

<http://bhxb.buaa.edu.cn> jbuaa@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0316

双参数退化型新研产品质保期设计与优化

高帅^{1,2}, 李艳宏³, 孙富强^{1,2,*}

(1. 北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院, 北京 100191; 2. 可靠性与环境工程技术国防科技重点实验室, 北京 100191;
3. 中国航发商用航空发动机有限责任公司, 上海 200241)

摘 要: 由于新研产品缺乏外场故障数据和历史保修索赔记录, 难以开展科学合理的质保成本预测及质保期优化。考虑到产品不同性能参数退化过程之间的相互影响, 提出了一种基于 Copula 理论的双参数退化型新研产品质保期设计与优化方法。根据实验室加速退化试验数据建立产品单参数性能退化模型, 采用 Copula 方法量化退化过程之间的相关性, 同时考虑产品在外场的动态运行环境, 给出其外场可靠性模型。采用维修改善因子模型量化维修过程中的不完美维修情形, 并基于蒙特卡罗仿真计算产品的预计失效数, 建立质保成本模型。在此基础上, 利用 Glickman-Berger 模型量化质保期对产品销售量的影响, 构建以制造商利润最大化为目标的质保期优化模型。以某型电子组件为例, 开展产品质保期设计优化与敏感性分析, 验证了模型的有效性和适用性。

关键词: 新研产品; 双参数退化; Copula 函数; 加速退化试验; 质保期; 敏感性分析

中图分类号: V57; TB114.3

文献标志码: A **文章编号:** 1001-5965(2025)06-2137-11

产品质保是由制造商/销售商为消费者购买的产品提供在其质保期内和正常的使用条件下能够实现预定功能的担保^[1]。在制定质保策略时, 制造商需要综合考虑产品的质保期与质保成本。质保成本指在给定质保期的情况下, 未来会产生的维修费用。通常, 质保成本 $A(W) = C_s \times E(M(W))$, 其中 C_s 为每次维修或更换的费用, $E(M(W))$ 为在质保期 W 内产品预计失效数的期望。因此, 开展质保成本的分析 and 优化的前提是获取产品在质保期内的预计失效数。新研产品在推出市场前, 一般是利用前一代产品的索赔数据, 对产品的外场可靠性进行评估, 以计算预计失效数^[2]。但对于缺乏继承性的新研产品, 由于没有现场故障数据和历史保修索赔记录, 设计质保策略和预测质保成本变得非常具有挑战性^[3]。

对此, 有研究人员利用新研产品在研发阶段开展的加速寿命试验 (accelerated life test, ALT) 或加

速退化试验 (accelerated degradation test, ADT) 数据, 来预测其外场可靠性与预计失效数。Tseng 等^[4] 采用层次模型对实验室寿命试验数据和现场索赔数据联合建模, 预测保修成本。Yang 等^[5] 讨论了三水平加速寿命试验方案优化问题, 目标是质保成本的渐近方差最小。Shang 等^[6] 基于退化数据拟合了逆高斯过程的退化模型, 计算质保成本, 并从制造商和消费者的角度确定最佳质保政策。Zhao 和 Xie^[7] 采用 ALT 实验室数据, 考虑外场环境协变量建立外场可靠性模型, 计算预计失效数, 并在此基础上建立质保成本模型。Li 等^[8] 基于维纳 (Wiener) 过程建立退化模型, 采用截断分布来模拟随机失效阈值, 设计了 3 种带有随机失效阈值的保修策略。

然而, 上述文献中所建立的质保成本模型, 只涉及一个退化性能指标。随着新研产品结构愈发复杂与工作条件的多样, 产品通常存在多个关键性能参数会随着时间显著退化, 同时由于共同的结构

收稿日期: 2023-06-05; 录用日期: 2023-10-18; 网络出版时间: 2023-11-01 12:14

网络出版地址: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20231101.1119.002

基金项目: 重点实验室稳定支持项目 (WDZC20220101)

* 通信作者. E-mail: sunfuqiang@buaa.edu.cn

引用格式: 高帅, 李艳宏, 孙富强. 双参数退化型新研产品质保期设计与优化 [J]. 北京航空航天大学学报, 2025, 51(6): 2137-2147.

GAO S, LI Y H, SUN F Q. Design and optimization of warranty period of new products with two-parameter degradation [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2025, 51(6): 2137-2147 (in Chinese).

材料属性和使用经历,产品多个性能参数的退化过程往往会相互影响^[9-10],存在一定的相关性。近年来,利用 Copula 函数进行多变量退化建模的研究得到了迅速发展^[11]。Chen 等^[12]用多种随机过程来描述机械密封性能退化过程,性能指标之间的相关性用不同类型的 Copula 函数来描述。Fang 等^[13]提出了一种双变量随机过程的模型框架,利用 Copula 函数分析加速退化数据。Chi 等^[14]使用 Copula 函数拟合惯性测量单元多变量相依退化的加速退化试验数据,评估产品的可靠性和剩余寿命。Jiang 等^[15]使用了 4 种 Copula 函数研究了飞机舱门锁机构两种退化过程间的相关性,提出了产品剩余寿命预测模型。

此外,质保成本与维修方案息息相关。维修方案会影响故障产品维修后的使用可靠性,使得在相同质保期内的产品预计失效数有较大差异,影响产品的质保成本^[16]。一般来说,修复方式可分为 3 种:完全修复、不完全修复和最小修复。目前质保的研究多是完美维修或最小修复。然而,由于维修成本或技术能力的限制,这 2 个假设表达的维修效果都是极端的情况。实际上,不完善修复的应用更为广泛和贴近实际^[17]。Chen 等^[18]讨论了不完善维护对降解系统的正面和负面影响。Zhao 等^[19]假设单次维修的保修成本与不完善维修的改进因子有关,通过最小化每个产品的预期保修成本,获得最优不完全维修策略。Wang 等^[20]基于虚拟年龄模型,假设不完善的修复是为了减少最后一次预防性维修间隔中的虚拟年龄,开展产品二维质保政策优化。

综上所述,在工程实际中,采用实验室加速退化试验数据对产品外场可靠性进行预测还存在以下问题:①由于共同的结构材料属性和使用经历,产品多个性能参数的退化过程往往会相互影响,存在一定的相关性;②用户使用习惯和场景的差异,导致产品的运行环境具有较大的随机性;③质保成本模型中的单次维修成本和预计失效数均会受到维修效果的影响,目前研究大都假设产品的维修效果是完美维修。但在实践中,维修效果一般处于“修复如新”与“修复如旧”之间的不完美维修状态。为此,本文针对双参数退化型新研产品质保期优化问题,提出了一种新的基于实验室加速退化数据的质保期优化模型。该模型采用 Copula 函数量化性能参数退化的相依关系,考虑产品实际动态运行环境,建立外场可靠性模型,并基于维修改善因子模型考虑产品的不完美维修情景,开发了一种新的预计失效数预测方法,全面系统地建立了新研产

