二维贴现累积索赔过程的一致局部渐近估计

江涛^{1,2}, 陈婷¹, 徐晖³, 王岳宝^{2,3*}

1. 浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018;

2. 浙江工商大学杭州商学院, 杭州 311508;

3. 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006

E-mail: jtao@263.net, tingchentongji@163.com, xh19910825@hotmail.com, ybwang@suda.edu.cn

收稿日期: 2020-01-03; 接受日期: 2020-04-17; 网络出版日期: 2020-08-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71671166 和 11071182) 和浙江省一流学科 A 类 (浙江工商大学统计学) 资助项目

摘要 本文考虑一个带常利率的二维风险模型, 其中索赔额向量具有局部次指数的边际分布, 它们和相应的到达时间间隔服从一个新的局部时间相依结构. 进而, 本文给出一些服从该结构的联合分布的类型. 在这个相依风险模型中, 本文得到了二维贴现累积索赔过程及总净损失过程的一致局部渐近估计.

关键词 二维风险模型 贴现累积索赔过程 总净损失过程 局部时间相依 一致局部渐近估计 局部次指数分布

MSC (2010) 主题分类 62H05, 62E20, 62P05

1 引言

自文献 [1] 开始研究带常利率的一维连续时风险模型以来, 这方面的研究已经获得了许多结果 (参见文献 [1–5]). 在这些结果中, 依次到达保险公司的索赔额 $\{X_k : k \geq 1\}$ 构成一个独立同分布的随机变量列, 而它们的到达时间间隔列 $\{\theta_k : k \geq 1\}$ 也由独立同分布的随机变量所构成. 进而, 假设两者相互独立.

因为事物之间的关系往往不是独立的, 所以学者们也开始研究具有某个关于索赔额的相依结构或关于到达时间间隔的相依结构的一维风险模型 (参见文献 [6–8]). 在这些结果中, 索赔额列和到达时间间隔列仍然被假设为相互独立的. 这时, 所得的结果与独立场合下的结果完全相同. 换言之, 该相依结构对所得结论没有任何影响. 此外, 这些相依结构下的索赔额的分布范围往往也比独立结构下的小.

在保险实务中, 往往有几个不同险种的索赔同时到达的现象, 它们与索赔来到时间间隔形成一个组合. 尽管各组之间的随机变量是相互独立的, 但每组内的各个索赔和来到时间间隔却是相依的. 例如, 一个车祸, 往往同时产生财险和生命险两个索赔, 各个索赔额与索赔到达时间间隔有密切的相依关系: 时间间隔越短, 往往意味着发生车祸的强度就越高, 从而使索赔额越大. 此外, 两个索赔额也往往

英文引用格式: Jiang T, Chen T, Xu H, et al. The uniform local asymptotics of the bidimensional discounted aggregate claim process (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1487–1504, doi: 10.1360/SSM-2020-0002

是正相关的. 学者们把这种相依模型称为时间相依结构. 相应的研究可以参见文献 [9–12] 等. 有趣的是, 这些结果表明该相依结构对所得结论有影响, 因此, 它引起了人们特别的关注.

对多维连续时风险模型, 也有一些文献研究了累积贴现索赔过程、总净损失过程及破产概率的尾分布, 参见文献 [13–18]. 其中, 文献 [16] 研究了时间相依的多维连续时风险模型上述对象分布的尾渐近性. 然而迄今为止, 在该模型中, 我们没有发现任何有关上述对象分布的局部渐近性的研究.

本文给出一个二维局部时间相依的连续时风险模型的累积贴现索赔过程及总净损失过程的一致局部渐近估计. 因为后者的结果容易被前者的推出, 所以本文的主要研究对象是前者. 众所周知, 二维的结果可以容易地推广到多维的场合, 但是它与一维的结果有实质的区别, 所以, 本文只研究二维的结果.

关于累积贴现索赔过程的研究, 文献 [5] 给出了一维独立连续时风险模型下, 它的尾分布的一致渐近估计, 其中, 索赔额具有广义正则变化尾的分布. 文献 [10] 给出了一维时间相依 Poisson 连续时风险模型下, 它的尾分布的非一致渐近估计. 在后者中, 索赔额也被要求具有正则变化尾的分布, 只有当利率为零时, 索赔额分布才可以属于次指数分布族. 在上述工作的基础上, 本文又开展了进一步的工作, 它具有如下特点.

首先, 当上述研究目标具有重尾分布时, 它的局部分布往往是尾分布的高阶无穷小, 因此, 局部分布的研究具有独特的研究价值, 不能被尾分布的研究所替代. 而当上述目标具有轻尾分布时, 情况则有本质的区别. 这时它们的局部分布与尾分布往往是同阶的, 所以, 它们的局部分布的研究可以被尾分布的研究所替代.

其次, 过去随机变量的相依结构是基于尾分布建立的, 为研究累积贴现索赔过程的局部分布, 我们必须构造一个迄今所没有的、基于随机变量的局部分布的相依结构. 此外, 第 5 节将举例说明该结构具有相当大的适用范围.

第三, 累积贴现索赔过程的局部分布的估计的一致渐近性反映了保险公司的初始资本的大小与其经营时间的长短无关的规律. 而非一致渐近性的结果则不能反映这一规律. 此外, 从数学技术层面上讲, 一致渐近性的研究通常难于非一致渐近性的研究.

最后, 本文中索赔额的分布属于局部次指数分布族. 众所周知, 局部次指数分布族的范围比广义正则变化尾的分布族要大, 即本文的结果有更大的适用范围. 以下分别介绍二维连续时风险模型、一些局部分布族、随机变量的局部时间相依结构及本文的主要结果, 其中包含了上述所有数学概念的严格定义.

1.1 一个二维连续时风险模型

本文假设某个保险公司有两类保险业务. 对 $i = 1, 2$, 设第 i 类业务依次到达保险公司的索赔额列 $\{X_k^{(i)} : k \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量列, 其代表为 $X^{(i)}$, 具有一个支撑在 $[0, \infty)$ 上的共同分布 F_i . 进而假设对所有的整数 $k \geq 1$, 每对索赔额 $X_k^{(1)}$ 和 $X_k^{(2)}$ 是同时到达保险公司的, 并且它们的到达时间间隔列 $\{\theta_k : k \geq 1\}$ 也是独立同分布的随机变量列, 其代表为 θ , 具有一个支撑在 $[0, \infty)$ 上的共同分布 G .

对两个同时到达的索赔额 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$, 保险公司通常不会以一维的方式: $X^{(1)} + X^{(2)}$ 来处理索赔事宜, 因为 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 各有不同的处理规则. 从数学的角度看, 这种简单相加的处理方式也未必合理, 例如, 即使 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 都服从局部次指数分布, 但 $X^{(1)} + X^{(2)}$ 仍可能不服从任何局部次指数分布 (参见文献 [19, 例 2.4]), 这样就难以做进一步的数学处理. 于是, 向量 $\vec{X} = (X^{(1)}, X^{(2)})^\top$ 就成为

处理相关事宜的合适方式.

