球形汇聚-反射激波作用下湍动能方程的模化

陈博轩¹, 李启兵¹, 李欣竹², 黄世璋², 王维荣², 符松^{1*}

1. 清华大学航天航空学院, 北京 100084;

2. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 冲击波物理与爆轰物理重点实验室, 绵阳 621900

*联系人, E-mail: fs-dem@mail.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2020-03-15; 接受日期: 2020-06-05; 网络出版日期: 2020-09-07

科学挑战专题(编号: TZ2016001)和国家重大项目(编号: GJXM92579)资助

摘要 球形激波与湍流间的相互作用在惯性约束聚变(ICF)、超新星爆发、冲击波碎石等许多工程问题中有重要意义. 本文通过直接数值模拟, 研究了球形激波的汇聚与反射诱导的湍流及其相互作用问题, 分析了这一流动的特点和湍流的产生机制. 重点讨论了该流动的湍动能系综平均方程中各项的作用和起主导作用的物理机制, 发现传统的剪切湍流的产生机制和黏性项量级普遍偏小, 激波才是诱发湍流的主要因素, 因而在湍动能方程中起主导作用. 由于激波的主导作用, 压力脉动对湍动能方程有重要影响, 与压力脉动有关的各个项在湍动能方程中均起重要作用. 一些在一般湍流中可以忽略的项, 例如质量流量项、压力体胀项等, 在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用问题中起重要作用. 本文还探讨了涡黏性模式的有效性, 发现满足可实现性原理的涡黏性模式可以较好地模拟雷诺应力. 同时, 本文揭示了现有湍动能方程封闭模式在本问题的应用中存在很大误差, 并尝试对这些项提出新的封闭模式.

关键词 球形汇聚-反射激波, 湍动能方程, 压力体胀, 质量通量模式

PACS: 47.40.Nm, 47.27.Gs, 47.27.Eq

1 引言

激波与湍流之间的相互作用广泛存在于各种工程问题中, 是一类重要的流动现象. 其中球形激波与湍流间的相互作用在惯性约束聚变(Inertial Confinement Fusion, ICF)、超新星爆发、冲击波碎石等许多工程问题中有重要意义. 在理论研究方面, 球形激波与湍流间的相互作用问题还是一个比较新的研究领域, 这一问题中的许多流动机理仍有待进一步研究.

球形汇聚-反射激波问题最早由Guderley^[1]进行研究, Guderley认为这一流动具有自相似的性质, 并给出了激波半径随时间的变化公式. Chisnell^[2]进一步研究了这一问题, 并给出了激波后流场的解析解. Van Dyke和Guttmann^[3]考虑了一个由活塞推动产生的球形激波, 并对其进行了分析. Payne^[4]对球形汇聚-反射激波进行了数值计算, 并对Guderley的结果进行了验证.

激波与湍流相互作用的研究最早是从平面激波开始的, Lee等人^[5]利用直接数值模拟(Direct Numerical

引用格式: 陈博轩, 李启兵, 李欣竹, 等. 球形汇聚-反射激波作用下湍动能方程的模化. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 104708
Chen B X, Li Q B, Li X Z, et al. Modeling of turbulent kinetic equation in converging-reflecting spherical shock-turbulence interaction (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 104708, doi: 10.1360/SSPMA-2020-0073

Simulation, DNS)方法对这一问题进行了研究,并尝试利用线性相互作用分析(Linear Interaction Analysis, LIA)方法进行理论方面的分析.研究发现,激波与湍流发生相互作用后,湍流尺度通常都会变小.湍流马赫数较大时,湍流会对激波造成影响,使激波面变形. Mahesh等人^[6]同样利用DNS和LIA方法进行了分析,指出涡量方程的体积压缩项和斜压项对激波后的涡量脉动演化起重要作用. Larsson和Lele^[7]利用DNS方法进行了研究,指出由于湍流马赫数的不同,激波面会出现波动甚至破碎,这对湍流脉动的分布产生很大的影响. Sinha和Balasridhar^[8]分析了激波前后湍动能的比例关系,提出了一种用于描述激波和湍流相互作用的模型.

球形汇聚-反射激波与湍流间的相互作用方面的研究还比较少.作为一个过渡,不少学者开展了圆柱汇聚激波的Rayleigh-Taylor和Richtmyer-Meshkov稳定性问题研究^[9-12],加深了人们对界面早期失稳的认识. Ghosh和Mahesh^[13]在研究激光诱导等离子体的过程中,探讨了激光能量在局部聚集产生的激波与各向同性湍流之间的相互作用. Bhagatwala和Lele^[14]通过数值计算分析了泰勒冲击波与各向同性湍流之间的相互作用,指出在远离球心区域,平面激波与湍流相互作用中有关湍流尺度和涡量脉动的结论在球形激波中仍然成立;在球心附近区域,由于几何效应,激波压缩效应下降. Bhagatwala和Lele^[15]针对汇聚激波与各向同性湍流相互作用同样进行了数值计算和相应的分析,同样得出了和泰勒冲击波与各向同性湍流相互作用类似的结论.

已有的研究大多集中于球形激波作用前后涡量脉动间的统计规律.本文首先对球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间的相互作用进行数值模拟,得出流场;然后通过统计方法计算出湍动能方程的各个项,分析流动过程的机理;最后利用统计结果与传统的湍动能模型进行对比,分析球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间的相互作用中传统模型的不足,同时对建立新的模型进行一些尝试.