品质保期优化模型,解决了双参数退化型新研产品缺少历史数据等带来的质保期设计难题。

本文的技术为:首先,利用新研产品在研发阶段的实验室加速退化试验数据,基于 Wiener 过程和 Copula 理论建立二元相关退化模型。然后,考虑外场动态运行环境的不确定性影响,基于环境应力正态分布假设给出产品的外场可靠性模型。进一步,采用维修改善因子表征不完美维修效果^[6],建立维修效果与性能失效阈值的定量关系,采用蒙特卡罗仿真方法计算产品的预计失效数。在此基础上,考虑质保期对产品制造方的影响,采用 Glickman-Berger 销售量模型表征销售量与质保期的函数关系^[21],建立制造商利润模型。最后,构造以制造商利润最大为目标的质保期优化模型,确定最优质保期,为产品质保政策的制定提供决策依据。

1 动态环境二元相依退化模型构建

对于 2 个性能参数发生退化的产品,将其退化轨迹记为 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$,对应的失效阈值记为 H_1 和 H_2 ,退化过程首次达到阈值的时间为 T_{H_1} 或 T_{H_2} ,当产品的任一性能参数超过其退化失效阈值时,产品即发生失效,退化失效过程如图 1 所示。

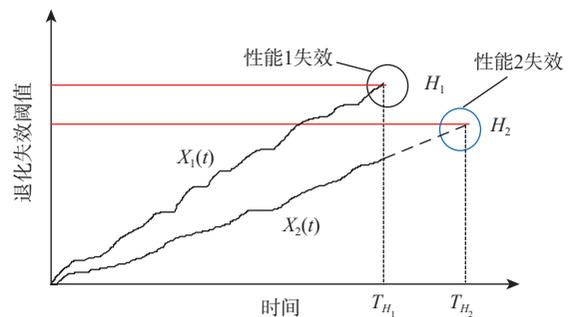


图 1 两性能参数退化过程失效机制

Fig. 1 Two performance parameter degradation process failure mechanism

1.1 单性能参数加速退化模型

目前在性能退化分析建模领域,随机过程模型应用最为广泛,其能够灵活地描述退化过程在时间维度的不确定性和产品所处工作环境的影响。本文采用常用的 Wiener 过程^[22]来表征单性能参数的退化轨迹,其表达式为

$$Xk(t) = Xk(0) + \mu_k(z)t + \sigma_k B(t) \quad (k = 1, 2) \quad (1)$$

式中, $X_k(t)$ 表示第 k 个性能参数在 t 时刻的退化量; $X_k(0)$ 为性能退化量的初始值; σ_k 为维纳过程的扩散系数; $B(\bullet)$ 为标准布朗运动; $\mu_k(z)$ 为维纳过程的漂移参数,表示产品的退化率,是关于应力 z 的加速模型,加速应力为电应力时一般用逆幂律模型建立

加速方程, 而加速应力为热应力时选用 Arrhenius 模型^[23]。

利用产品的实验室加速退化试验数据, 采用极大似然估计方法, 对加速退化模型式 (1) 中的未知参数进行估计, 分别得到产品 2 个性能参数的退化模型。根据布朗运动的独立增量特性, 非重叠区间 Δt 上的退化增量 ΔX_k 呈正态分布, 均值为 $\mu_k \Delta t$, 方差为 $\sigma_k^2 \Delta t$ 。其概率密度函数为

$$f(\Delta X_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2\Delta t}} \exp\left\{-\frac{[\Delta X_k - \mu_k \Delta t]^2}{2\sigma_k^2\Delta t}\right\} \quad (2)$$

假设采用 n 个产品进行 h 个应力水平的加速退化试验, 每个应力水平下有 n_l 个试样。试验过程中, 所有试样每隔 Δt 时间测量一次, 每个应力水平开展 M_l 次检测。则第 k 个性能参数在第 l 个应力水平下第 i 个试样的第 j 次测量的退化可以表达为 $X_k(t_{ij})$ 。根据式 (2), 第 k 个性能参数的对数似然函数为

$$\ln L_k = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^h \sum_{i=1}^{n_l} \sum_{j=1}^{M_l-1} \left\{ \ln(2\pi\sigma_k^2\Delta t) + \frac{[X_k(t_{i(j+1)}) - X_k(t_{ij}) - \mu_{kl}\Delta t]^2}{\sigma_k^2\Delta t} \right\} \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

随后, 采用遗传算法^[24] 求解式 (3) 中的待估参数, 开展极大似然估计, 分别得到产品 2 个性能参数的退化模型。

一般来说, 当产品性能参数超过其退化失效阈值后, 即认为产品发生了退化失效, 假设产品的退化失效阈值为 H_k , 则退化过程 $X_k(t)$ 首次穿越 H_k 的时间 T_{Hk} 对应了产品的寿命, 其失效密度函数和累积分布函数为

$$f_k(t) = \frac{H_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(\mu_k(z)t - H_k)^2}{2\sigma_k^2 t}\right) \quad k = 1, 2 \quad (4)$$

$$F_k(t) = P(T_{Hk} \leq t) = \Phi\left(\frac{\mu_k(z)t - H_k}{\sigma_k \sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2\mu_k(z)H_k}{\sigma_k^2}\right) \Phi\left(\frac{-\mu_k(z)t + H_k}{\sigma_k \sqrt{t}}\right) \quad k = 1, 2 \quad (5)$$

式中: $\Phi(\cdot)$ 代表正态分布的累积失效分布函数。

1.2 相依关系表征

在产品实际使用过程中, 不同性能参数的退化过程之间往往存在相关性。而 Copula 函数作为一种刻画变量间相关性的工具, 应用灵活且被广泛地用于各种复杂产品的寿命评估与预测, 并得到了很好的验证^[25], 因此, 本文采用 Copula 函数量化退化过程的相互依赖关系, 其表达式为

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(u_1, u_2) \quad (6)$$

式中: $u_k = F_k(x_k)$ 为边缘分布函数; H 为联合分布函数; C 为 Copula 函数。

常用的二元 Copula 概率密度函数如表 1 所示。其中, θ 为 Copula 函数的参数向量。

表 1 常见的二元 Copula 函数

Copula 函数	分布函数 $C(u_1, u_2, \theta)$
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 - \frac{(1 - e^{-\theta u_1})(1 - e^{-\theta u_2})}{1 - e^{-\theta}}\right)$
Gumbel	$\exp\left\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right\}$