在该二维风险模型中, 记依次到达的索赔时间为 $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 1$, 它们构成了一个更新计数过程

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\sigma_n \leq t\}}, \quad t \in [0, \infty).$$

称 $\lambda(t) = \mathbb{E}N(t)$ 为更新函数, 再设 $\lambda(0) = 0$, 并记

$$\Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\} = \{t : \mathbb{P}(\sigma_1 \leq t) > 0\}.$$

为简便起见, 不妨设 $\underline{t} = \inf\{t : \mathbb{P}(\sigma_1 \leq t) > 0\} = 0$ 及 $\mathbb{P}(\sigma_1 = 0) = 0$, 从而 $\Lambda = (0, \infty)$.

设 $r \in (0, \infty)$ 是该保险公司确定的常数利率. 对 $i = 1, 2$, 记第 i 类业务在时刻 $t \in (0, \infty)$ 的总收益为 $C_i(t)$; 再设 $C_i(0) = 0$, 且几乎处处有 $C_i(t) < \infty$, 它们构成一个非负非降的随机过程. 记向量 $\vec{C}(t) = (C_1(t), C_2(t))^T$. 设 $\vec{X}_k = (X_k^{(1)}, X_k^{(2)})^T$ 是第 k ($k \geq 1$) 对索赔, $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ 是初始资本向量. 又记 $\vec{U}(\vec{x}, t) = (U_1(x_1, t), U_2(x_2, t))^T$ 为 t 时刻的总净盈余, 则

$$\vec{U}(\vec{x}, t) = \vec{x}e^{rt} + \int_{0-}^t e^{r(t-y)} \vec{C}(dy) - \int_{0-}^t e^{r(t-y)} \vec{S}(dy),$$

这里 $\vec{S}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \vec{X}_k$, $t \in [0, \infty)$. 称 $\{\vec{U}(\vec{x}, t) : t \in (0, \infty)\}$ 为总净盈余过程, 而 $\{-\vec{U}(\vec{x}, t) : t \in (0, \infty)\}$ 为总净损失过程. 显然, 这两个过程都密切相关于下列二维累积贴现过程:

$$\begin{aligned} \vec{D}_r(t) &= \int_{0-}^t e^{-ry} \vec{S}(dy) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \mathbf{1}_{\{\sigma_k \leq t\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \right) \mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} = \sum_{k=1}^{N(t)} \vec{X}_k e^{-r\sigma_k}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (1.1)$$

因此, 该二维累积贴现过程自然成为风险理论的主要研究目标之一, 而确定它的下列局部概率的某个上确界的渐近表达式就是本文的主要研究任务:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{P}(\vec{D}_r(t) \in (\vec{0}, \vec{d}]), \quad \text{对某个 } \vec{d} \in (\vec{0}, \infty) \text{ 和 } T \in (0, \infty).$$

1.2 一些局部分布族

对某个常数 $d \in (0, \infty]$ 和某个支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布 F , 当 $d < \infty$ 时, 记 $F(x + \Delta_d) = F((x, x+d])$; 当 $d = \infty$ 时, 记 $F(x + \Delta_d) = F((x, \infty)) = \bar{F}(x)$.

称一个分布 F 属于局部长尾分布族, 记作 $F \in \mathcal{L}_{\Delta_d}$, 若 $F(x + \Delta_d)$ 最终为正, 且对每个 $z \in (0, \infty)$ 及所有的 $|y| \leq z$, 一致地有

$$F(x + y + \Delta_d) \sim F(x + \Delta_d).$$

所有的极限关系, 若无特别申明, 均指 $x \rightarrow \infty$; 且对两个正函数 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$, $a(x) \sim b(x)$ 指

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)(b(x))^{-1} = 1.$$

显然, 族 $\mathcal{L}_{\Delta_d}$ 中的分布 F 是重尾的, 即对每个常数 $\varepsilon \in (0, \infty)$, 有

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon y} F(dy) = \infty.$$

若一个分布 $F \in \mathcal{L}_{\Delta_d}$ 且

$$F^{*2}(x + \Delta_d) \sim 2F(x + \Delta_d),$$

则称该分布属于一个局部次指数分布族, 记作 $F \in \mathcal{S}_{\Delta_d}$, 这里 F^{*n} 指分布 F 与自身的 n -重卷积, $n \geq 1$, 并设 $F^{*1} = F$. 上述两个概念是被文献 [20] 引入的.

在上述两个概念中, 若以“对所有的 d ”取代“对某个 d ”, 则分别称该分布 F 属于局部分布族 $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ 和 $\mathcal{S}_{\text{loc}}$ (参见文献 [21]).

局部次指数分布族在独立同分布的随机变量的局部渐近性的研究中起了关键的作用. 除以上文献之外, 还可以参见文献 [22-27] 和 [28-33]. 然而, 我们没有发现任何有关相依随机变量的局部渐近性的研究.

最后指出不宜用次指数密度的研究来取代局部次指数分布的研究, 因为存在一个分布 $F \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$, 但是它没有密度 (参见文献 [32, 定理 1.1]).

1.3 一个局部时间相依结构

文献 [16] 基于向量 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \theta)$ 的全局分布给出了一个相依结构. 本文基于该向量的局部分布构造了一个相依结构, 见下文条件 1-3. 因为在这些条件中, 都有到达时间间隔 θ 的参与, 所以称该结构为局部时间相依结构. 在介绍这些条件之前, 先约定下文中所有的函数是正可测的, 且如无特别说明, 对 $i = 1, 2$, 所有的极限指 $x_i \rightarrow \infty$ 或 $\vec{x} \rightarrow \infty$. 此外, 当 $d_i \in (0, \infty)$ 时, 记 $\Delta^{(i)} = (0, d_i]$; 当 $d_i = \infty$ 时, 记 $\Delta^{(i)} = (0, \infty)$. 再设 $F_i(x_i + \Delta^{(i)})$ 最终为正, 常数 $T \in (0, \infty)$.

条件 1 对 $i = 1, 2$, 存在一个正函数 $h_i(\cdot)$ 使得

$$P(X^{(i)} \in x_i + \Delta^{(i)} \mid \theta = s) \sim F_i(x_i + \Delta^{(i)})h_i(s) \quad (1.2)$$

对所有的 $s \in [0, \infty)$ 及 d_i 一致成立, 且

$$\begin{aligned} 0 < b_* = b_*(T, h_1, h_2) &= \inf \left\{ \inf_{s \in [0, T]} h_i(s) : i = 1, 2 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sup_{s \in [0, T]} h_i(s) : i = 1, 2 \right\} = b^*(T, h_1, h_2) = b^* < \infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

条件 2 对 $i = 1, 2$, 存在一个函数 $g(\cdot)$ 使得

$$P(\vec{X} \in \vec{x} + \vec{\Delta} \mid \theta = s) \sim \prod_{i=1}^2 F_i(x_i + \Delta^{(i)})g(s) \quad (1.4)$$

对所有的 $s \in [0, \infty)$ 及 $d_i \in (0, \infty]$ 一致成立, 且

$$0 < d_* = d_*(T, g) = \inf_{s \in [0, T]} g(s) \leq \sup_{s \in [0, T]} g(s) = d^*(T, g) = d^* < \infty. \quad (1.5)$$