2 计算方法

2.1 计算格式

本文的数值模拟没有采用传统的LES或DNS方

法^[12].计算球形汇聚-反射激波与湍流间的相互作用问题的程序采用WENO限制器下的高精度气体动力学格式(Gas-Kinetic Scheme, GKS)^[16],这一格式根据微观气体分子的运动规律,建立微观气体速度分布函数随时间演化的方程,即BGK方程.宏观物理量可以利用微观气体速度分布函数在相空间上积分获得.可以证明,在应对物理量连续变化的问题中,GKS方法等价于传统的N-S方程,在应对激波这种物理量非连续变化的问题中,由于GKS格式基于微观气体分子动理论,所以有更大的优势.

GKS方法的具体步骤为:利用网格单元边界上重构(如本文采用WENO重构)得出的守恒变量,构造初始分布函数;然后利用气体动力学方法求出分布函数随时间的变化函数;再由该分布函数求出一段时间内网格单元界面上的通量;最后利用有限体积法得到下一时间步的守恒变量.

2.2 可压缩各向同性湍流生成

球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间相互作用问题的计算初场需要分别生成各向同性湍流和激波,然后将两者结合起来得到最终的计算初场^[15].

各向同性湍流可以通过均匀可压缩各向同性衰减湍流的流场计算生成^[14]. Ristorcelli和Blaisdell^[17]详细讨论了均匀各向同性衰减湍流的计算方法.

由于计算球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间的相互作用涉及强压缩,所以对湍流的计算应该采用可压缩湍流的计算方法.可压缩湍流相比一般湍流的区别是常采用Favre平均 $\overline{(\cdot)}$,也就是质量加权平均代替一般的系综平均 $\overline{(\cdot)}$ ^[18].均匀可压缩各向同性衰减湍流的计算中两个决定性的无量纲参数分别为初始的湍流马赫数 M_{t0} 和初始的泰勒雷诺数 $Re_{\lambda 0}$,可以分别定义为

$$M_{t0} = \frac{u_0}{\langle c_0 \rangle}, Re_{\lambda 0} = \frac{u_{rms0} \lambda_0}{\langle \nu_0 \rangle}, \quad (1)$$

其中, u_0 为初始湍流的平均速率, u_{rms0} 为初始湍流的方均根速率, λ_0 为初始湍流的泰勒微尺度,湍流的时间尺度可以定义为 $\tau_0 = \lambda_0 / u_0$.计算湍流的初始能谱为

$$E_k(k) = Ak^4 \exp\left(-2\frac{k^2}{k_0^2}\right). \quad (2)$$

在我们的计算中取 $A=0.011$, $k_0=4$.这一能谱生成的湍流并不是真实的可压缩各向同性衰减湍流,但是

经过一段时间($t > 1.5\tau_0$)的发展^[19], 流动的非物理性消失, 变为真实的可压缩各向同性衰减湍流.

根据Bhagatwala和Lele^[15]的研究, 256^3 的网格量已经可以满足球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间相互作用的计算需求, 因此, 本文在湍流场的生成中, 也采用同样的网格. 图1(a)表现了可压缩各向同性衰减湍流中湍流马赫数随时间的变化. 计算中, 初始湍流马赫数 $M_{t0}=0.6$, 初始的泰勒雷诺数 $Re_{t0}=100$. 最终用于计算球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间相互作用的湍流场采用湍流马赫数衰减至 $M_{t0}=0.4$ 时的流场, 这时流动经过了约 $1.8\tau_0$ 的发展, 泰勒雷诺数衰减至 $Re_{t0}=45$. 图1(b)展现了此时各向同性湍流的湍动能能谱.

2.3 球形激波的生成

为了与湍流计算的网格相符, 球形激波的生成采用与湍流生成相同的 256^3 网格. 激波利用一个球形界面生成. 具体操作为, 在一个半径 R_{s0} 围成的球面内, 密度、压强均较低, 在此球面外, 密度、压强均较高, 形成一个界面. 这样会形成一个类似于激波管问题的流动, 进而产生一道激波. 由于初始界面为球形, 最后形成的激波面也为球形.

根据Liepmann和Roshko^[20]的研究, 这一问题可以利用一维激波管问题的解析解进行分析. 首先可以要求初始场界面两侧的流场速度均为0, 其次可以要求生成的流场不存在接触间断. 这样初始界面两侧的密度

比、压力比可以完全由生成激波的马赫数 M_{s0} 决定, 具体密度比、压力比满足如下方程:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_{s0}^2}{(\gamma-1)M_{s0}^2+2}, \quad (3)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{s0}^2-1), \quad (4)$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 - (\gamma-1) \frac{a_1}{a_4} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \right)^{-\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (5)$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(1 - (\gamma-1) \frac{a_1}{a_4} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \quad (6)$$

其中, 下标为2的变量和下标为1的变量之比表示生成激波两侧的物理量之比, 下标为4的变量和下标为1的变量之比表示初始界面两侧的物理量之比, γ 表示比热比, a 表示声速.

利用(3)–(6)可以得出初始流场, 由于流场的球对称性, 各个物理量可以写成半径 r 的函数, 具体表达式为

$$\rho = \rho_1 + \frac{\rho_1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{r-R_{s0}}{\delta} \right) \right) \left(\frac{\rho_4}{\rho_1} - 1 \right), \quad (7)$$

$$p = p_1 + \frac{p_1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{r-R_{s0}}{\delta} \right) \right) \left(\frac{p_4}{p_1} - 1 \right), \quad (8)$$

图1 (a) 湍流马赫数随时间变化图; (b) $M_{t0}=0.4$ 时各向同性湍流能谱图

Figure 1 (a) Relation between turbulent Mach number and time; (b) spectrum of isotropic turbulent energy when $M_{t0}=0.4$.

$$u = 0, \quad (9)$$

其中, 利用 $\tanh$ 函数使得流场在界面处光滑过渡. 在具体计算中, 取 $R_{s0}=0.7(L/2)$, $\delta=0.03$. L 为计算域边长.

