

$$R(\Sigma', E_q) = 2R(\Sigma, E_q) + 4\pi,$$

因此有

$$H_{2L}(E_q) \geqslant H(\Sigma', E_q) > H(\Sigma, E_q) = H_L(E_q).$$

其次, 假设 $h_L(E_q) < h_{2L}(E_q)$. 若 $h_L(E_q) = H_L(E_q)$, 则显然有

$$H_L(E_q) = h_L(E_q) < h_{2L}(E_q) \leqslant H_{2L}(E_q).$$

如果 $h_L(E_q) < H_L(E_q)$, 则存在 $\Sigma = (f, \overline{\Delta}) \in \mathbf{F}(L)$, 满足

$$H(\Sigma, E_q) > \max\left\{H_L(E_q) - \frac{\pi}{L}, h_L(E_q)\right\}.$$

自然有 $\Sigma \notin \mathbf{F}_0(E_q, L)$, 即 $\overline{n}(\Sigma, E_q) \geqslant 1$. 如上, 可构造 $\Sigma' \in \mathbf{F}(2L)$ 满足 $L(\partial\Sigma') = 2L(\partial\Sigma)$, $R(\Sigma', E_q) = 2R(\Sigma, E_q) + 4\pi$. 因此, 我们得到

$$\begin{aligned} H_{2L}(E_q) \geqslant H(\Sigma', E_q) &= \frac{2R(\Sigma, E_q) + 4\pi}{2L(\partial\Sigma)} = H(\Sigma, E_q) + \frac{2\pi}{L(\partial\Sigma)} \\ &\geqslant H_L(E_q) - \frac{\pi}{L} + \frac{2\pi}{L} > H_L(E_q). \end{aligned}$$

证毕. □

现在可以证明定理 1.6, 即 $L(\partial\Sigma) > L/2$, 与极值曲面的分支值都落入 E_q.

定理 1.6 的证明 先证明, 若 Σ 为 $\mathbf{F}(L)$ 或 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面, 则 $L(\partial\Sigma) > L/2$. 假设 Σ 为 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 或 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 但 $L(\partial\Sigma) \leqslant L/2$. 显然, Σ 也为 $\mathbf{F}(L(\partial\Sigma))$ 中或 $\mathbf{F}_0(E_q, L(\partial\Sigma))$ 中的极值曲面. 由命题 2.2 和推论 3.1, 可得

$$H(\Sigma, E_q) = h_{L(\partial\Sigma)}(E_q) < h_{2L(\partial\Sigma)}(E_q) \leqslant h_L(E_q),$$

或者有

$$H(\Sigma, E_q) = H_{L(\partial\Sigma)}(E_q) < H_{2L(\partial\Sigma)}(E_q) \leqslant H_L(E_q).$$

总之, 这与 Σ 的极值性矛盾.

现在假设 Σ 为 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 但 $CV(\Sigma)\backslash E_q \neq \emptyset$. 由命题 2.1 可知, 存在有限个曲面 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m \in \mathbf{F}(L)$, 满足

$$L(\partial\Sigma) \geqslant L(\partial\Sigma_1) + \cdots + L(\partial\Sigma_m);$$

此外, 要么 $m = 1$, 且 $R(\Sigma_1, E_q) > R(\Sigma, E_q)$; 要么 $m \geqslant 2$, 且

$$R(\Sigma_1, E_q) + \cdots + R(\Sigma_m, E_q) \geqslant R(\Sigma, E_q).$$

当 $m = 1$ 时, 易得矛盾:

$$H_L(E_q) = H(\Sigma, E_q) < H(\Sigma_1, E_q) \leqslant H_L(E_q).$$

下面假设 $m \geqslant 2$, 此时不妨假设 $L(\partial\Sigma_1) \leqslant L/2$. 由定义 1.2, 对每个 $j = 1, \ldots, m$, 都有 $R(\Sigma_j, E_q) \leqslant H_L(E_q)L(\partial\Sigma_j)$. 于是, $R(\Sigma, E_q) = H_L(E_q)L(\partial\Sigma)$ 迫使

$$L(\partial\Sigma) = L(\partial\Sigma_1) + \cdots + L(\partial\Sigma_m),$$
$$R(\Sigma, E_q) = R(\Sigma_1, E_q) + \cdots + R(\Sigma_m, E_q),$$