条件 3 对 $1 \leq i \neq j \leq 2$, 这里存在一个二元正函数 $g_{ij}(\cdot)$ 使得

$$P(X^{(i)} \in x_i + \Delta^{(i)} \mid X^{(j)} = z, \theta = s) \sim F_i(x_i + \Delta^{(i)})g_{ij}(z, s) \quad (1.6)$$

对所有的 $z, s \in [0, \infty)$ 及 $d_i \in (0, \infty]$ 一致成立, 且

$$\begin{aligned} 0 < a_* = a_*(T, g_{1,2}, g_{2,1}) &= \min \left\{ \inf_{z \in [0, \infty), s \in [0, T]} g_{ij}(z, s) : 1 \leq i \neq j \leq 2 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{z \in [0, \infty), s \in [0, T]} g_{ij}(z, s) : 1 \leq i \neq j \leq 2 \right\} = a^*(T, g_{1,2}, g_{2,1}) = a^* < \infty. \end{aligned} \quad (1.7)$$

注 1.1 (1) 在 (1.2)、(1.4) 和 (1.6) 中, 当 s 是 θ 的不可能值时, 则定义对应的条件概率取值为 1. 这时, 对所有的 $z \in [0, \infty)$, $h_i(s) = g(s) = g_{ij}(z, s) = 1, 1 \leq i \neq j \leq 2$.

(2) 若极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} g_{i,j}(z, s) = g_i(s)$ 对所有的 $s \in [0, \infty)$ 及 $1 \leq i \neq j \leq 2$ 一致存在, 则条件 2 可以被条件 1 和 3 推出而不必列出.

(3) 特别地, 对 $i = 1, 2$, 当 $d_i = \infty$ 时, 该相依结构即文献 [16] 中的结构.

第 5 节将给出 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \theta)$ 的一些具体的联合分布的类型, 它们满足条件 1–3, 如著名的 Sarmanov 联合分布 (从而包括 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) 联合分布)、Frank 联合分布和其他类型的联合分布, 以说明本文的二维时间相依结构具有较大的适用范围.

2 主要结果

本文的主要结果还要求下列与随机变量的相依性无关的一个条件:

条件 4 对 $i = 1, 2$, 存在两个常数 $x_0 = x_0(F_1, F_2) \in (0, \infty)$ 和 $C_4 = C_4(F_1, F_2, x_0) \in [0, \infty)$ 使得对所有的 $x_i \in [x_0, \infty)$ 和 $d_i \in (0, \infty]$, 有

$$\sup_{x_0 \leq x_i \leq y_i < \infty, i=1,2} F_i(y_i + \Delta^{(i)})(F_i(x_i + \Delta^{(i)}))^{-1} = 1 + C_4. \quad (2.1)$$

注 2.1 (1) 对 $i = 1, 2$, 若条件 1 和 4 满足, 则存在一个常数 $C_1 = C_1(F_1, F_2, x_0) \in [0, \infty)$ 使得对所有的 $s \in [0, \infty)$ 和 $d_i \in (0, \infty]$, 有

$$\sup_{x_i \in [x_0, \infty), i=1,2} P(X^{(i)} \in x_i + \Delta^{(i)} | \theta = s)(F_i(x_i + \Delta^{(i)}))^{-1} = 1 + C_1. \quad (2.2)$$

类似地, 若条件 2 及 4 满足, 则存在一个常数 $C_2 = C_2(F_1, F_2, x_0) \in [0, \infty)$ 使得对所有的 $s \in [0, \infty)$ 和 $d_i \in (0, \infty]$, 有

$$\sup_{x_i \geq x_0, i=1,2} P(\vec{X} \in \vec{x} + \vec{\Delta} | \theta = s) \left(\prod_{1 \leq i \leq 2} F_i(x_i + \Delta^{(i)}) \right)^{-1} = 1 + C_2. \quad (2.3)$$

进而, 当 $x_i \in [x_0, \infty)$ 时, 根据 (2.2) 和 (2.3) 知,

$$P(X^{(1)} \in dx_1, X^{(2)} \in dx_2 | \theta = s) \leq (1 + C_2) \prod_{i=1}^2 F_i(dx_i) \quad (2.4)$$

和

$$P(X^{(1)} \in dx_1, X^{(2)} \in dx_2, \theta \in ds) \leq (1 + C_2) \prod_{i=1}^3 F_i(dx_i). \quad (2.5)$$

最后, 若条件 3 和 4 满足, 则存在一个常数 $C_3 = C_3(F_1, F_2, x_0) \in [0, \infty)$ 使得对所有的 $s, z \in [0, \infty)$ 和 $d_i \in (0, \infty]$, 有

$$\sup_{x_i \in [x_0, \infty), 1 \leq i \neq j \leq 2} P(X^{(i)} \in x_i + \Delta^{(i)} | X^{(j)} = z, \theta = s)(F_i(x_i + \Delta^{(i)}))^{-1} = 1 + C_3. \quad (2.6)$$

(2) 在一维的场合, 条件 4 已经被使用过 (参见文献 [24, 引理 2.3 和推论 2.1] 和 [27, 命题 6.1]). 在文献 [34] 的术语中, 满足该条件的分布被称为是局部地几乎下降的, 或它的局部分布是几乎下降的. 对许多族 $\mathcal{S}_{\text{loc}}$ 中的分布而言, 它们的局部分布几乎下降且 $C_4 = 0$, 然而, 还有一些局部次指数分布并不几乎下降 (参见文献 [25, 推论 3.1]).

下文分别记随机向量 $\vec{D}_r(t)$ 和 $-\vec{U}(\vec{x}, t)$ 的联合分布为 $F_{\vec{D}_r(t)}$ 和 $F_{-\vec{U}(\vec{x}, t)}$, $t \in (0, \infty)$, $\vec{x} \in [\vec{0}, \infty)$. 因 $d_i = \infty$ 的结果属于文献 [25], 故这里只考虑 $d_i \in (0, \infty)$ 的情形.

定理 2.1 考虑上述满足条件 1-4 的二维风险模型. 对 $i = 1, 2$, 设 $F_i \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$, $d_i \in (0, \infty)$. 再对某个常数 $T \in (0, \infty)$ 和 (2.3) 中的常数 $C_2 \in [0, \infty)$, 设存在一个常数 $\beta \in [C_2, \infty) \setminus \{0\}$ 使得 $\text{E}e^{\beta N(T)} < \infty$, 则对所有的 $t \in (0, T]$, 一致地有

$$\begin{aligned} F_{\vec{D}_r(t)}(\vec{x} + \vec{\Delta}) &\sim \int_{0-}^t \int_{0-}^{t-u} (\text{P}(X^{(1)}e^{-r(u+v)} \in x_1 + \Delta^{(1)})\text{P}(X^{(2)}e^{-rv} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \\ &\quad + \text{P}(X^{(1)}e^{-ru} \in x_1 + \Delta^{(1)})\text{P}(X^{(2)}e^{-r(u+v)} \in x_2 + \Delta^{(2)}))\tilde{\lambda}_2(dv)\tilde{\lambda}_1(du) \\ &\quad + \int_{0-}^t \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)}e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)})\hat{\lambda}(du), \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里

$$\tilde{\lambda}_i(t) = \int_{0-}^t (1 + \lambda(t-u))h_i(u)G(du), \quad \hat{\lambda}(t) = \int_{0-}^t (1 + \lambda(t-u))g(u)G(du).$$

进而, 若过程 $\{C_i(t) : t \in [0, \infty)\}$ 、 $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ 和列 $\{X_k^{(i)} : k \geq 1\}$ 相互独立, 则

$$\text{P}(-\vec{U}(\vec{x}, t) \in \vec{\Delta}) = \text{P}(\vec{U}(\vec{x}, t) \in -\vec{\Delta}) \sim F_{\vec{D}_r(t)}(\vec{x} + e^{-rt}\vec{\Delta}) \quad (2.8)$$

对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立.