由于不同的 Copula 函数对退化情况拟合效果不同, 因此采用赤池信息量准则 (Akaike information criterion, AIC) 来评价模型拟合效果的优劣。AIC 信息准则是确定最佳模型的常用准则, AIC 值越小说明所选择的模型越合适^[26], 定义为

$$A = 2K - 2\ln(L) \quad (7)$$

式中: A 赤池信息量准则; K 为参数个数; L 为似然函数。

根据 AIC 信息准则, 选择最佳的 Copula 函数, 根据 Copula 函数的性质, 可以计算得到产品在给定应力条件 z 下的失效概率密度函数为

$$f(t|z) = c(F_1(t), F_2(t)) f_1(t) f_2(t) \quad (8)$$

$$\text{式中, } c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v}。$$

1.3 外场可靠性模型

产品实际使用过程中, 其所处的工作环境会受到不同任务需求、使用条件等诸多因素的影响, 具有较大的随机性。为此, 本文假设产品外场所受环境应力 z_0 为服从均值为 μ_{z_0} , 方差为 $\sigma_{z_0}^2$ 的正态分布随机变量, 其概率密度函数记做 $f_{z_0}(z_0)$ 。基于全概率公式, 可得到动态环境下产品的失效概率密度函数为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t|z_0) f_{z_0}(z_0) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t|z_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{z_0}^2}} \exp\left(-\frac{(z_0 - \mu_{z_0})^2}{2\sigma_{z_0}^2}\right) dz \quad (9)$$

则二元相依退化型产品在动态运行环境下的可靠度为

$$R(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(t|z_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{z_0}^2}} \exp\left(-\frac{(z_0 - \mu_{z_0})^2}{2\sigma_{z_0}^2}\right) dz dt \quad (10)$$

2 不完美维修条件下的质保期优化

质保期的设计与优化对于增强消费者满意度、

提高制造商利润具有重要意义。一般而言,质保期与产品质保成本成正比,而与产品销量成反比^[21]。此外,在工程实践中的大部分维修效果都处于不完美维修状态^[17],即维修虽然可以改善设备的退化状态、延长设备的使用寿命,但难以使设备恢复至全新状态。

因此,本文在不完美维修条件下分别量化质保成本、产品销量与质保期的相关关系,建立制造商利润模型。以制造商利润最大为目标函数,约束制造商利润和相关参数的取值范围,进行质保期优化。

2.1 质保成本模型

质保成本可以用质保期内产品预计失效数的期望和单次维修成本的乘积表示:

$$A(W) = C_s E(M(W)) \tag{11}$$

式中: $A(W)$ 为单个产品的质保成本; C_s 为单次维修成本; $E(M(W))$ 为质保期内预计失效数的期望。

式(11)中单次维修成本和预计失效数均会受到维修效果的影响,因此,本节基于建立的两参数退化型产品可靠性模型,在不完美维修情形下,分别量化产品在给定质保期内的预计失效数和单次维修成本,建立产品质保成本模型。

2.1.1 不完美维修条件下的预计失效数

本文引入维修改善因子来量化产品的不完美维修效果^[19],具体为:考虑维修过程的不确定性,令第 m 次维修的维修改善因子 α_m 服从截断正态分布^[19],即 $\alpha_m \sim \psi(u, v^2, 0, 1)$,其概率密度函数为

$$f_{\alpha_m}(\alpha_m; u, v, 0, 1) = \frac{\phi\left(\frac{\alpha_m - u}{v}\right)}{v\left(\Phi\left(\frac{1-u}{v}\right) - \Phi\left(\frac{0-u}{v}\right)\right)} \tag{12}$$

式中: u 为维修改善因子的均值; v 为维修改善因子的标准差; $\phi(\cdot)$ 为正态分布的概率密度函数; α_m 取值范围为 $0 \sim 1$ 。

对于两参数退化型产品而言,其首次失效可能是第 1 个性能参数的退化量超过失效阈值造成的退化失效,也可能是第 2 个性能参数的退化量超过失效阈值。假设产品首次失效时,2 个性能退化量分别为 $X_{11}(T_1)$ 和 $X_{21}(T_1)$, T_1 为进行第 1 次不完美维修的时间,退化失效阈值记做 H_{11} 和 H_{21} ($H_{11}=H_1, H_{21}=H_2$)。

假设产品第 1 次故障是由于第 1 个性能参数超过退化失效阈值造成的,则针对产品故障部件进行第 1 次不完美维修后,以维修改善因子 α_1 表征对产品故障部件进行第 1 次维修后的不完美维修效果。将维修后产品的 2 个参数性能值记为 $X_{12}(T_1)$

和 $X_{22}(T_1)$,则维修前后的性能退化量有如下关系:

$$\begin{cases} X_{12}(T_1) = (1-\alpha_1)X_{11}(T_1) \\ X_{22}(T_1) = X_{21}(T_1) \end{cases} \tag{13}$$

式中: $0 < \alpha_1 \leq 1$ 。当 $\alpha_1=1$ 时,维修是完美的,产品退化量降低为 0。

对于性能参数服从线性退化轨迹的产品,可以假设维修前后性能退化量的变化为性能阈值的改变。令第 1 次不完美维修后产品性能初始值为 0,退化失效阈值分别为 H_{12} 和 H_{22} 的产品,其退化失效阈值满足:

$$\begin{cases} H_{12} = H_1 - X_{12}(T_1) = H_1 - (1-\alpha_1)X_{11}(T_1) \\ H_{22} = H_2 - X_{22}(T_1) = H_2 - X_{21}(T_1) \end{cases} \tag{14}$$

同样地,将产品故障部件开展第 $m(m \geq 1)$ 次维修的时刻记为 T_m ,第 $m(m \geq 1)$ 次维修的维修改善因子记做 α_m ,维修后产品的第 k 个性能参数的退化阈值记做 $H_{k,m+1}$,如图 2 所示,产品在第 m 次维修后退化失效阈值可表示为

$$H_{k,m+1} = H_k - X_{k,m+1}(T_m) = H_k - (1-\alpha_m)X_{k,m+1}(T_m) \quad i = 1, 2 \tag{15}$$

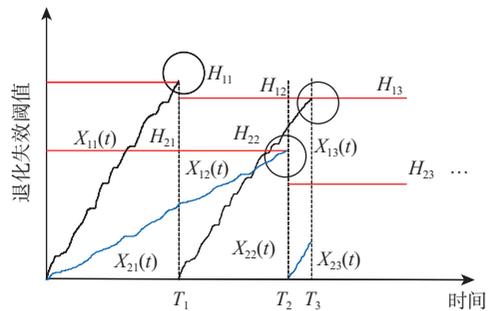


图 2 两性能退化型产品不完美维修策略

Fig. 2 Imperfect maintenance strategy for products with two performance parameter degradation

产品进行第 1 次维修前的可靠度函数可以利用式(10)表示。在此基础上,结合式(13)可以得到产品进行第 m 次维修,退化阈值变为 $H_{i,m+1}$ 后,在 $[T_m, T_{m+1})$ 之间的可靠度函数:

$$R_{m+1}^*(t^*) = P(X_{1,m+1}(t^*) < H_{1,m+1}, X_{2,m+1}(t^*) < H_{2,m+1}) \tag{16}$$