而且对每个 $j = 1, \ldots, m$, 都有 $H(\Sigma_j, E_q) = H_L(E_q)$. 这样, 每个 Σ_j, 包括 Σ_1, 都是 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 这与本定理第一个结论相矛盾. 所以, $\Sigma = (f, \overline{U})$ 必然满足 $CV(\Sigma) \subset E_q$, 即 f 必在任意 $z \in \overline{U}\backslash f^{-1}(E_q)$ 附近都是局部单射.

当 Σ 是 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面时, 假设 $CV(\Sigma)\backslash E_q \neq \emptyset$, 则命题 2.1 给出的有限个曲面 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ 确实又都属于 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$. 因此, 可类似证出 $CV(\Sigma) \subset E_q$, 恕不赘述. □

3.2 定理 1.7 和 1.8 的证明

现在凭借定理 1.6 和引理 2.3 证明定理 1.7.

定理 1.7 的证明 设 $\mathbf{F}(L)$ 或 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中的极值曲面 $\Sigma = (f, \overline{U})$ 含有自然圆周 $C(a \to a)$, 但 $\partial\Sigma \neq C$, 同时 $D \cap E_q = \emptyset$. 由定理 1.5, 必有 $a \in E_q$. 记 $C\backslash\{a\} = C^\circ$, 则 $C^\circ \subset S\backslash E_q$. 令 D 为 C 所包围的开圆盘, β 为 ∂U 的真子弧, 满足 $C = (f, \beta)$ 和 $C^\circ = (f, \beta^\circ)$. 由定理 1.6 可知, $CV(\Sigma) \subset E_q \subset S\backslash C^\circ$, 因此, β° 不含 Σ 的任何分支点. 由引理 2.3, 因为 $D \cap E_q = \emptyset$, 即 $D \cap (CV(\Sigma) \cup E_q) = \emptyset$, 所以, $\beta = \partial U$, 即 $C = \partial\Sigma$, 与假设矛盾. 总而言之, 要么 $\partial\Sigma = C$, 要么 $D \cap E_q \neq \emptyset$.

我们证明断言 (2) 的前半句, 即若设 Σ 为 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 其边界 $\partial\Sigma$ 真包含有自然圆周 C, 则必有 $(q-2)A(D)/L(C) \geqslant H_L(E_q)$. 由引理 2.2 可知, Σ 和曲面 $(\mathrm{Id}, S\backslash D)$ 可沿 C 粘合, 得到新曲面 $\Sigma' \in \mathbf{F}(L)$. 一方面, $L(\partial\Sigma') = L(\partial\Sigma) - L(C)$, 而且 $A(\Sigma') = A(\Sigma) + 4\pi - A(D)$. 另一方面, 由 $\#(D \cap E_q) \geqslant 1$ 和 $a \in E_q$ 知, $\#(E_q \cap (S\backslash\overline{D})) \leqslant q-2$, 进而,

$$\overline{n}(\Sigma', E_q) \leqslant q - 2 + \overline{n}(\Sigma, E_q).$$

于是, 由 Σ 的极值性, 可得

$$\frac{R(\Sigma, E_q)}{L(\partial\Sigma)} = H_L(E_q) \geqslant \frac{R(\Sigma', E_q)}{L(\partial\Sigma')} \geqslant \frac{R(\Sigma, E_q) - (q-2)A(D)}{L(\partial\Sigma) - L(C)}.$$

化简有 $(q-2)A(D)/L(C) \geqslant H_L(E_q)$, 断言得证. 本方法对 $\mathbf{F}_0(E_q, L)$ 中极值曲面失效的原因是, 粘合后 $\Sigma' \in \mathbf{F}_0(E_q, L)$ 不再成立, 讨论无法继续.