注 2.2 (1) 众所周知, 对某个常数 $T \in (0, \infty) = \Lambda$, 存在一个常数 $\beta_0 = \beta_0(T, \theta) \in (0, \infty)$ 使得 $\text{E}e^{\beta_0 N(T)} < \infty$. 从而, 若 $C_2 < \beta_0$, 则对所有的 $\beta \in (C_2, \beta_0)$, 条件 $\text{E}e^{\beta N(T)} < \infty$ 自动成立. 特别地, 若 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \theta)$ 服从带着参数 $-1 < \gamma_{12} < 1$ 的 3 维 Farlie-Gumbel-Morgenstern 联合分布, 则条件 1-4 满足, 其中 $C_2 = 0$; 此外, 对所有的 $\beta \in (0, \beta_0)$, $\text{E}e^{\beta N(T)} < \infty$, 详见下文的例 5.1.

(2) 使用文献 [26] 的方法, 对某个常数 $T \in \Lambda$ 和 $i = 1, 2$, 引入一个随机变量 θ_i^* 带着分布

$$\text{P}(\theta_i^* \in dy) = h_i(y)(\text{E}h_i(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}})^{-1}G(dy), \quad y \in [0, \infty), \quad (2.9)$$

这里 $h_i(\cdot)$ 是 (1.2) 中的函数. 设 $\{\theta_{i,k}^* : k \geq 1\}$ 是一个独立同分布的随机变量列, 具有形如 (2.9) 的共同分布, 则该到达时间间隔列 $\{\theta_{i,1}^*, \theta_k : k \geq 2\}$ 构成一个延迟更新计数过程 $\{N_i^*(t) : t \in [0, \infty)\}$, 其对应的更新函数 $\lambda_i^*(\cdot) = \text{E}N_i^*(\cdot)$ 使得

$$\tilde{\lambda}_i(dy) = \lambda_i^*(dy)\text{E}h_i(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}}, \quad y \in [0, \infty). \quad (2.10)$$

因此也称 $\tilde{\lambda}_i(\cdot)$ 是一个延迟更新函数.

类似地, 定义一个随机变量 θ_1^{**} , 其具有分布

$$\text{P}(\theta_1^{**} \in dy) = g(y)(\text{E}h_i(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}})^{-1}G(dy), \quad y \in [0, \infty); \quad (2.11)$$

再设 $\{\theta_k^{**} : k \geq 1\}$ 是一个独立同分布的随机变量列, 它们中每一个都与 θ_1^{**} 同分布, 这里函数 $g(\cdot)$ 被 (1.4) 所定义, 则该到达时间间隔 $\{\theta_1^{**}, \theta_k : k \geq 2\}$ 也有一个延迟更新计数过程 $\{N^{**}(t), t \in (0, \infty)\}$ 的延迟更新函数 $\lambda^{**}(\cdot) = \text{E}N^{**}(\cdot)$, 使得

$$\hat{\lambda}(dy) = \lambda^{**}(dy)\text{E}g(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}}, \quad y \in [0, \infty). \quad (2.12)$$

本文剩余的部分由 3 节构成. 第 4 节给出主要结果的证明, 为此在第 3 节给出 3 个引理, 而第 5 节给出 3 个满足条件 1-3 的联合分布的类型.

3 若干引理

第一个引理当 $d = \infty$ 时, 归于文献 [35, 推论 2.5]. 当 $d < \infty$ 时, 相应的证明类似于 $d = \infty$ 时的, 所以略去了其细节. 该引理证明了存在一个函数 $l(\cdot)$, 它不仅具有其他良好的性质, 还能使得 $l(x)x^{-1} \downarrow 0$. 该结论略为强化了文献 [20] 中的对应结果, 在那里只得到 $l(x)x^{-1} \rightarrow 0$. 前者在定理 2.1 的证明中起到了后者不能起到的关键作用.

引理 3.1 对某个常数 $d \in (0, \infty)$, 若 $F \in \mathcal{S}_{\Delta_d}$, 则存在一个 $[0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ 的函数 $l(\cdot)$ 使得 $l(x) \uparrow \infty, l(x)x^{-1} \downarrow 0$ 且

$$F(x + y + \Delta_d) \sim F(x + \Delta_d) \text{ 对所有的 } |y| \leq l(x) \text{ 一致成立.} \quad (3.1)$$

下列引理对于定理 2.1 的一致性结果的证明是至关重要的.

引理 3.2 一个分布 $F \in \mathcal{L}_{\text{loc}} \Leftrightarrow$ 对任意常数 $g \in (0, \infty)$ 和 $0 < a < b < \infty$,

$$\sup_{|y| \leq g, d, s \in (a, b]} |F(x + y + \Delta_d)(F(x + \Delta_s))^{-1} - ds^{-1}| \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

证明 只需要对 $a < 1 < b$ 及 $s = 1$ 证明必要性成立. 对任意整数 $n \geq 2$, 记

$$d_k = a + k(b - a)n^{-1}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

由文献 [30, 引理 2.1] 及族 $\mathcal{L}_{\text{loc}}$ 的定义知, 对所有的常数 $h \in (0, \infty)$, 有

$$\sup_{|y| \leq h, 1 \leq k \leq n} |F(x + y + \Delta_{d_k})(F(x + y + \Delta_1))^{-1} - d_k| \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

对任意常数 $d \in (a, b]$, 这里存在一个整数 $1 \leq k \leq n$ 使得 $d \in (d_{k-1}, d_k]$. 对任意常数 $0 < \varepsilon < 1$, 存在一个正整数 $n_0 = n_0(\varepsilon, a, b)$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\sqrt{1 - \varepsilon}d < d_{k-1} < d_k < \sqrt{1 + \varepsilon}d.$$

再根据 (3.3), 这里存在一个正常数 $x_0 = x_0(F, \varepsilon, h, a, b)$ 使得对所有的 $x \in [x_0, \infty)$ 和 $|y| \leq h$, 有

$$\begin{aligned} F(x + y + \Delta_d)(F(x + y + \Delta_1))^{-1} &\leq F(x + y + \Delta_{d_k})(F(x + y + \Delta_1))^{-1} \\ &\leq \sqrt{1 + \varepsilon}d_k \leq (1 + \varepsilon)d \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} F(x + y + \Delta_d)(F(x + y + \Delta_1))^{-1} &\geq F(x + y + \Delta_{d_k})(F(x + y + \Delta_1))^{-1} \\ &\geq \sqrt{1 - \varepsilon}d_{k-1} \geq (1 - \varepsilon)d. \end{aligned}$$