式中: $t^*=t-T_m$ 表示第 m 次维修后产品的工作时间。

产品在规定质保期 W 内进行 m 次不完美维修的概率可表示为:在质保期 W 时,产品共发生了 m 次失效,并在失效后进行了不完美维修,但并未发生第 $(m+1)$ 次失效的概率:

$$P(M(W) = m) = \int_0^W f_m(t) \cdot R_{m+1}^*(W-t) dt \tag{17}$$

式中: $M(W)$ 为质保期 W 内进行不完美维修的次数;

m 为不完美维修次数, $m=1,2,\dots$; $f_m(t)$ 为发生 m 次失效的概率密度函数。

因此, 可给出规定质保期 W 内的预计失效数期望:

$$E(M(W)) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P(M(W) = m) \quad (18)$$

由于第 m 次维修概率密度函数与第 $(m-1)$ 次不完美维修时间相关, 是一个递推关系, 积分形式为卷积, 导致式 (18) 形式过于复杂, 故采用蒙特卡罗仿真方法计算。仿真步骤流程图如图 3 所示。具体步骤如下:

步骤 1 输入 $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, H_1, H_2, \mu_{z0}, \sigma_{z0}$ 等退化相关参数, 以及质保期 W 和仿真次数 N_{mc} , 设置维修次数 m_i 、维修时刻 T_m 的初始值为 0, 其中 $i=1,2,\dots,N_{mc}$ 为蒙特卡罗仿真循环次数, $m=0,1,\dots$ 为第 i 次仿真中的维修次数。

步骤 2 根据式 (13) 采用舍选抽样法^[27] 生成 T_m 的数值, 令每次维修间的累积时间 $T_i = T_i + T_m$ 。

步骤 3 判断 T_i 是否超过质保期 W : 若否, 继续步骤 4; 若是, 记录维修次数 $m_i = m$, 转至步骤 5。

步骤 4 根据式 (12) 生成维修改善因子 α_m , 计

算在 T_i 时刻性能 1 和性能 2 的产品可靠度 R_1 和 R_2 。若 $R_1 > R_2$ 则维修产品性能 2: $X_{2,m+1} = (1-\alpha_m)X_{2,m}$ 、 $X_{1,m+1} = X_{1,m}$; 若 $R_1 < R_2$ 则则维修产品性能 1: $X_{1,m+1} = (1-\alpha_m)X_{1,m}$ 、 $X_{2,m+1} = X_{2,m}$; 若 $R_1 = R_2$ 则维修产品性能 1 和性能 2: $X_{1,m+1} = (1-\alpha_m)X_{1,m}$ 、 $X_{2,m+1} = (1-\alpha_m)X_{2,m}$; 令 $m=m+1$, 返回步骤 2。

步骤 5 判断循环次数 i 是否等于 N_{mc} : 若是, 根据 $\left(\sum_{i=1}^N m_i\right) / N$ 得到产品在质保期为 W 下的预计失效数算法结束; 若否, $i=i+1$, 返回步骤 2。

2.1.2 单次维修成本

在得到规定质保期内单个产品的外场预计失效数后, 还需要确定单次维修成本。单次维修成本由固定成本和变动成本构成。其中, 固定成本包括维修过程中检测、人工、备件等每次维修必须支出的费用。变动成本是指维修过程中使用不同的设备、材料造成的波动, 与维修效果相关。维修效果越好, 需要采用的设备就要越精密, 使用的材料就越昂贵, 产生的维修费用就越高, 因此, 可构建变动成本和维修改善因子的函数关系。

根据假设, 维修改善因子 $\alpha_m \sim \psi(u, v^2, 0, 1)$, 是

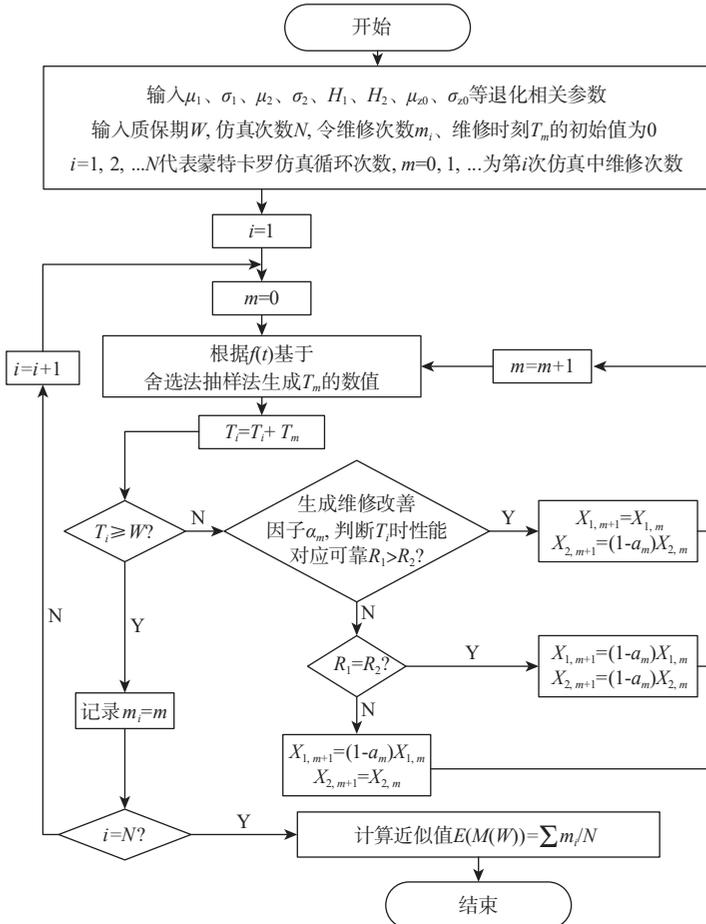


图 3 两性能退化型产品的预计失效数仿真算法流程图

Fig. 3 Flow chart of simulation algorithm for predicted number of failures of products with two performance parameter degradation

一个关于 u 和 v 的随机变量, u 表示维修改善效果均值, u 越大, 表示维修效果越好, 维修变动成本越高; v 表示维修改善效果标准差, v 越大, 表示维修效果波动性越大, 会造成维修变动成本变低。综上所述, u 和 v 都会影响变动成本。一般而言, 对于较长质保周期内, 经历多次维修的产品, 其质保期内每次维修对维修成本的累积影响, 可以使用维修改善因子的期望来表达。为更好地阐述模型方法, 采用维修改善因子的期望来近似计算每次维修的变动成本^[19], 即维修改善因子的期望和平均变动成本的乘积。由于维修改善因子服从截断正态分布, 其期望为

$$E(\alpha_m; u, v) = u - v \frac{\phi((1-u)/v) - \phi(-u/v)}{\Phi((1-u)/v) - \Phi(-u/v)} \quad (19)$$