现在用反证法证明本定理的 (1). 假设 $L(E_q)$ 不存在, 即对任意 $n \in \mathbb{N}$, 某个 $\mathbf{F}(L)$ 中, 存在含有自然圆周 C_n 的极值曲面 Σ_n, 满足 $L(\partial\Sigma_n) > n$. 令 θ_n 为 C_n 的角半径, D_n 为 C_n 所围的圆盘. 当 $L(\partial\Sigma_n) > n \geqslant 7$ 时, $\partial\Sigma_n = C_n$ 显然无法成立, 因此, $D_n \cap E_q \neq \emptyset$. 根据上面的断言, 有

$$(q-2)\tan\frac{\theta_n}{2} = \frac{(q-2)A(D_n)}{L(C_n)} \geqslant H_{L(\partial\Sigma_n)}(E_q).$$

Σ_n 自然也是 $\mathbf{F}(L(\partial\Sigma_n))$ 中的极值曲面, 且 $\lim_{n\to\infty} L(\partial\Sigma_n) = \infty$. 由文献 [11, 定理 1.10 和注释 4.1], 可得

$$\frac{q-2}{H_0(E_q)} = \lim_{n\to\infty} k(\partial\Sigma_n) = \lim_{n\to\infty} k(C_n) = \lim_{n\to\infty} \cot\theta_n.$$

于是,

$$\begin{aligned}\cot\left(\lim_{n\to\infty}\theta_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\cot\theta_n = \frac{q-2}{H_0(E_q)} = \frac{q-2}{\lim\limits_{n\to\infty} H_{L(\partial\Sigma_n)}(E_q)} \\ &\geqslant \frac{q-2}{\lim\limits_{n\to\infty}(q-2)\tan(\theta_n/2)} = \cot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{2}\right).\end{aligned}$$

这样只能 $0 = \lim_{n\to\infty}\theta_n$, 迫使

$$\frac{q-2}{H_0(E_q)} = \lim_{n\to\infty}\cot\theta_n = \cot 0^+ = +\infty.$$

这个矛盾说明了 $L(E_q)$ 的存在性.

现用反证法证明本定理 (2) 的后半句. 先设 $\partial\Sigma \neq C$, 但 E_q 含于某个闭的半球面. 由上面讨论知, $(q-2)A(D) \geqslant L(C)H_L(E_q)$. 令 C' 是不含特殊点的开的半球面中, 与 C 全等的一个凸圆周. 令 D' 为 C' 包围的圆盘, 则 $(\mathrm{Id}, \overline{D'}) \in \mathbf{F}(L)$ 成立. 因为

$$\frac{(q-2)A(D)}{L(C)} \geqslant H_L(E_q) \geqslant \frac{(q-2)A(D')}{L(C')} = \frac{(q-2)A(D)}{L(C)},$$

所以, $(\mathrm{Id}, \overline{D'})$ 是 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, 而且 C' 不含特殊点, 是自然圆周. 由定理 2.1 可知, 含有自然圆周的极值曲面只在 $L = L(C')$ 才可能出现, 这与

$$L(C') = L(C) < L(\partial\Sigma) \leqslant L$$

矛盾. 换言之, 若 $\mathbf{F}(L)$ 中含有自然圆周 C 的极值曲面 Σ 不满足 $\partial\Sigma = C$, 则 E_q 不能含于闭的半球面. 证毕. □

最后, 我们证明定理 1.8.

定理 1.8 的证明 设 $\Sigma_L = (f_L, \overline{U})$ 为 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面, $\partial\Sigma_L$ 恰是一个自然圆周, 且 D 是 $\partial\Sigma_L$ 所围的圆盘. 根据定理 1.5 和 1.6, $\partial\Sigma_L$ 是长度为 L 的严格凸圆周, $f_L|_{\partial U}$ 一定是 ∂U 到 $\partial\Sigma_L$ 的保向同胚, 且 $CV(\Sigma_L) \subset E_q$.

首先考虑 $\#(\overline{D} \cap E_q) \leqslant 1$ 且 $D \cap E_q = \emptyset$ 的情形. 此时 $\partial\Sigma_L$ 最多含有一个特殊点 a, 且 $\partial\Sigma_L \backslash \{a\} \subset S \backslash E_q \subset S \backslash CV(\Sigma_L)$, 于是, 除了端点 $f_L^{-1}(a)$ 外, 弧 $\partial U(f_L^{-1}(a) \to f_L^{-1}(a))$ 不含 Σ 的分支点. 同时, 有 $D \cap (E_q \cup CV(\Sigma_L)) = \emptyset$, 由引理 2.3 可知, $f_L \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \overline{D})$, 即 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$.