Guderley^[1]根据自相似理论推导提出球形激波半径的运动规律:

$$R_s(t) = A \left| \frac{t}{t_s} \right|^\alpha, \quad (10)$$

其中, 时间 t 以激波汇聚至中心时为时间零点, t_s 为激波由开始汇聚到汇聚至中心所经过的时间, A 为激波初始半径, α 与流体的具体物理属性有关, 对于理想气体, $\alpha=0.7172$. 这一结论不仅适用于汇聚的球形激波, 也同样适用于膨胀的球形激波.

图2展示了利用前述方法得出的激波面位置与用理论计算出的激波面位置的对比. 可以看出, 数值模拟得出的激波位置与自相似理论解得出的激波位置吻合得很好, 这说明前面所描述的激波生成方法是有效的.

3 流动结果与分析

3.1 流场分析

计算的初场由前面计算的两种基本流动结合而得, 具体的结合公式为^[15]

$$\rho = \rho_{\text{turb}} + \frac{\rho_{\text{turb}}}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{r - R_{s0}}{\delta} \right) \right) \left(\frac{\rho_4}{\rho_1} - 1 \right), \quad (11)$$

图2 (网络版彩图)数值模拟与Guderley理论得出的激波半径对比图

Figure 2 (Color online) Comparison of shock radius between numerical simulation and Guderley theory.

$$p = p_{\text{turb}} + \frac{p_{\text{turb}}}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{r - R_{s0}}{\delta} \right) \right) \left(\frac{p_4}{p_1} - 1 \right), \quad (12)$$

$$u = u_{\text{turb}} + \frac{u_{\text{turb}}}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{r - R_{s0}}{\delta} \right) \right) \left(\frac{u_4}{u_1} - 1 \right), \quad (13)$$

其中, 下标为turb的变量表示各向同性湍流流场的物理量, 下标为4的变量和下标为1的变量之比表示生成激波所需的界面两侧物理量的比值, 利用 $\tanh$ 函数使得流场在界面处光滑过渡. 湍流脉动速率 u 在界面两侧也存在区别, 这是为了保证界面两侧的湍流马赫数 M_t 相同, 尽量避免界面两侧湍流马赫数 M_t 不同对湍动能方程的分析带来影响. 虽然这一流场是人为设计的, 但它在许多方面能够代表真实的物理结果. 首先, 湍流场来自于可压缩各向同性衰减湍流的计算, 湍流能谱已经充分接近真实物理, 流动能够体现包括小激波(Shocklet)在内的可压缩特性. 其次, 可以通过界面两侧的物理量对生成激波的马赫数进行控制, 同时又使得初始界面两侧的湍流场可以光滑过渡, 更加符合事实.

为了与两种基本流动的计算网格相符, 球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间相互作用的计算网格同样取 256^3 , 计算域为边长 2π 的正方体. 为了避免激波、膨胀波在计算域边界处的反射对流场计算造成影响, 在计算域外增加一个缓冲区, 包含缓冲区的网格后, 最终网格量为 320^3 , 根据Bhagatwala和Lele^[15]的经验, 这一网格可以对湍流脉动实现较好的解析.

本文计算的算例中, 初始湍流马赫数 $M_{t0}=0.4$, 初始泰勒雷诺数 $Re_{\lambda0}=45$. 激波马赫数 $M_{s0}=2.4$. 在这一算例中, 湍流马赫数 M_t 较大, 能够体现包括小激波在内的可压缩特性.

球形汇聚-反射激波与各向同性湍流之间相互作用有着与激波管问题相似的结构, 一道激波向球心汇聚, 激波扫过湍流, 将其压缩, 最外面会出现膨胀波. 图3是初始激波马赫数 $M_{s0}=2.4$ 的流场图, 图3(a)展示了 $t=0.25$ 时的流动结果, 此时激波正在向球心汇聚; 图3(b)展示了 $t=0.54$ 时的流动结果, 此时激波已经从球心反射正向外扩张. 图中利用涡量 ω 描述湍流的结构, 利用体膨胀率 $s=s_{ii}$ 计算出的黑线表示激波. 从图中可以看出湍流在经过激波后尺度变小, 这与平面激波与湍流相互作用的结果相同, 是激波的强压缩效应导致的^[6]. 激波会在沿半径方向和垂直半径方向之间引入各向异性, 这一点从激波后的湍流结构可以看出. 由

图3 (网络版彩图) $t=0.25$ (a)和 $t=0.54$ (b)时的流场图, 湍流由涡量表示, 激波由黑线表示

Figure 3 (Color online) The image of flow field (a) $t=0.25$, (b) $t=0.54$, turbulence is showed by vorticity, and shock is showed by black line.

于算例中湍流马赫数 M_t 比较大, 湍流使得激波出现了很大的变形, 甚至出现了破碎, 这也与平面激波与湍流相互作用的结果^[7]类似.