因此, 可以得到单次维修成本的表达式为

$$C_S = C_F + C_V = C_F + C_A E(\alpha_m; u, v) = C_F + C_A \left[u - v \frac{\phi((1-u)/v) - \phi(-u/v)}{\Phi((1-u)/v) - \Phi(-u/v)} \right] \quad (20)$$

式中: C_S 为单次维修成本; C_F 为固定成本; C_V 为变动成本; C_A 为平均变动成本。

2.2 制造商利润模型

在实践中, 当客户无法准确判断产品质量信息时, 制造商往往会通过延长质保服务, 向消费者传递产品高质量的信号, 以吸引更多客户, 达到对产品的促销作用^[28]。基于此, 本文考虑质保期对产品的促销作用, 采用在经济管理领域获得广泛认可的 Glickman-Berger 模型^[21], 建立销售量和质保期的函数关系:

$$q = k_1 p^{-\gamma} (W + k_2)^\eta \quad (21)$$

式中: q 为销售量; $k_1 > 0$ 为幅度因子常数; $k_2 \geq 0$ 为时间替代常数, 即时间为 0 时的需求量; $\gamma > 1$ 为价格弹性指数; $0 < \eta < 1$ 为质保期弹性指数; p 为产品单价; W 为规定质保期。

制造商利润模型可表示为销量和单个产品的利润的乘积, 其中单个产品的利润可以用产品单价与制造、销售等成本、质保成本之差表示, 具体表述为

$$p_r = p - C_M - A(W) \quad (22)$$

式中: p_r 为单件产品的利润; C_M 为单个产品的制造、销售等其他成本。

则质保期 W 内的制造商利润可以由产品销量和单个产品利润的乘积表示:

$$P_r(W) = qp_r = k_1 p^{-\gamma} (W + k_2)^\eta \cdot (p - C_M - A(W)) = k_1 p^{-\gamma} (W + k_2)^\eta \cdot (p - C_M - C_S E(M(W))) \quad (23)$$

式中: k_1 、 k_2 、 γ 、 η 、 p 、 C_M 、 C_S 均为固定参数, C_S 为与维修相关的参数, k_1 、 k_2 、 γ 、 η 、 p 、 C_M 为与产品相关的参数, 预计失效数期望 $E(M(W))$ 和质保期 W 相关。

2.3 质保期优化问题

利润最大化是制造商生产、销售产品的根本目的。因此, 本文以制造商利润最大为目标函数, 对质保期进行优化。通过式 (23) 可知, 制造商利润模型 $P_r(W)$ 可以看做以质保期 W 为自变量的函数, 为开口向下的类抛物线模型, 存在最优的质保期 W^* 使得制造商利润达到最大值。

优化模型的约束条件从制造商利润约束、质保期约束和维修改善因子约束 3 方面确定。

2.3.1 制造商利润约束

制造商利润是产品销量和单件产品利润的乘积, 代表制造商的根本利益, 在制定新研产品的质保策略中, 制造商一般会根据新研产品的研发等成本确定最低利润, 以保证自身权益, 因此可以表示为

$$P_r(W) \geq P_M \quad (24)$$

式中: $P_r(W)$ 为在规定质保期 W 时的制造商利润; P_M 为制造商制定的最低利润。

2.3.2 质保期约束

质保期是制造商提供给消费者的一种质量保证承诺, 不仅受到产品本身可靠性和质量的影响, 也受到市场上同类产品质保策略的影响。在市场上竞争中, 制造商希望在花费较低成本的基础上为消费者提供质保, 与此同时必须保证产品不会带来安全隐患。因此, 需要给质保期设定一个合适的取值区间, 可以表示为

$$W \in [W_{\min}, W_{\max}] \quad (25)$$

式中: W_{\min} 为消费者可接受或者法律规定的最低质保期; W_{\max} 为制造商可接受的最高质保期。

2.3.3 维修改善因子约束

维修改善因子 α 为一个服从 u 为均值, v 为标准差的截断正态的变量, 表征维修效果的好坏。在质保期内, 产品发生故障后, 一般是制造商或委托第三方进行维修, 为保证后续产品的使用可靠性, 保证维修后的产品下次故障时间控制在消费者可接受的范围内, 需要对 u 和 v 这 2 个参数给出一定的约束。维修改善因子是由 u 和 v 共同控制的, 基本取值范围为 $[\max(u-v, 0), \min\{u+v, 1\}]$ ^[6], 因此, 对维修改善因子相关参数的约束可表示为

$$\begin{cases} u \in [0.5, 1) \\ v \in [0, 0.3] \end{cases} \quad (26)$$

综上所述, 得到以“制造商利润最大”为目标的质保期优化设计模型:

$$\begin{cases} \max & P_r(W) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} P_r(W) \geq P_M \\ W \in [W_{\min}, W_{\max}] \\ u \in [0.5, 1) \\ v \in [0, 0.3] \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

式中, 需要优化的变量为质保期 W 。

3 案例分析

针对本文提出的双参数退化型新研产品质保成本优化方法, 采用文献 [29] 中微波电子组件的开展质保期优化分析。微波组件用于发射/接收信号, 故障机理分析和历史资料表明, 温度是影响其性能退化的主要变量。文献 [29] 对某型微波组件开展了高温恒定应力加速退化试验, 并对功率和噪声这 2 个关键性能参数进行了测量。试验中, 正常工作条件为 25 °C, 加速应力水平为 $S_1=70$ °C、 $S_2=80$ °C 和 $S_3=85$ °C。每小时测量一次微波组件的功率和噪声, 在加速应力水平 S_1 、 S_2 和 S_3 下的监测时间分别为 174 h、155 h 和 114 h。功率和噪声的加速退化试验数据如图 4 和图 5 所示。根据文献的分析结果, 2 个性能参数的退化具有明显的相关性, 而本文所提出的 ADT 建模方法可以通过 Copula 函数处理不同的相依情况。此外, 假设该微波组件与其终端产品为单渠道供应链, 即案例对象的订货量与制造商的生产量相同, 且该微波组件的质保期作为终端产品质保期中整体保修的一部分, 可基于 Glickman-Berger 模型量化其对终端产品销量的影响。