其次考虑 $\#(\overline{D} \cap E_q) \leqslant 1$ 且 $D \cap E_q \neq \emptyset$ 的情形. 此时不妨设 $D \cap E_q = \{a_1\}$, b 是 $\partial\Sigma_L$ 上距离 a_1 最近的点. 以 a_1 和 b 为对径点的严格凸圆周 C 与 $\partial\Sigma_L$ 内切于 b, 令 W 为 $\partial\Sigma_L + (-C)$ 所围的区域, 则 $W \cap (E_q \cup CV(\Sigma_L)) = \emptyset$. 于是, 由引理 2.3 可知, 存在 $\overline{U}$ 中的闭若当区域 $\overline{V}$, 使得 $f_L \in \mathrm{Homeo}(\overline{V} \backslash f_L^{-1}(b), \overline{W} \backslash \{b\})$. 从而, $\Sigma' = (f_L|_{\overline{U} \backslash V}, \overline{U} \backslash V) \in \mathbf{F}$ 满足 $\partial\Sigma' = C$, 且 $CV(\Sigma'_L) \subset CV(\Sigma_L) \subset E_q$. 令 D_C 为 C 所围的圆盘, 则 $D_C \cap (E_q \cup CV(\Sigma'_L)) = \emptyset$. 由于 $C \cap CV(\Sigma'_L) \subset \{a_1\}$, 因此, $C(a_1 \to a_1)$ 是 Σ' 的自然圆周. 由引理 2.3 可知,

$$f_L|_{\overline{U} \backslash V} \in \mathrm{Homeo}(\overline{U} \backslash V, \overline{D_C}).$$

显然, Σ_L 由两片内部不相交的简单曲面 $(f_L|_{\overline{U} \backslash V}, \overline{U} \backslash V)$ 与 $(f_L|_{\overline{V}}, \overline{V})$ 粘合而成, 可见 $f_L \in \mathrm{Homeo}(\overline{U}, \overline{D})$, 即 $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$.

现在假设 $\#(\overline{D} \cap E_q) \geqslant 2$. 一方面, 根据 Σ_L 的极值性, 有

$$H(\Sigma_L, E_q) = H_L(E_q) \geqslant H((\mathrm{Id}, \overline{D}), E_q).$$

另一方面, 由引理 2.2 可知, Σ_L 可与 $(\mathrm{Id}, S \backslash D)$ 沿 ∂D 粘合, 得到闭曲面 Σ_S. 显然有

$$A(\Sigma_S) = A(\Sigma_L) + 4\pi - A(D),$$

以及

$$\overline{n}(\Sigma_S, E_q) = \overline{n}(\Sigma_L, E_q) + q - \#(D \cap E_q).$$

由 Riemann-Hurwitz 公式 $B(\Sigma_S) = 2n(\Sigma_S, S) - 2$, 可得 $-8\pi \geqslant R(\Sigma_S, E_q)$ (参见文献 [12, 命题 2.2]). 于是,

$$\begin{aligned}
-8\pi \geqslant R(\Sigma_S, E_q) &= (q-2)A(\Sigma_S) - 4\pi\overline{n}(\Sigma_S, E_q) \\
&= (q-2)[A(\Sigma_L) + 4\pi - A(D)] - 4\pi[\overline{n}(\Sigma_L, E_q) + q - \#(D \cap E_q)] \\
&= (q-2)A(\Sigma_L) - 4\pi\overline{n}(\Sigma_L, E_q) - 8\pi - (q-2)A(D) + 4\pi\#(D \cap E_q) \\
&= R(\Sigma_L, E_q) - 8\pi - R((\mathrm{Id}, \overline{D}), E_q),
\end{aligned}$$

即 $R((\mathrm{Id}, \overline{D}), E_q) \geqslant R(\Sigma_L, E_q)$, 进而得 $H((\mathrm{Id}, \overline{D}), E_q) = H_L(E_q)$. 换言之, $(\mathrm{Id}, \overline{D})$ 也是 $\mathbf{F}(L)$ 中的极值曲面.