球形汇聚-反射激波与湍流间的相互作用会对平均流动和湍动能方程产生很大的影响. 尤其是激波面的变形和破碎效果, 在计算统计量时会作为一种脉动量被计入统计平均之中, 这会导致湍动能方程的模化与传统模型有很大区别.

3.2 流动平均场分析

平均流场和湍动能方程都需要对流动瞬时场的结果进行统计平均. 由于平均流动是球对称的, 所以平均后的结果应该是半径 r 的函数. 某一物理量在半径 r 处的统计平均应该通过半径 r 处的一个球壳内的数据点计算, 具体计算公式为^[14]

$$\bar{f}(r_n) = \sum_{r_n \leq r < r_{n+1}} f(r) / \sum_{r_n \leq r < r_{n+1}} 1, \quad (14)$$

$$r_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta, & n = 1, \\ r_{n-1} + 2\sqrt{3} \Delta, & 2 \leq n \leq 4, \\ r_{n-1} + \sqrt{3} \Delta, & n > 4, \end{cases} \quad (15)$$

其中, Δ 为网格大小. 在这样的球壳划分下, 不会有任何一个数据点位于球壳边界. 球壳的宽度与网格尺度为同一个量级, 保证统计平均的结果可以表现平均流的细节. 同时这种划分也可以保证每一个球壳内有充

足的数据点进行统计平均, 避免出现统计误差.

对流场进行统计平均后, 可以得出平均流场随半径的分布规律. 图4(a)–(c)分别展示了密度、压强、速度的平均值随半径的关系. 图4还给出了数值模拟与Bhagatwala和Leie^[15]的结果对比, 从图中可以看出数值模拟的结果与文献结果吻合得很好, 这说明数值模拟的结果是可靠的.

从图4(a)和(b)中可以看出, 与平面激波不同, 随着激波的运动, 波后的物理量在不断变化: 汇聚阶段, 激波后的密度、压力增大, 激波越靠近球心, 波后的密度、压力越大; 反射阶段, 激波后的密度、压力急剧增大, 但随着激波进一步运动, 激波后的密度、压力又很快下降. 从图4(c)可以看出, 激波在汇聚阶段, 激波前后的速度差逐渐增大, 因此激波马赫数 M_s 也逐渐增大; 激波在反射阶段, 激波前后速度差逐渐减小, 因此激波马赫数 M_s 也逐渐减小. 由于激波在反射前后运动速度相近, 而反射阶段温度高于汇聚阶段, 因此, 汇聚阶段激波马赫数 M_s 大于反射阶段.

从图4中还可以看出, 由于算例中湍流马赫数 M_t 比较大, 平均流场中激波的厚度会大大增加, 这是由于激波受到湍流作用而发生形变、波动甚至破碎导致的. 这说明激波附近雷诺应力很大, 对平均流场起到了很强的扩散作用, 使激波面变得平滑. 激波的形变、破碎在这一过程中起重要作用, 这一特点表明了湍动能方程在激波附近的物理机制与其他区域有很大区别, 这决定了球形汇聚-反射激波与湍流相互作用中湍动

图4 (网络版彩图)密度(a), 压强(b), 速度平均流场(c)随半径变化的分布图. 红色、黑色为汇聚阶段, 紫色、蓝色为反射阶段. 红色、紫色为数值计算, 黑色、蓝色来自于Bhagatwala和Lele^[15]

Figure 4 (Color online) The relation between density (a), pressure (b), velocity (c) and radius. Red & black lines represent converge, purple & blue lines represent reflect. Red & purple lines represent data from numerical simulation, Black & blue lines represent data from Bhagatwala and Lele [15].

能方程的模化与传统模型有很大区别.

4 湍动能方程分析

4.1 湍动能方程各个项的特点

利用Favre平均方法, 可以得到如下湍动能输运方程^[18]:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{Dk}{Dt} = & \underbrace{-\bar{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{\bar{\rho} P_k} - \underbrace{t''_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}}_{\bar{\rho} \varepsilon} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(t''_{ij} u''_i - \rho u''_j \frac{1}{2} u''_i u''_i - p' u''_j \right)}_D \\ & + \underbrace{u''_i \left(\frac{\partial \langle t_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right)}_M + \underbrace{p' \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}}_{P_d}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\langle * \rangle$ 为Favre平均, $\bar{*}$ 为系综平均, u'' 为Favre平均下

的脉动量, $*'$ 为系综平均下的脉动量, $k = \langle u''_i u''_i \rangle / 2$ 为湍动能, $\tau_{ij} = \overline{\rho u''_i u''_j} / \bar{\rho}$ 为雷诺应力, t_{ij} 为黏性应力. 等号右边为湍动能方程的生成项 P_k , 扩散项 D , 质量通量项 M , 压力体积项 P_d 和耗散项 ε .

图5(a)为算例中生成项 $\bar{\rho} P_k = -\bar{\rho} \langle u''_i u''_j \rangle \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right)$ 随半径的变化规律. 图中可以看出, 生成项 P_k 恒定为正. 由于激波处的强压缩使得 $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$ 变得很大, 进而导致生成项在激波位置出现极大值. 反射阶段球心处的生成项 $\bar{\rho} P_k$ 出现了负值, 这是因为球心处出现了很强的膨胀, 使得 $\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j$ 为正, 而雷诺应力 $\bar{\rho} \langle u''_i u''_j \rangle$ 也为正, 导致 $\bar{\rho} P_k$ 出现负值. 在激波处于汇聚阶段时, 生成项 $\bar{\rho} P_k$ 的值比较小, 在激波处于反射阶段时生成项 $\bar{\rho} P_k$ 的值比较大. 这主要是由于反射阶段平均密度 $\bar{\rho}$ 远大于汇聚阶段, 导致反射阶段生成项 $\bar{\rho} P_k$

图5 (网络版彩图)生成项(a), 扩散项(b), 质量通量项(c), 压力体胀项(d)随半径变化的分布图, 其中红色为汇聚阶段, 蓝色为反射阶段

Figure 5 (Color online) The relation between production term (a), diffusion term (b), mass-flux term (c), pressure-dilatation term (d) and radius, red lines represent converge, and blue lines represent reflect.