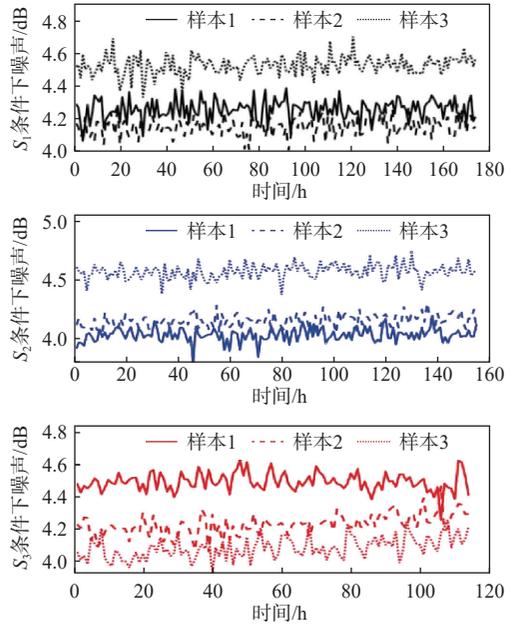


图 5 性能参数噪声的 ADT 数据
Fig. 5 ADT data of performance parameter noise

3.1 质保期优化

根据文献 [29] 中对 ADT 数据特征的分析, 可知该数据具有线性的波动退化特征, 可采用 Wiener 过程对产品单个性能参数的退化进行建模。此外, 由于产品的 ADT 以温度作为敏感应力, 故选择 Arrhenius 模型作为加速模型, 根据式 (1) 可以得到产品 2 个性能参数的退化轨迹为

$$X_k(t) = X_k(0) + \exp\left(a_k + \frac{b_k}{T_{\text{emp}}}\right)t + \sigma_k B(t) \quad k = 1, 2 \quad (28)$$

式中: a_k 和 b_k 为 Arrhenius 模型中待定参数; T_{emp} 为 ADT 温度应力。

根据图 4 和图 5 所示的退化数据, 采用式 (3) 开展极大似然估计得到退化模型的参数, 如表 2 所示。随后, 采用 Matlab2022 中的 Copula 工具箱来估计 Copula 参数 θ , 并基于式 (7) 开展 AIC 判断, 选用合适的 Copula 函数表示 2 个参数退化过程的相关性, 结果如表 3 所示, 其中 Frank Copula 函数量化性能参数退化相依性效果最好。最后, 考虑产品功率和噪声的相对失效阈值分别为 $H_1=12$ 和 $H_2=9$, 外场环境应力服从正态分布 $z_0 \sim N(25, 2)$, 根据式 (9) 和式 (10) 得到产品失效概率密度函数和可靠度函数, 如图 6 和图 7 所示。

表 2 退化模型参数表

Table 2 Parameters of degradation model

退化参数	a_k	b_k	σ_k
功率	6.873 9	-4 639.611 9	0.087 6
噪声	18.229 8	-9 230.483 6	0.082 4

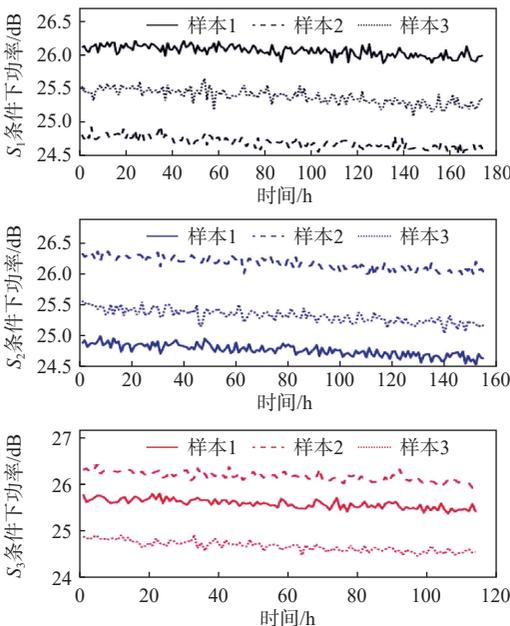


图 4 性能参数功率的 ADT 数据

Fig. 4 ADT data of performance parameter power

表3 Copula 函数选取

Table 3 Copula function selection

Copula参数	θ	AIC	排序
Gumbel Copula	8.370 1	-36 317	2
Clayton Copula	10.721 2	-23 038	3
Frank Copula	35.701 4	-39 081	1

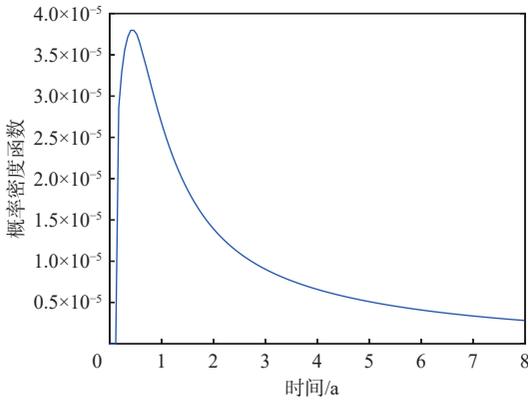


图6 两参数退化型产品失效概率密度函数

Fig. 6 Failure probability density function of products with two-parameter degradation

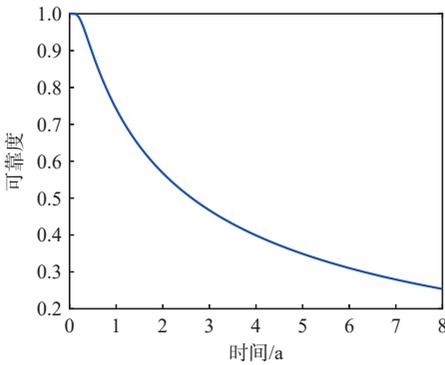


图7 第1次维修前两参数退化型产品可靠度函数

Fig. 7 Reliability function of products with two-parameter degradation before first maintenance

不完美维修条件下,当 $u=0.8, v=0.2$ 时,通过如图4所示的仿真算法得到预计失效数。假设模型各参数值如表4所示,根据式(23)可以得到制造商利润函数,如图8所示。根据制造商利润函数,可以得到产品最优质保期为5.63年,此时制造商利润最大。

此外,为了对比不同情形下产品最优质保期的变化,分别与单独考虑功率退化、单独考虑噪声退化以及两性能独立退化的情况对比,如图8所示。两性能独立退化时产品的可靠度为

$$R_{\text{indep}}(t) = R_1(t) \times R_2(t) = P(X_1(t) < H_1) \times P(X_2(t) < H_2) \quad (29)$$

从图8可以看出,考虑两性能参数相依退化的最优质保期在单独考虑功率退化与单独考虑噪声

表4 制造商利润模型相关参数表

Table 4 Parameters of manufacturer's profit model

参数	数值	来源	参数	值	来源
p	6	假设	k_1	1.2	假设
C_M	2	假设	k_2	2	假设
C_F	0.28	假设	γ	1.2	假设
C_A	0.35	假设	η	0.8	假设