从而, 根据 ε 的任意性知 (3.2) 对 $s = 1$ 成立. $\square$

引理 3.3 考虑上述满足条件 1、3 和 4 的二维风险模型. 对 $i = 1, 2$, 若 $F_i \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$, 则对任意常数 $T \in (0, \infty)$ 和每个整数 $n \geq 1$, 下式对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, N(t) = n\right) \\ &\sim \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, N(t) = n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

证明 对该整数 n 和 $t \in (0, T]$, 记

$$\Omega_n(t) = \left\{ (s_1, \dots, s_n) \in [0, t]^n, t_n = \sum_{k=1}^n s_k \leq t \right\}.$$

首先, 使用数学归纳法, 证明对所有的 $(s_1, \dots, s_n) \in \Omega_n(t)$, $z_l \in [0, \infty)$, $1 \leq l \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 一致地有

$$\begin{aligned} I(x_1, n) &= \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq n \right) \\ &\sim \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

显然, 该命题对 $n = 1$ 成立. 设它对 $n = m - 1$ 成立, 则当 $n = m$ 时, 根据 $F_1 \in \mathcal{S}_{\text{loc}} \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}$ 和引理 3.1 知, 这里存在一个函数 $l_1(\cdot) : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \mapsto \mathbb{R}^+$ 使得 $l_1(x) \uparrow \infty$, $l_1(x)x^{-1} \downarrow 0$ 且对所有的 $|y| \leq e^{rT}l_1(x)$, 一致地有 $F_1(x_1 + y + \Delta^{(1)}) \sim F_1(x_1 + \Delta^{(1)})$. 再分解 $I(x_1, m)$ 如下:

$$\begin{aligned} I(x_1, m) &= \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \leq l_1(x_1) \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} > x_1 - l_1(x_1) \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, l_1(x_1) < \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \leq x_1 - l_1(x_1) \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, \right. \\ &\quad \left. 1 \leq l \leq m \right) \\ &=: I_1(x_1, m) + I_2(x_1, m) + I_3(x_1, m). \end{aligned} \quad (3.6)$$

对 $I_1(x_1, m)$, 根据 $F_1 \in \mathcal{S}_{\text{loc}} \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}$ (1.6) 和引理 3.2 知, 下式对所有的 $(s_1, \dots, s_m) \in \Omega_m(t)$, $z_l \geq 0$, $1 \leq l \leq n$ 和 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} I_1(x_1, m) &= \int_{0-}^{l_1(x_1)} \mathbb{P}(X_m^{(1)} \in e^{rt_m} x_1 - e^{rt_m} y + e^{rt_m} \Delta^{(1)} \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \\ &\quad \cdot \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in dy \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m-1 \right) \\ &\sim g_{1,2}(z_m, s_m) e^{rt_m} \int_{0-}^{l_1(x_1)} \mathbb{P}(X_m^{(1)} \in e^{rt_m} x_1 - e^{rt_m} y + \Delta^{(1)}) \\ &\quad \cdot \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in dy \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m-1 \right) \\ &\sim g_{1,2}(z_m, s_m) e^{rt_m} \mathbb{P}(X_m^{(1)} \in e^{rt_m} x_1 + \Delta^{(1)}) \\ &\quad \cdot \left(1 - \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} > l_1(x_1) \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m-1 \right) \right) \\ &\sim \mathbb{P}(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{m-1} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} > l_1(x_1) \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_k) \right) \\ & \sim P(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m). \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里最后两步分别由归纳假设和 (1.7) 得到.

同样可知下面两式对所有的 $(s_1, \dots, s_m) \in \Omega_m(t)$, $z_l \geq 0$, $1 \leq l \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} I_2(x_1, m) &= P\left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_m^{(1)} e^{-rt_m} \leq l_1(x_1) + d_1, \right. \\ & \quad \left. x_1 - l_1(x_1) < \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \leq x_1 + d_1 \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m\right) \\ &\leq \int_0^{l_1(x_1)+d_1} P\left(\sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 - y + \Delta^{(1)} \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m-1\right) \\ & \quad \cdot P(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in dy \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \\ &\sim \sum_{k=1}^{m-1} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_k) \end{aligned} \quad (3.8)$$

和

$$\begin{aligned} I_2(x_1, m) &\geq P\left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_m^{(1)} e^{-rt_m} \leq l_1(x_1), \right. \\ & \quad \left. x_1 - l_1(x_1) < \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \leq x_1 + d_1 \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m\right) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_m^{(1)} e^{-rt_m} \leq l_1(x_1) \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m\right) \\ &\sim \sum_{k=1}^{m-1} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_k). \end{aligned} \quad (3.9)$$

现在估计 $I_3(x_1, m)$. 分别定义两个正函数如下:

$$l_1^*(\cdot) = \max\{0, l_1(\cdot) - d_1\} \quad \text{和} \quad l_1^{**}(\cdot) = \max\{0, l_1^*(\cdot) - d_1\}.$$

根据归纳假设、 $F_1 \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$ 、(2.6)、(2.1) 和引理 3.2 可知, 当 x_1 充分大时, 下式对所有的 $(s_1, \dots, s_m) \in \Omega_m(t)$, $z_l \in [0, \infty)$, $1 \leq l \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} I_3(x_1, m) &= P\left(\sum_{k=1}^m X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, l_1(x_1) < \sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \leq x_1 - l_1(x_1), \right. \\ & \quad \left. l_1(x_1) < X_m^{(1)} e^{-rt_m} \leq x_1 - l_1(x_1) + d_1 \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m\right) \\ &\leq \int_{l_1^*(x_1)}^{x_1 - l_1^*(x_1)} P\left(\sum_{k=1}^{m-1} X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 - y + \Delta^{(1)} \mid X_l^{(2)} = z_l, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq m-1\right) \\ & \quad \cdot P(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in dy \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_1^*(x_1)}^{x_1 - l_1^*(x_1)} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 - y + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_l) \\
& \quad \cdot P(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in dy \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \\
& \leq (1 + C_3) \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_1^*(x_1)}^{x_1 - l_1^*(x_1)} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 - y + \Delta^{(1)}) \\
& \quad \cdot P(X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in dy \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \\
& = (1 + C_3) \sum_{k=1}^{m-1} P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} + X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in (l_1^*(x_1), x_1 - l_1^{**}(x_1)], \\
& \quad X_m^{(1)} e^{-rt_m} \in (l_1^*(x_1), x_1 - l_1^*(x_1)] \mid X_m^{(2)} = z_m, \theta_m = s_m) \\
& \leq (2 + C_3) e^{rt_m} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_1^{**}(x_1)}^{x_1 - l_1^{**}(x_1)} P(X_m^{(1)} \in e^{rt_m}(x_1 - y) + \Delta^{(1)}) P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in dy) \\
& \leq (2 + C_3)(1 + C_4) e^{rT} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{l_1^{**}(x_1)}^{x_1 - l_1^{**}(x_1)} P(X_m^{(1)} \in e^{rt_k}(x_1 - y) + \Delta^{(1)}) P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in dy) \\
& = (2 + C_3)(1 + C_4) e^{rT} \tilde{I}_3(x_1, m).
\end{aligned}$$