的值大于汇聚阶段.

图5(b)为算例中扩散项 $D = \partial(\overline{t''_{ij}u''_i} - \overline{\rho u''_j u''_i u''_i} / 2 - \overline{p' u''_j}) / \partial x_j$ 随半径的变化规律. 图中可以看出, 扩散项 D 的值在激波处出现很大的波动. 扩散项 D 与激波的传播方向有关, 在激波前, 扩散项 D 为正, 在激波后, 扩散项 D 为负. 这可以理解为湍动能从激波后向激波进行扩散. 从图中还可以看出, 激波汇聚阶段, 扩散项 D 较小, 激波反射阶段, 扩散项 D 较大. 扩散项 D 在数值上比生成项 $\bar{p}P_k$ 还要大, 这表示在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的过程中, 扩散项 D 起重要作用.

图5(c)为质量通量项 $M = \overline{u''_i}(\partial \langle t_{ij} \rangle / \partial x_j - \partial \bar{p} / \partial x_i)$ 随半径的变化规律. 图中可以看出, 由于平均流场

在激波附近剧烈变化, 平均压力等平均量的梯度很大, 同时根据Ristorcelli^[21], $\overline{u''_i}$ 正比于平均密度的梯度, 这些效应使得质量通量项 M 在激波附近出现很大的负值. 质量通量项无论在激波汇聚阶段还是激波反射阶段恒定为负. 质量通量项 M 在大小上与生成项 $\bar{p}P_k$ 接近, 这表示在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的过程中, 质量通量项 M 起重要作用.

图5(d)表现了算例中压力体胀项 $P_d = \overline{p'(\partial u''_i / \partial x_i)}$ 随半径的变化规律. 图中可以看出, 压力体胀项 P_d 的值在激波处出现很大的波动. 压力体胀项 P_d 与激波的传播方向有关, 在激波前, 压力体胀项 P_d 为负, 在激波后, 压力体胀项 P_d 为正. 这表示压力体胀项 P_d 在数据上和扩散项 D 类似, 为压力体胀项 P_d 的模化提供了思路. 压

力体胀项 P_d 在大小上与生成项 $\bar{p}P_k$ 接近, 这表示在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的过程中, 压力体胀项 P_d 起重要作用.

在可压缩湍流中, 耗散项 $\varepsilon = \overline{t''_{ij} \partial u''_i / \partial x_j}$ 可以分为两项 $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$, 其中 ε_s 为不可压缩耗散, ε_d 为可压缩耗散, 分别可以写为^[22]

$$\bar{p} \varepsilon_s = \overline{\mu \omega''_i \omega''_i}, \quad (17)$$

$$\bar{p} \varepsilon_d = \frac{4}{3} \overline{\mu (s''_{ii})^2}. \quad (18)$$

图6(a)和(b)分别表现了算例中不可压耗散项 ε_s 和可压缩耗散项 ε_d 随半径的变化规律. 从图中可以看出, 不论是不可压耗散项 ε_s 还是可压缩耗散项 ε_d , 都远小于生成项 P_k . 这表示在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的过程中, 不可压耗散项 ε_s 和可压缩耗散项 ε_d 都几乎不起作用, 可以忽略. 黏性在激波作用过程中不起主导作用, 这一点是符合物理的.

综上所述, 可以看出在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的过程中, 与黏性有关的项在湍动能方程中几乎不起作用, 与压力脉动、速度脉动等有关的项在湍动能方程中起重要作用. 以上的分析可以对球形汇聚-反射激波与湍流相互作用中湍动能方程的模化提供依据.

4.2 湍动能方程的模化

雷诺应力 τ_{ij} 可以对描述湍流平均场的方程进行封

闭, 计算湍动能方程的最终目的是为了计算雷诺应力 τ_{ij} , 这是湍流模式的根本目的. 基于这一目的, 在分析湍动能方程的各个项的模化之前, 首先需要对雷诺应力模式进行分析.

工程中应用最广的雷诺应力模式为标准 k - ε 二方程涡黏性模式^[23], 其形式Boussinesq假设:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2 \nu_T \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{ii} \delta_{ij} \right), \\ \nu_T &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \\ C_\mu &= 0.09, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, τ_{ij} 表示雷诺应力, ν_T 为涡黏性系数, k 为湍动能, ε 为耗散项, S_{ij} 为流场应变率张量. 图7(a)表现了本算例在标准 k - ε 模式下的雷诺应力随半径变化的分布规律. 由于平均流场的球对称性, 雷诺应力张量中只有沿半径方向的雷诺应力 τ_{rr} 和垂直于半径方向的雷诺应力 $\tau_{\theta\theta}$. 从图中可以看出, 标准 k - ε 模式与真实情况严重不符, 出现了负值等非物理的结果. 这是由于在激波处流场应变率过大, 与涡黏性系数相乘后出现了非物理的结果.