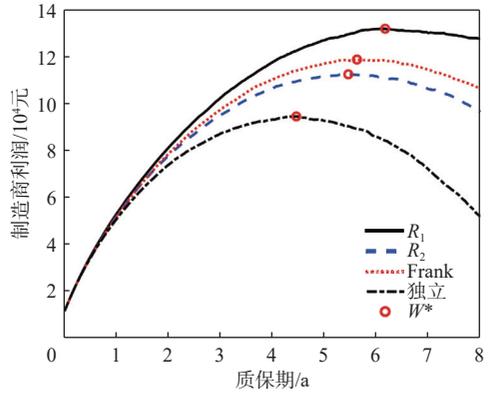


图8 不同情况下的质保期优化

Fig. 8 Warranty period optimization under different conditions

退化计算出的最优质保期之间。同时,考虑两性能退化相依性的最优质保期明显超出考虑两性能独立退化情形下的最优质保期。由此可见,对于两参数相依退化的产品,量化其性能参数间相关性是十分必要的,这对最优质保期的选择影响十分显著。

3.2 敏感性分析

为了分析质保期相关参数对制造商利润的影响,本文对退化失效阈值 H_1 和 H_2 、维修改善因子均值 u 进行敏感性分析,结果如图9~图12所示。

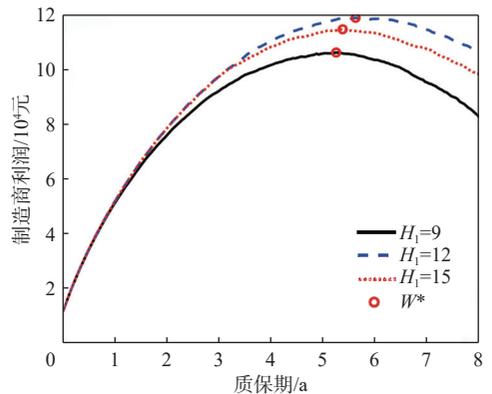


图9 参数 H_1 的敏感性分析

Fig. 9 Sensitivity analysis of parameter H_1

3.2.1 退化失效阈值 H_1 和 H_2 的敏感性分析

由于产品有2个性能参数对应的退化阈值为 H_1 和 H_2 ,为了分析每个退化失效阈值对产品质保期的影响,分别在 H_1 变化 H_2 固定、 H_1 固定 H_2 变化和 H_1 、 H_2 同时变化3种情况下,分别进行敏感性

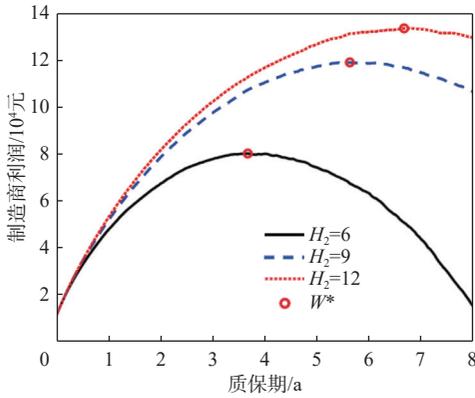


图 10 参数 H_2 的敏感性分析

Fig. 10 Sensitivity analysis of parameter H_2

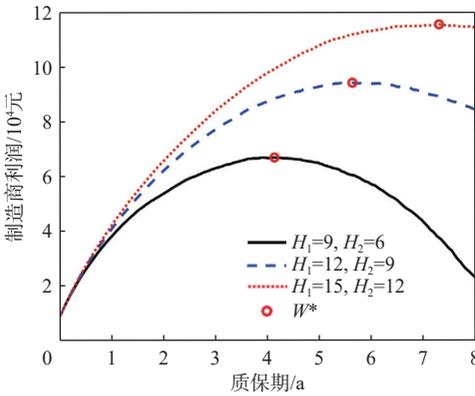


图 11 参数 H_1 与 H_2 的敏感性分析

Fig. 11 Sensitivity analysis of parameters H_1 and H_2

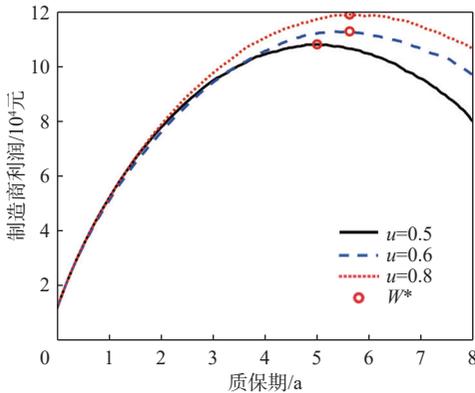


图 12 参数 u 的敏感性分析

Fig. 12 Sensitivity analysis of parameter u

分析。

从图 9~图 11 可以看出,性能退化失效阈值对最优质保期的选择有显著的影响,且退化失效阈值 H_2 对最优质保期的影响显著高于退化失效阈值 H_1 对最优质保期的影响。随着 H_2 的增长(H_2 从 6 增长到 12),最优质保期从 3.67 年增加到 6.67 年。对于该产品而言,应当重点关注第 2 个性能参数 N 的退化过程,提高该性能失效阈值 H_2 对于提升产品的最优质保期有着显著的作用。

3.2.2 维修改善因子均值 u 的敏感性分析

从图 12 可以看出,维修改善因子均值 u 对最优质保期选择的影响并非十分显著,随着 u 的增长(u 从 0.5 增长到 0.8),最优质保期并不是一直变大,从 4.96 年到 5.63 年后仍旧是 5.63 年。从实际维修的角度, u 越大代表着维修效果越好,降低下次产品故障的概率,但同时单次维修的成本也会有所上升。因此,维修改进因子均值 u 的最优取值要结合产品本身的可靠性与制造商利润模型进行综合量化。

4 结 论

本文针对两参数退化型新研产品,提出了一种基于 Copula 理论与不完美维修因子的产品质保期优化模型,得到了考虑产品相依退化、动态外场环境及不完美维修情景下的产品最优质保期并开展敏感性分析。该方法的提出为缺乏外场故障数据和历史保修索赔记录的两参数退化型新研产品质保期优化提供了科学的分析方法,也可以为其他性能退化过程相互依赖的产品制定质保策略提供依据和参考准则。未来可以从以下 3 个方面进一步研究:

1)考虑外场随机冲击和多退化过程相依性 2 种情形,建立新研产品的质保成本模型,更能贴近产品在制定质保策略时的实际情况。

2)本文仅考虑了维修效果对于维修成本的影响,即为达到制造商预期的维修效果,所需付出的维修成本,以保证产品后续使用的可靠性要求。后续可以从维修成本对维修效果的影响角度进行深入的研究分析。

3)由于本文的案例对象来自于实际的产品,在研究过程中未设计对比试验,后续可以针对该问题继续开展研究。

参考文献 (References)

[1] SHANG L J, LIU B L, QIU Q G, et al. Three-dimensional warranty and post-warranty maintenance of products with monitored mission cycles[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 239: 109506.