最后, 我们说明 $\#(\overline{D} \cap E_q) \geqslant 2$ 时, $\Sigma_L \sim (\mathrm{Id}, \overline{D})$ 不必成立. 先假设 $a_1 \in \partial D \cap E_q$, 而 $a_2 \in D \cap E_q$. 令 $\alpha(a_1 \to a_2)$ 为 D 中的一条简单弧, 不过其他特殊点. 从 Δ 到单连通区域 $D \backslash \alpha$ 的 Riemann 映射可

以延拓为 $\overline{\Delta}$ 到 $\overline{D}$ 的保向拓扑全纯映射 g_1, 从 Δ 到单连通区域 $S\backslash\alpha$ 的 Riemann 映射可以延拓为 $\overline{\Delta}$ 到 S 的保向拓扑全纯映射 g_2. 曲面 $(g_1,\overline{\Delta})$ 和 $(g_2,\overline{\Delta})$ 的边界分别有子弧 $\alpha+(-\alpha)$ 和 $(-\alpha)+\alpha$, 由引理 2.2 可知, 两个曲面可以粘合成新曲面 $\Sigma'\in\mathbf{F}$. 易见,

$$L(\partial\Sigma')=L(g_1,\partial\Delta)-2L(\alpha)=L(\partial D),\quad A(\Sigma')=A(D)+4\pi,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{n}(\Sigma',E_q)&=\overline{n}((g_1,\overline{\Delta}),E_q)+\overline{n}((g_1,\overline{\Delta}),E_q)+\#((\alpha+(-\alpha))^\circ\cap E_q)\\&=\#(D\cap E_q)-1+(q-2)+1\\&=\overline{n}((\mathrm{Id},\overline{D}),E_q)+(q-2).\end{aligned}$$

于是, $R(\Sigma',E_q)=R((\mathrm{Id},\overline{D}),E_q)$, 故 $H(\Sigma',E_q)=H_L(E_q)$. 换言之, Σ' 也是 $\mathbf{F}(L)$ 中以自然圆周 ∂D 为边界的极值曲面, 但 Σ' 不等价于 $(\mathrm{Id},\overline{D})$.

然后, 假设 $a_1,a_2\in D\cap E_q$. 在 D 中选取简单弧

$$\beta=\alpha_1(b_0\to a_1)+\alpha_2(a_1\to a_2)+\alpha_3(a_2\to b_3),$$

使得 $b_0,b_1\in\partial D$, 但 β 不穿过其他特殊点. β 将 D 切分为两个若当区域 V_1 和 V_2. 从 Δ 到单连通区域 $S\backslash\alpha_2$ 的 Riemann 映射可以延拓为 $\overline{\Delta}$ 到 S 的保向拓扑全纯映射 g_3. 由引理 2.2 可知, 曲面 $(\mathrm{Id},\overline{V_1})$ 和 $(g_3,\overline{\Delta})$ 可以沿 α_2 粘合成新曲面 $\Sigma_3\in\mathbf{F}$, 易见 β 为 $\partial\Sigma_3$ 的子弧. 再由引理 2.2 可知, 曲面 Σ_3 和 $(\mathrm{Id},\overline{V_2})$ 可以沿 β 粘合成新曲面 $\Sigma''\in\mathbf{F}$. 易见

$$\begin{aligned}L(\partial\Sigma'')&=L(\partial V_1)+L(g_3,\partial\Delta)-2L(\alpha_2)+L(\partial V_2)-2L(\beta)\\&=L(\partial V_1)+L(\partial V_2)-2L(\beta)=L(\partial D)\\&\leqslant L,\end{aligned}$$

以及 $A(\Sigma'')=A(D)+4\pi$. 此外, 我们有

$$\begin{aligned}\overline{n}(\Sigma'',E_q)&=\overline{n}(\Sigma_3,E_q)+\overline{n}((\mathrm{Id},\overline{V_2}),E_q)+\#(\beta^\circ\cap E_q)\\&=\overline{n}((\mathrm{Id},\overline{V_1}),E_q)+\overline{n}((g_3,\overline{\Delta}),E_q)+\overline{n}((\mathrm{Id},\overline{V_2}),E_q)+2\\&=\#(V_1\cap E_q)+\#(V_2\cap E_q)+q\\&=\#(D\cap E_q)+(q-2).\end{aligned}$$