Shih等人^[24]提出了可实现涡黏性模式(RKE), 其基本思想是调节涡黏性系数 ν_T , 在应变率过大的地方相应减小 ν_T , 避免大应变率使得模式计算出非物理的结果, 使结果更加符合真实情况. 图7(b)表现了算例在RKE模式下雷诺应力随半径变化的分布图. 从图中可以看出, RKE模式下雷诺应力与数值计算的结果符合

图6 (网络版彩图)不可压耗散项(a)和可压缩耗散项(b)随半径变化的分布图, 其中红色为汇聚阶段, 蓝色为反射阶段

Figure 6 (Color online) The relation between incompressible dissipation term (a), compressible dissipation term (b) and radius, red lines represent converge, and blue lines represent reflect.

得较好. 生成项 $P_k = -\langle u''_i u''_j \rangle (\partial \langle u_i \rangle / \partial x_j)$ 是不需要单独建立湍流模式的, 但是, 雷诺应力的模型的准确度决定了生成项模型的准确度. 显然, Shih 等人^[24]提出的可实现涡黏性模式真正地给出了可实现的雷诺应力, 且与 DNS 数据符合得很好.

Dimonte 和 Tipton^[25]在利用 $k-l$ 模型研究 Richtmyer-Meshkov 稳定性时, 在激波处采用了 Sinha 和 Balasridhar^[8]提出的模式, 即直接将激波处雷诺应力按 $\tau_{ij} = 2/3 k \delta_{ij}$ 计算. 显然, 图 7 表明这种模式与数值模拟的结果不符.

图 8 表现了利用可实现涡黏性模式计算的生成项 P_k 随半径变化的分布规律. 由于平均密度 $\bar{\rho}$ 不需要建模, 这里可以只比较生成项 P_k . 从图中可以看出, 上述生成项 P_k 的模型与 DNS 的结果符合得也很好.

传统湍动能生成项中的雷诺应力 τ_{ij} 是利用标准 $k-\varepsilon$ 模式得出的, 由于该模式得出的雷诺应力远大于实际, 因此得出的生成项 P_k 会远大于数值计算的结果. 可实现涡黏性模式计算的雷诺应力与实际符合得很好, 其生成项 P_k 必然与实际符合得很好.

对扩散项 $D = \partial (\overline{u''_i u''_i} - \overline{\rho u''_j u''_i u''_i} / 2 - \overline{p' u''_j}) / \partial x_j$ 的模化只需考虑括号里的部分 $D^* = \overline{u''_i u''_i} - \overline{\rho u''_j u''_i u''_i} / 2 - \overline{p' u''_j}$. 由于在激波中黏性起作用极小, $\overline{u''_i u''_i}$ 可以忽略. 不少传统模型认为, 压力脉动引起的

扩散 $\overline{p' u''_j}$ 可以被忽略, 剩下的项被模化为^[26]

$$\overline{-\rho u''_j \frac{1}{2} u''_i u''_i} = \bar{\rho} \frac{\nu_T}{\sigma_K} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (20)$$

其中, ν_T 为涡黏性系数, σ_K 为比例系数.

在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的流场中, 由于激波附近压力变化巨大, 压力脉动引起的扩散 $\overline{p' u''_j}$ 实际上不可忽略, 由于这一扩散作用与压力有关, 可以将这一项模化为压力产生的扩散:

$$\overline{-p' u''_i} = C_{p1} \nu_T \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}, \quad (21)$$

其中, ν_T 为涡黏性系数, 比例系数 C_{p1} 与马赫数等具体流动参数有关. 由于压力梯度与激波运动方向有关, 这也解释了扩散项 D 在激波前为正, 激波后为负的事实. 图 9 表现了利用这一模型计算的压力脉动引起的扩散 $\overline{p' u''_j}$ 随半径分布规律. 从图中可以看出, 上述压力脉动引起的扩散 $\overline{p' u''_j}$ 的模型与数值计算得出的结果符合得比较好. 从图中还可以看出, 在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的流场中, 压力脉动引起的扩散 $\overline{p' u''_j}$ 比传统模型考虑的扩散 $\overline{-\rho u''_j u''_i u''_i} / 2$ 更重要.

质量通量项 $M = \overline{u''_i} (\partial \langle t_{ij} \rangle / \partial x_j - \partial \bar{p} / \partial x_i)$ 中, 只需对 $\overline{u''_i}$ 进行模化. 由于在激波中黏性起作用极小,

图 7 (网络版彩图) 雷诺应力在 Boussinesq 模式 (a) 和 RKE 模式 (b) 下随半径变化的分布图, rr 代表沿 r 方向雷诺应力, tt 代表垂直于 r 方向雷诺应力

Figure 7 (Color online) The relation between Reynolds stress in Boussinesq mode (a), RKE mode (b) and radius, rr represent Reynolds stress in r direction, and tt represent Reynolds stress perpendicular to r direction.

图8 (网络版彩图)数值模拟与模型得出的生成项对比图. 红色表示汇聚, 蓝色表示反射

Figure 8 (Color online) Comparison of production term between numerical simulation and model, red lines represent converge, and blue lines represent reflect.

图9 (网络版彩图)数值模拟与模型得出的压力引起扩散项对比图. 红色表示汇聚, 蓝色表示反射, 黑色表示传统模型中湍动能引起扩散项

Figure 9 (Color online) Comparison of diffusion term caused by pressure between numerical simulation and model, red lines represent converge, blue lines represent reflect, black lines represent diffusion term caused by turbulent kinetic in traditional model.