[2] ZHAO X J, GAUDOIN O, DOYEN L, et al. Optimal inspection and replacement policy based on experimental degradation data with covariates[J]. IISE Transactions, 2019, 51(3): 322-336.

[3] KLEYNER A, ELMORE D. Warranty data maturity: effect of observation time on reliability prediction and the warranty management process[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2022, 38(5): 2388-2404.

[4] TSENG S T, HSU N J, LIN Y C. Joint modeling of laboratory and field data with application to warranty prediction for highly reliable

- products[J]. *IIE Transactions*, 2016, 48(8): 710-719.
- [5] YANG D, HE Z, HE S G. Warranty claims forecasting based on a general imperfect repair model considering usage rate[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 145: 147-154.
- [6] SHANG L J, SI S B, SUN S D, et al. Optimal warranty design and post-warranty maintenance for products subject to stochastic degradation[J]. *IIE Transactions*, 2018, 50(10): 913-927.
- [7] ZHAO X J, XIE M. Using accelerated life tests data to predict warranty cost under imperfect repair[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2017, 107: 223-234.
- [8] LI T, HE S G, ZHAO X J. Optimal warranty policy design for deteriorating products with random failure threshold[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2022, 218: 108142.
- [9] SUN F Q, FU F Y, LIAO H T, et al. Analysis of multivariate dependent accelerated degradation data using a random-effect general Wiener process and D-vine Copula[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 204: 107168.
- [10] SHI Y, XIANG Y S, LIAO Y, et al. Optimal burn-in policies for multiple dependent degradation processes[J]. *IIE Transactions*, 2021, 53(11): 1281-1293.
- [11] WANG F, LI H. On the use of the maximum entropy method for reliability evaluation involving stochastic process modeling[J]. *Structural Safety*, 2021, 88: 102028.
- [12] CHEN R T, ZHANG C, WANG S P, et al. Bivariate-dependent reliability estimation model based on inverse Gaussian processes and copulas fusing multisource information[J]. *Aerospace*, 2022, 9(7): 392.
- [13] FANG G Q, PAN R, HONG Y L. Copula-based reliability analysis of degrading systems with dependent failures[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 193: 106618.
- [14] CHI B J, WANG Y S, HU J W, et al. Reliability assessment for micro inertial measurement unit based on accelerated degradation data and copula theory[J]. *Eksplotacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, 2022, 24(3): 554-563.
- [15] JIANG D Y, CHEN T Y, XIE J Z, et al. A mechanical system reliability degradation analysis and remaining life estimation method: with the example of an aircraft hatch lock mechanism[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 230: 108922.
- [16] FAN P P, YUAN Y P, GAO J X, et al. Reliability modelling and evaluating of wind turbine considering imperfect repair[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13(1): 5323.
- [17] ZHAO X J, LIU B, XU J Y, et al. Imperfect maintenance policies for warranted products under stochastic performance degradation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2023, 308(1): 150-165.
- [18] CHEN Y X, GONG W J, XU D, et al. Imperfect maintenance policy considering positive and negative effects for deteriorating systems with variation of operating conditions[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2018, 15(2): 872-878.
- [19] ZHAO X J, HE S G, XIE M. Utilizing experimental degradation data for warranty cost optimization under imperfect repair[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, 177: 108-119.
- [20] WANG R C, CHENG Z H, RONG L Q, et al. Availability optimization of two-dimensional warranty products under imperfect preventive maintenance[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 8099-8109.
- [21] ARORA R, TANDON A, AGGARWAL A G, et al. Genetic algorithm-based price and warranty optimization in software systems[J]. *Expert Systems*, 2024, 41(7): e13334.
- [22] LIU K, ZOU T J, XIN M C, et al. RUL prediction based on two-phase Wiener process[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2022, 38(7): 3829-3843.
- [23] KUCINSKIS G, BOZORGCHENANI M, FEINAUER M, et al. Arrhenius plots for Li-ion battery ageing as a function of temperature, C-rate, and ageing state—an experimental study[J]. *Journal of Power Sources*, 2022, 549: 232129.
- [24] YI X J, WANG Z Z, LIU S L, et al. An accelerated degradation durability evaluation model for the turbine impeller of a turbine based on a genetic algorithms back-propagation neural network[J]. *Applied Sciences*, 2022, 12(18): 9302.
- [25] ZHENG Y D, ZHANG Y. Reliability analysis for system with dependent components based on survival signature and copula theory[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2023, 238: 109402.
- [26] KUIPER R M. How to evaluate theory-based hypotheses in meta-analysis using an AIC-type criterion[J]. *Entropy*, 2022, 24(11): 1525.
- [27] 王丙参, 魏艳华, 孙永辉. 利用舍选抽样法生成随机数[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2013, 30(6): 86-91.
WANG B C, WEI Y H, SUN Y H. Generate random number by using acceptance rejection method[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2013, 30(6): 86-91 (in Chinese).
- [28] ZHANG Z C, XU H Y, ZHAO Y X, et al. Extended warranty service provision: a strategic analysis for the E-commerce platform supply chain[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2023, 177: 103250.
- [29] SUN F Q, WANG N, LI X Y, et al. A time-varying copula-based prognostics method for bivariate accelerated degradation testing[J]. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2018, 34(6): 3707-3718.

Design and optimization of warranty period of new products with two-parameter degradation

GAO Shuai^{1, 2}, LI Yanhong³, SUN Fuqiang^{1, 2, *}

(1. School of Reliability and Systems Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. Science & Technology on Reliability and Environmental Engineering Laboratory, Beijing 100191, China;

3. AECC Commercial Aircraft Engine Co., Ltd, Shanghai 200241, China)

Abstract: Due to the lack of outfield failure data and historical warranty claim records of new products, it is difficult to carry out scientific and reasonable warranty cost prediction and warranty period optimization. Considering the interaction between the degradation processes of different product performance parameters, this paper proposed a method for the design and optimization of the warranty period of new products with two-parameter degradation based on Copula theory. Firstly, a single parameter performance degradation model was established according to the laboratory accelerated degradation test data. Copula theory was used to quantify the correlation between degradation processes. In addition, the outfield reliability model was given by quantifying the dynamic operating environment of the outfield. Secondly, the maintenance improvement factor model was used to quantify the imperfect maintenance situation in the process of maintenance, and the Monte Carlo simulation was employed to calculate the predicted number of product failures. Moreover, the warranty cost model was established. Then, the Glickman-Berger model was used to quantify the impact of the warranty period on product sales, and an optimization model of the warranty period was constructed to maximize the manufacturer's profit. Finally, by taking a certain type of electronic component as an example, the design and optimization of the warranty period of products and sensitivity analysis were carried out to verify the validity and applicability of the model.

Keywords: new product; two-parameter degradation; Copula function; accelerated degradation test; warranty period; sensitivity analysis