因 $x^{-1}l_1^{**}(x) \downarrow 0$, 故对每个 $a > 1$ 有 $al_1^{**}(x) \geq l_1^{**}(ax)$. 从而, 依次据 $F_1 \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$ 、条件 4、引理 3.2 和条件 3, 使用类似于文献 [20, 命题 2] 的证明方法知, 下式对所有的 $(s_1, \dots, s_m) \in \Omega_m(t)$, $z_l \in [0, \infty)$, $1 \leq l \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\tilde{I}_3(x_1, m) = o\left(\sum_{k=1}^m P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = y_k, \theta_k = s_k)\right). \quad (3.10)$$

结合 (3.6)–(3.10), 可知 (3.5) 对所有的 $(s_1, \dots, s_m) \in \Omega_m(t)$, $z_l \in [0, \infty)$, $1 \leq l \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 一致成立.

其次, 沿着相同的路线, 使用条件 3、4 和引理 3.2, 可以得到下列结果. 对每个整数 $1 \leq k \leq n$, 下式对所有的 $(s_1, \dots, s_n) \in \Omega_n(t)$, $y_k \in [0, \infty)$ 及 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned}
& P\left(\sum_{j=1}^n X_j^{(2)} e^{-rt_j} \in x_2 + \Delta^{(2)} \mid X_j^{(1)} = y_j, \theta_l = s_l, 1 \leq l \leq n\right) \\
& \sim \sum_{j=1}^n P(X_j^{(2)} e^{-rt_j} \in x_2 + \Delta^{(2)} \mid X_j^{(1)} = y_j, \theta_j = s_j).
\end{aligned} \quad (3.11)$$

最后, 对每个整数 $n \geq 1$, 根据 (3.5) 和 (3.11) 知, 对所有的 $t \in (0, T]$, 一致地有

$$\begin{aligned}
& P\left(\sum_{k=1}^n \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, N(t) = n\right) \\
& = P\left(\sum_{k=1}^n \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, \sigma_n \leq t, \sigma_{n+1} > t\right) \\
& = \int \cdots \int_{\Omega_n(t)} \int \cdots \int_{\{z_j e^{-rt_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}\}} P\left(\sum_{k=1}^n X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \theta_k = s_k, \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1 \leq k \leq n) \cdot \prod_{k=1}^n P(X_k^{(2)} \in dz_k \mid \theta_k = s_k) \bar{G}(t - t_n) \prod_{l=1}^n G(ds_l) \\
& \sim \sum_{j=1}^n \int \cdots \int_{\Omega_n(t)} \int \cdots \int_{\{z_j e^{-rt_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}\}} \sum_{k=1}^n P(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid X_k^{(2)} = z_k, \\
& \quad \theta_k = s_k) \prod_{k=1}^n P(X_k^{(2)} \in dz_k \mid \theta_k = s_k) \bar{G}(t - t_n) \prod_{l=1}^n G(ds_l) \\
& = \sum_{j=1}^n P\left(X_k^{(1)} e^{-rt_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, \sum_{k=1}^n X_k^{(2)} e^{-r\sigma_k} \in x_2 + \Delta^{(2)}, \sigma_n \leq t, \sigma_{n+1} > t\right) \\
& \sim \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int \cdots \int_{\Omega_n(t)} \int_{x_1 e^{rt_k}}^{(x_1 + d_1) e^{rt_k}} P(X_j^{(2)} e^{-rt_j} \in x_2 + \Delta^{(2)} \mid X_k^{(1)} = y_k, \theta_j = s_j) \\
& \quad \cdot P(X_k^{(1)} \in dy_k \mid \theta_k = s_k) \bar{G}(t - t_n) \prod_{l=1}^n G(ds_l) \\
& = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, N(t) = n).
\end{aligned}$$

从而, 完成了该引理的证明. $\square$

4 定理 2.1 的证明

对充分大的向量 $\vec{x}$ 和任意整数 $N \geq 1$, 分割 $F_{\vec{D}_r(t)}(\vec{x} + \vec{\Delta})$ 如下:

$$\begin{aligned}
F_{\vec{D}_r(t)}(\vec{x} + \vec{\Delta}) &= \left(\sum_{n=1}^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \right) P\left(\sum_{k=1}^n \vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, N(t) = n \right) \\
&=: J_1(\vec{x}, t) + J_2(\vec{x}, t).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

首先处理 $J_1(\vec{x}, t)$. 根据引理 3.3 可知, 下式对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned}
J_1(\vec{x}, t) &\sim \left(\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \right) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, N(t) = n) \\
&=: J_{11}(\vec{x}, t) - J_{12}(\vec{x}, t).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

定义 $\sum_{k=1}^0 = \sum_{j=1}^0 = 0$. 使用 Fubini 定理, 分割 $J_{11}(\vec{x}, t)$ 如下:

$$\begin{aligned}
J_{11}(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, N(t) = n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{n=j}^{\infty} P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, N(t) = n) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(\vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, N(t) = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, \sigma_k \leq t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-1} P(X_k^{(1)} e^{-r\sigma_k} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r\sigma_j} \in x_2 + \Delta^{(2)}, \sigma_j \leq t) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} P(\vec{X}_k e^{-r\sigma_k} \in \vec{x} + \vec{\Delta}, \sigma_k \leq t) \\
& =: \sum_{i=1}^3 J_{11i}(\vec{x}, t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

依次处理 $J_{111}(\vec{x}, t)$ – $J_{113}(\vec{x}, t)$. 记 $c_1 = Eh_1(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}}Eh_2(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}}$. 因 $k \geq j+1$, $j \in \mathbb{N}^+$, 故 $\sigma_{k-1} - \sigma_j + \theta_{1,k}^*$ 、 $\sigma_{k-j-1} + \theta_{1,k-j}^*$ 与 $\theta_{1,1}^* + \sigma_{k-j} - \theta_1$ 是同分布的随机变量, 其中, $\theta_{1,l}^*$ ($l = 1, k-j, k$) 的定义见 (2.9) 下方. 记

$$\Omega_4(t) = \{(u, v, w, z) : u + v + w + z \leq t \text{ 且 } u, v, w, z \geq 0\}.$$