于是, $R(\Sigma'',E_q)=R((\mathrm{Id},\overline{D}),E_q)$, 故 $H(\Sigma'',E_q)=H_L(E_q)$. 换言之, Σ'' 也是 $\mathbf{F}(L)$ 中以自然圆周 ∂D 为边界的极值曲面, 但 Σ'' 不等价于 $(\mathrm{Id},\overline{D})$. 类似的构造显然在 $\#(\overline{D}\cap E_q)\leqslant 1$ 时是行不通的. □

至此, 本文的主要结论都已得到证明.

致谢 在尊敬的杨乐院士 80 华诞之际, 本文第一作者衷心感谢杨先生的为师之恩, 感谢先生多年的教诲和鼓励.

参考文献

1 Nevanlinna R. Zur theorie der meromorphen funktionen. Acta Math, 1925, 46: 1–99
2 杨乐. 值分布论及其新研究. 北京: 科学出版社, 1982
3 Yang L. Value Distribution Theory. New York: Springer-Verlag, 1993

4 Hayman W K. Meromorphic Functions. Oxford: Clarendon Press, 1964
5 Ahlfors L. Zur theorie der überlagerungsflächen. Acta Math, 1935, 65: 157–194
6 Dufresnoy J. Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde. Ann Sci École Norm Sup (4), 1941, 58: 179–259
7 Drasin D. The impact of Lars Ahlfors's work in value-distribution theory. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1988, 13: 329–353
8 Eremenko A. Ahlfors' contribution to the theory of meromorphic functions. Israel Math Conf Proc, 2000, 14: 41–63
9 Sun D. Main theorem on covering surfaces. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 1994, 14: 213–225
10 Zhang G Y. The precise bound for the area-length ratio in Ahlfors' theory of covering surfaces. Invent Math, 2013, 191: 197–253
11 Sun Z H, Zhang G Y. The properties of extremal surfaces in Ahlfors' theory of covering surfaces. Houston J Math, 2019, 45: 469–495
12 Sun Z H, Zhang G Y. Branch values in Ahlfors' theory of covering surfaces. Sci China Math, 2019, in press
13 Zhang G Y. Curves, domains and Picard's theorem. Bull Lond Math Soc, 2002, 34: 205–211
14 Bernstein F. Über die isoperimetrische eigenschaft des kreises auf der kugeloberfläche und in der ebene. Math Ann, 1905, 60: 117–136

The impossibility of the equality in Ahlfors' second fundamental theorem

Guangyuan Zhang & Zonghan Sun

Abstract Ahlfors' second fundamental theorem claims, for any subset E_q of $\overline{\mathbb{C}}$, consisting of q ($q \geqslant 3$) distinct points, there is a minimal constant $H_0(E_q)$, such that all simply-connected covering surfaces $\Sigma = (f, \overline{U})$ satisfy

$$(q-2)A(\Sigma) - 4\pi\#(f^{-1}(E_q) \cap U) \leqslant H_0(E_q)L(\partial\Sigma),$$

where $A(\Sigma)$ is the area of Σ, $L(\partial\Sigma)$ is the perimeter of Σ, and $\#$ denotes the cardinality of a set. In fact, this inequality is strict. Also, there is a minimal constant $h_0(E_q)$, such that each simply-connected covering surface $\Sigma = (f, \overline{U})$ omitting E_q (i.e., $f(U) \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash E_q$), satisfies

$$(q-2)A(\Sigma) \leqslant h_0(E_q)L(\partial\Sigma).$$

In this paper, we will prove the strictness of this equality (Zhang (2013) has found this fact in a special case), and the proof of this result just leads to some other related conclusions, which solve two open problems in our earlier paper.

Keywords **covering surface, isoperimetric inequality, spherical geometry, Ahlfors' constant**

MSC(2010) **30D35, 30D45, 52D60**

doi: 10.1360/N012019-00040