$\partial \langle t_{ij} \rangle / \partial x_j$ 可以忽略, 所以质量通量项 M 是由压力梯度主导的. 在传统湍动能模型中, 由于 $\overline{u''_i}$ 和 $\partial \overline{p} / \partial x_i$ 一般都比较小, 质量通量项 M 通常被忽略.

在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用的流场中, 由于激波两侧各物理量变化很大, 质量通量项 M 不可忽略. Ristorcelli^[21] 对 $\overline{u''_i}$ 进行了分析, 提出 $\overline{u''_i}$ 正比于密度梯度 $(\partial \overline{p} / \partial x_i) / \overline{\rho}$. 由此可以对质量通量项建立模式:

$$-\overline{u''_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = -C_p \frac{\nu_T}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}, \quad (22)$$

其中, ν_T 为涡黏性系数, 比例系数 C_p 与马赫数等具体流动参数有关. 图10表现了利用这一模型计算的质量通量项 M 随半径分布规律. 从图中可以看出, 上述质量通量项 M 的模型与数值计算得出的结果符合得比较好.

在传统湍动能方程模型中, 已经存在一些对压力体胀项 $P_d = \overline{p'(\partial u''_i / \partial x_i)}$ 模化的方式, 应用最广的是 Sarkar^[27] 提出的模式:

$$P_d = \overline{p' \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}} = -0.15 M_t \overline{p} P_k + 0.2 M_t^2 \overline{p} \varepsilon. \quad (23)$$

其中, M_t 为湍流马赫数, P_k 为生成项, ε 为耗散项. 根据这一模式, 压力体胀项 P_d 对流动的影响应该比生成项小1个量级左右, 而且与激波传播方向无关, 恒定为负值. 这与前面图5(d)中计算得出的结果不符.

为了更好地对湍动能方程中由压力脉动引起的各个项建模, 可以将压力体胀项 P_d 和扩散项 D 中的 $-\partial \overline{p' u''_i} / \partial x_i$ 相结合, 即

图10 (网络版彩图)数值模拟与模型得出的质量通量项对比图. 红色表示汇聚, 蓝色表示反射

Figure 10 (Color online) Comparison of mass-flux term between numerical simulation and model, red lines represent converge, blue lines represent reflect.

$$P_d^* = \overline{p' \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}} - \frac{\partial \overline{p' u''_i}}{\partial x_i} = -\overline{u''_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}}, \quad (24)$$

其中, P_d^* 为两项结合在一起后的结果, 对其建立模型:

$$-\overline{u''_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = C_{p2} \nu_T \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (25)$$

其中, ν_T 为涡黏性系数, 比例系数 C_{p2} 与马赫数等具体流动参数有关. 图 11 表现了利用这一模型计算的 P_d^* 随半径分布规律. 从图中可以看出, 上述 P_d^* 的模型与数值计算得出的结果符合得比较好. 因此, 本文提出一个适用于激波与湍流相互作用问题的压力体胀项 P_d 的模式为

$$P_d = C_{p2} \nu_T \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i \partial x_i} - C_{p1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_T \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right). \quad (26)$$

5 总结

球形汇聚-反射激波与湍流相互作用问题在惯性约束聚变、超新星爆发等不同的领域都有很重要的意义. 本文通过数值模拟, 对这一流动过程中的湍动能方程进行分析, 尝试建立了该方程压力相关的新的封闭模式.

本文的研究结果主要分为以下几部分.

(1) 在球形汇聚-反射激波与湍流相互作用问题中, 雷诺应力模式需要应用可实现模式代替一般的涡黏性模式.

(2) 湍动能方程中, 黏性对流动影响极小, 与黏性有关的项都可以忽略.

(3) 压力体胀项、压力脉动引起的扩散项和质量

图 11 (网络版彩图) 数值模拟与模型得出的压力体胀项对比图. 红色表示汇聚, 蓝色表示反射

Figure 11 (Color online) Comparison of pressure-dilatation term between numerical simulation and model, red lines represent converge, blue lines represent reflect.

通量项在湍动能方程中起重要作用, 甚至这三项在数值上比生成项还大.

(4) 压力体胀项、压力脉动引起的扩散项和质量通量项在一般的湍流问题中往往可以忽略, 但涉及球形激波与湍流的相互作用问题, 必须对其进行模化. 本文尝试对这三项进行模化, 将其与平均流场中的压力梯度、密度梯度等物理量建立了联系, 与数值计算的结果符合得较好.

目前湍动能方程中各个项的模型已经初步建立, 进一步的研究将集中在模型中的比例系数与马赫数等具体流动参数的关系上.

参考文献

- Guderley G. Starke kugelige und zylinderische Verdichtungsstoesse in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 1942, 19: 302–312
- Chisnell R F. An analytic description of converging shock waves. *J Fluid Mech*, 1998, 354: 357–375
- Van Dyke M, Guttman A J. The converging shock wave from a spherical or cylindrical piston. *J Fluid Mech*, 1982, 120: 451–462
- Payne R B. A numerical method for a converging cylindrical shock. *J Fluid Mech*, 1957, 2: 185–200
- Lee S, Lele S K, Moin P. Interaction of isotropic turbulence with shock waves: Effect of shock strength. *J Fluid Mech*, 1997, 340: 225–247
- Mahesh K, Lele S K, Moin P. The influence of entropy fluctuations on the interaction of turbulence with a shock wave. *J Fluid Mech*, 1997, 334: 353–379
- Larsson J, Lele S K. Direct numerical simulation of canonical shock/turbulence interaction. *Phys Fluids*, 2009, 21: 126101
- Sinha K, Balasridhar S J. Conservative formulation of the $k-\epsilon$ turbulence model for shock-turbulence interaction. *AIAA J*, 2013, 51: 1872–1882