再根据 (1.2)、(2.9) 和 (2.10), 下式对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned}
J_{111}(\vec{x}, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \int \cdots \int_{\Omega_4(t)} P(X_k^{(1)} e^{-r(u+v+w+z)} \in x_1 + \Delta^{(1)} \mid \theta_k = u) P(X_j^{(2)} e^{-r(w+z)} \\
&\quad \in x_2 + \Delta^{(2)} \mid \theta_j = w) P(\sigma_{j-1} \in dz) P(\theta_j \in dw) P(\sigma_{k-1} - \sigma_j \in dv) P(\theta_k \in du) \\
&\sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \int \cdots \int_{\Omega_4(t)} P(X_k^{(1)} e^{-r(u+v+w+z)} \in x_1 + \Delta^{(1)}) h_1(u) P(X_j^{(2)} e^{-r(w+z)} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \\
&\quad \cdot h_2(w) P(\sigma_{j-1} \in dz) P(\theta_j \in dw) P(\sigma_{k-1} - \sigma_j \in dv) P(\theta_k \in du) \\
&= c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \int \cdots \int_{\Omega_4(t)} P(X_k^{(1)} e^{-r(u+v+w+z)} \in x_1 + \Delta^{(1)}) P(X_j^{(2)} e^{-r(w+z)} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \\
&\quad \cdot P(\sigma_{j-1} \in dz) P(\theta_{2,j}^* \in dw) P(\sigma_{k-1} - \sigma_j \in dv) P(\theta_{1,k}^* \in du) \\
&= c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} P(X_k^{(1)} e^{-r(\sigma_{j-1} + \theta_{2,j}^* + \sigma_{k-1} - \sigma_j + \theta_{1,k}^*)} \in x_1 + \Delta^{(1)}, X_j^{(2)} e^{-r(\sigma_{j-1} + \theta_{2,j}^*)} \in x_2 + \Delta^{(2)}, \\
&\quad \sigma_{j-1} + \theta_{2,j}^* + \sigma_{k-1} - \sigma_j + \theta_{1,k}^* \leq t) \\
&= c_1 \int_0^t \int_0^{t-u} P(X^{(1)} e^{-r(u+v)} \in x_1 + \Delta^{(1)}) P(X^{(2)} e^{-rv} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \\
&\quad \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} P(\sigma_{k-1} - \sigma_j + \theta_{1,k}^* \in du) \right) P(\sigma_{j-1} + \theta_{2,j}^* \in dv) \\
&= c_1 \int_0^t \int_0^{t-u} P(X^{(1)} e^{-r(u+v)} \in x_1 + \Delta^{(1)}) P(X^{(2)} e^{-rv} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \\
&\quad \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} P(\sigma_{l-1} + \theta_{1,l}^* \in du) \right) P(\sigma_{j-1} + \theta_{2,j}^* \in dv) \\
&= \int_0^t \int_0^{t-u} P(X^{(1)} e^{-r(u+v)} \in x_1 + \Delta^{(1)}) P(X^{(2)} e^{-rv} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \tilde{\lambda}_2(dv) \tilde{\lambda}_1(du),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里 $\tilde{\lambda}_i(\cdot)$ ($i = 1, 2$) 的定义见 (2.10) 的下方. 类似地, 下式也对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$J_{112}(\vec{x}, t) \sim \int_0^t \int_0^{t-u} P(X^{(1)} e^{-ru} \in x_1 + \Delta^{(1)}) P(X^{(2)} e^{-r(u+v)} \in x_2 + \Delta^{(2)}) \tilde{\lambda}_2(dv) \tilde{\lambda}_1(du). \tag{4.5}$$

对 $J_{113}(\vec{x}, t)$, 记 $c_2 = \text{E}g(\theta)\mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}}$. 根据条件 2 和 (2.11), 下式对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} J_{113}(\vec{x}, t) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-u} \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) g(u) \text{P}(\sigma_{k-1} \in dv) G(du) \\ &= c_2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) \text{P}(\sigma_{k-1} + \theta_{1,k}^{**} \in du) \\ &= \int_0^t \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) \hat{\lambda}(du). \end{aligned} \quad (4.6)$$

现在处理 $J_{12}(\vec{x}, t)$. 为此, 记

$$\Omega_n(t) = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i \leq t \text{ 且 } u_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \right\},$$

则有

$$\begin{aligned} J_{12}(\vec{x}, t) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{1 \leq k, j \leq n} \int \cdots \int_{\Omega_n(t)} \text{P}(X_k^{(1)} e^{-r \sum_{i=1}^k u_i} \in x_1 + \Delta^{(1)}, \\ &\quad X_j^{(2)} e^{-r \sum_{i=1}^j u_i} \in x_2 + \Delta^{(2)} \mid \theta_k = u_k, \theta_j = u_j) \text{P}(N(t - u_1) > n - 1) \prod_{i=1}^n G(du_i) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{1 \leq k, j \leq n} \int \cdots \int_{\Omega_n(t)} \text{P}_{k,j}(\vec{x}, \vec{u}) \text{P}(N(t - u_1) > n - 1) \prod_{i=1}^n G(du_i). \end{aligned} \quad (4.7)$$

对 $\text{P}_{k,j}(\vec{x}, \vec{u})$, 考虑 $k = j$ 和 $k \neq j$ 两种情形. 在上述两种情形中, 分别根据 (2.3) 或 (2.6), 再根据条件 4 和引理 3.2, 可知下式对所有的 $u_i \in [0, t]$, $1 \leq i \leq n$ 及 $t \in (0, T]$ 均一致成立:

$$\text{P}_{k,j}(\vec{x}, \vec{u}) = O(\text{P}(X_k^{(1)} e^{-ru_1} \in x_1 + \Delta^{(1)}) \text{P}(X_j^{(2)} e^{-ru_1} \in x_2 + \Delta^{(2)})). \quad (4.8)$$

根据 (4.7)、(4.8)、(2.11) 和 (2.12), 下式对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立:

$$\begin{aligned} J_{12}(\vec{x}, t) &= O\left(\int_0^t \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) G(du) \sum_{n=N+1}^{\infty} n^2 \text{P}(N(T) > n - 1)\right) \\ &= O\left(\int_0^t \prod_{i=1}^2 \text{P}(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) \hat{\lambda}(du) \sum_{n=N+1}^{\infty} n^2 \text{P}(N(T) > n - 1)\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

而后, 结合 (4.6)、(4.9) 和 $\text{E}N^3(T) < \infty$ 知,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup \sup_{t \in (0, T]} J_{12}(\vec{x}, t) (J_{113}(\vec{x}, t))^{-1} = 0. \quad (4.10)$$

其次, 处理 $J_2(\vec{x}, t)$. 根据文献 [20, 命题 4] 知, 对任意常数 $\varepsilon \in (0, \infty)$ 、所有的 $n \geq 1$ 和 $x \in (0, \infty)$, 存在一个常数 $C = C(F_1, F_2, \varepsilon) \in (0, \infty)$ 使得

$$F_i^{*n}(x + \Delta^{(i)}) \leq C(1 + \varepsilon)^n F_i(x + \Delta^{(i)}) = C e^{\alpha n} F_i(x + \Delta^{(i)}), \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