- 9 Zhai Z G, Zhang F, Zhou Z B, et al. Numerical study on Rayleigh-Taylor effect on cylindrically converging Richtmyer-Meshkov instability. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2019, 62: 124712
- 10 Wu Z, Huang S, Ding J, et al. Molecular dynamics simulation of cylindrical Richtmyer-Meshkov instability. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 114712
- 11 Liang Y, Zhai Z G, Luo X S. Interaction of strong converging shock wave with SF₆ gas bubble. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 064711
- 12 Jiao Z, Fu S. Investigations of an enclosed annular rotor-stator system with LES method. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2018, 61: 114711
- 13 Ghosh S, Mahesh K. DNS of the thermal effects of laser energy deposition in isotropic turbulence. *J Fluid Mech*, 2010, 654: 387–416
- 14 Bhagatwala A, Lele S K. Interaction of a Taylor blast wave with isotropic turbulence. *Phys Fluids*, 2011, 23: 035103
- 15 Bhagatwala A, Lele S K. Interaction of a converging spherical shock wave with isotropic turbulence. *Phys Fluids*, 2012, 24: 085102
- 16 Li Q B, Xu K. Progress in gas-kinetic scheme (in Chinese). *Adv Mech*, 2012, 42: 522–537 [李启兵, 徐昆. 气体动理学格式研究进展. *力学进展*, 2012, 42: 522–537]
- 17 Ristorcelli J R, Blaisdell G A. Consistent initial conditions for the DNS of compressible turbulence. *Phys Fluids*, 1997, 9: 4–6
- 18 Wilcox D C. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd ed. California: DCW Industries, Inc., 2006
- 19 Samtaney R, Pullin D I, Kosović B. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. *Phys Fluids*, 2001, 13: 1415–1430
- 20 Liepmann H W, Roshko A. *Elements of Gasdynamics*. New York: Wiley, 1957
- 21 Ristorcelli J R. A Representation for the Turbulent Mass Flux Contribution to Reynolds-stress and Two-equation Closures for Compressible Turbulence. Technical Report. International Conference on Applied Science & Engineering Report. No. 93-88. Hampton: National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1993
- 22 Sarkar S, Erlebacher G, Hussaini M Y. Direct simulation of compressible turbulence in a shear flow. *Theoret Comput Fluid Dyn*, 1991, 2: 291–305
- 23 Boussinesq J. *Theorie de l'Ecoulement Tourbillant*. Mem Presentes Par Divers Savants Acad Sci Inst Fr, 1877, 23: 46–50
- 24 Shih T H, Liou W W, Shabbir A, et al. A new $k-\epsilon$ eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Comput Fluids*, 1995, 24: 227–238
- 25 Dimonte G, Tipton R. K-L turbulence model for the self-similar growth of the Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities. *Phys Fluids*, 2006, 18: 085101
- 26 Glushko G. Turbulent boundary layer on a flat plate in an incompressible fluid. *Izvestia Akadem Nauk SSSR, Mekht*, 1965, 4: 13
- 27 Sarkar S. The pressure-dilatation correlation in compressible flows. *Phys Fluids A-Fluid Dyn*, 1992, 4: 2674–2682

Modeling of turbulent kinetic equation in converging-reflecting spherical shock-turbulence interaction

CHEN BoXuan¹, LI QiBing¹, LI XinZhu², HUANG ShiZhang²,
WANG WeiRong² & FU Song^{1*}

¹ School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

² Laboratory of Shock Wave and Detonation Physics, Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China

The interaction between spherical shock and turbulence is very important in inertial confinement fusion (ICF), supernova explosion, shock wave lithotripsy and other engineering problems. In this work, the interaction between converging-reflecting spherical shock and isotropic turbulence is studied through direct numerical simulation. The characteristics of the flow and the mechanism of turbulence generation are analyzed in detail. Research attention has mainly focused on the behavior of turbulent kinetic equation and the physical mechanisms that play important roles in the flow. It is found that the traditional mechanisms for shear-driven turbulent flows are weak and viscous terms in the turbulent kinetic equation can even be neglected. Shock wave is attributed as the main factor inducing turbulence and plays a leading role in the turbulent kinetic equation. It is particularly observed that the pressure fluctuation induced by the shock has a dominant influence on the turbulent kinetic equation. Terms related to pressure fluctuation play important role in turbulence generation. Some terms that were normally ignored in shear-driven turbulence, such as mass flux and pressure dilatation terms, exhibit large magnitudes in the interaction of converging-reflecting spherical shock with turbulence. The validity of the eddy viscosity model is also discussed in this work. It is illustrated that the eddy viscosity model satisfying the realizability principle can deliver much better simulations of Reynolds stresses than the standard k - ϵ two-equation model. It is also revealed here that the traditional closure models of the unknown terms in the turbulent kinetic equation are remarkably erroneous when applied to the present problem. Attempts have made to propose new closure models for the mass flux and pressure dilatation terms in the turbulent kinetic equation.

converging-reflecting spherical shock, turbulent kinetic equation, pressure-dilatation, mass-flux

PACS: 47.40.Nm, 47.27.Gs, 47.27.Eq

doi: [10.1360/SSPMA-2020-0073](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0073)