取 ε 充分小使得 $\alpha = e^{\ln(1+\varepsilon)} < \beta$. 依次根据 (2.5)、条件 4、(4.11) 和引理 3.2 知,

$$\begin{aligned}
J_2(x, t) &\leq (1 + C_2) \sum_{n=N+1}^{\infty} \int \cdots \int_{0 \leq s_k \leq t - \sum_{i=1}^{k-1} s_i, 1 \leq k \leq n} \int \cdots \int_{\sum_{k=1}^n u_k e^{-r \sum_{i=1}^k s_i} \in x_1 + \Delta^{(1)}} \int \cdots \int_{\sum_{j=2}^n v_j e^{-r \sum_{i=1}^j s_i} \in x_2 + \Delta^{(2)}} \\
&\quad \prod_{k=1}^n P(X_k^{(1)} \in du_k) P(X_k^{(2)} \in dv_k) P(\theta_k \in ds_k) \\
&\leq (1 + C_2) \sum_{n=N+1}^{\infty} \int \cdots \int_{0 \leq s_k \leq t - \sum_{i=1}^{k-1} s_i, 1 \leq k \leq n} \int \cdots \int_{\sum_{k=2}^n u_k e^{-r \sum_{i=1}^k s_i} \in x_1 + \Delta^{(1)}} \\
&\quad P\left(X_1^{(1)} e^{-rs_1} \in x_1 - \sum_{k=2}^n u_k e^{-r \sum_{i=1}^k s_i} + \Delta^{(1)}\right) \int \cdots \int_{\sum_{j=2}^n v_j e^{-r \sum_{i=2}^j s_i} \in x_2 + \Delta^{(2)}} \\
&\quad P\left(X_1^{(2)} e^{-rs_1} \in x_2 - \sum_{k=2}^n v_k e^{-r \sum_{i=1}^k s_i} + \Delta^{(2)}\right) \prod_{k=1}^n F_1(du_k) F_2(dv_k) G(ds_k) \\
&= O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \int \cdots \int_{0 \leq s_k \leq t - \sum_{i=1}^{k-1} s_i, 1 \leq k \leq n} \int \cdots \int_{\sum_{k=2}^n u_k e^{-r \sum_{i=1}^k s_i} \in x_1 + \Delta^{(1)}} \right. \\
&\quad P\left(X_1^{(1)} e^{-rs_1} \in x_1 - \sum_{k=2}^n u_k e^{-r s_1} + \Delta^{(1)}\right) \int \cdots \int_{\sum_{j=2}^n v_j e^{-r \sum_{i=2}^j s_i} \in x_2 + \Delta^{(2)}} \\
&\quad \left. P\left(X_1^{(2)} e^{-rs_1} \in x_2 - \sum_{k=2}^n v_k e^{-r s_1} + \Delta^{(2)}\right) \prod_{k=2}^n F_1(du_k) F_2(dv_k) G(ds_k)\right) \\
&= O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{0-}^t F_1^{*n}((x_1 + \Delta^{(1)})e^{rs}) F_2^{*n}((x_2 + \Delta^{(2)})e^{rs}) G(ds) P(N(T) \geq n-1)\right) \\
&= O\left(\int_{0-}^t F_1((x_1 + \Delta^{(1)})e^{rs}) F_2((x_2 + \Delta^{(2)})e^{rs}) G(ds) \sum_{n=N+1}^{\infty} (1+\varepsilon)^n P(N(T) \geq n-1)\right) \\
&= O\left(\int_{0-}^t \prod_{i=1}^2 P(X_k^{(i)} e^{-ru} \in x_i + \Delta^{(i)}) \hat{\lambda}(du) E e^{\beta N(T)} \mathbf{1}_{\{N(T) \geq N-1\}}\right).
\end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup \sup_{t \in (0, T]} J_2(\vec{x}, t) (J_{113}(\vec{x}, t))^{-1} = 0. \quad (4.12)$$

结合 (4.1)、(4.4)–(4.6)、(4.10) 和 (4.12), 知道 (2.7) 对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立.

最后证 (2.8) 对所有的 $t \in (0, T]$ 一致成立. 由

$$F_{-\vec{U}(\vec{x}, t)}(\vec{\Delta}) = P(\vec{U}(\vec{x}, t) \in -\vec{\Delta}) = F_{\vec{D}_r(t)}\left(\vec{x} + \int_{0-}^t e^{-ry} \vec{C}(dy) + e^{-rt} \vec{\Delta}\right),$$

(2.8), $\vec{0} \leq \int_{0-}^t e^{-ry} \vec{C}(dy) \leq \int_{0-}^T e^{-ry} \vec{C}(dy) < \vec{\infty}$ 和 $F_1, F_2 \in \mathcal{S}_{\text{loc}}$ 立得定理成立.

5 若干满足条件 1–3 的联合分布类型

随机向量 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \theta)$ 如下的 3 类联合分布 (或联结 (copula)) 满足条件 1–3. 为简洁起见, 略去

了它们烦琐的证明.

例 5.1 设 $(X^{(1)}, X^{(2)}, \theta)$ 服从 3 维 Sarmanov 联合分布:

$$\begin{aligned} P(X^{(1)} \in dy, X^{(2)} \in dz, \theta \in ds) \\ = (1 + \gamma_{12}\phi_1(y)\phi_2(z) + \gamma_{13}\phi_1(y)\phi_3(s) + \gamma_{23}\phi_2(z)\phi_3(s))F_1(dy)F_2(dz)G(ds), \end{aligned}$$

这里 γ_{ij} 是常数, 而 $\phi_i(\cdot)$ 是连续函数, $1 \leq i < j \leq 3$, 它们满足条件

$$\inf_{y, z, s \in \mathbb{R}} (1 + \gamma_{12}\phi_1(y)\phi_2(z) + \gamma_{13}\phi_1(y)\phi_3(s) + \gamma_{23}\phi_2(z)\phi_3(s)) = \inf_{y, z, s \in \mathbb{R}} J(y, z, s) > 0, \quad (5.1)$$

$$E\phi_1(X^{(1)}) = E\phi_2(X^{(2)}) = E\phi_3(\theta) = 0 \quad (5.2)$$

和

$$\lim \phi_i(x) = \phi_i. \quad (5.3)$$

根据 (5.2), 易知这里存在 3 个常数 y_0, z_0 和 s_0 使得 $\phi_1(y_0) = \phi_2(z_0) = \phi_3(s_0) = 0$.

特别地, 对 $1 \leq i \leq 3$, 若 $\phi_i(x) = 1 - 2F_i(x)$, 其中 x 属于下列支撑:

$$D_{X^{(i)}} = \{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, P(X^{(i)} \in (x - \delta, x + \delta)) > 0, \text{ 对所有的 } \delta \in \mathbb{R}^+\},$$

则该联合分布被称为一个 3 维 FGM 联合分布. 显然, 这时有 $\phi_i = -1$. 进而, 因线性函数的极值出现在其边界点上, 故

$$\inf_{y \geq y_0, z \geq z_0, s \geq s_0} J(y, z, s) > 0 \Leftrightarrow 1 + \gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{23} > 0 \quad \text{且} \quad 1 + \gamma_{ij} > 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

此外, 也可以取 $\phi_i(y) = e^{-y} - Ee^{-X_i^{(i)}}$ 或 $\phi_i(y) = y^p - E(X_i^{(i)})^p$, $y \in D_{X_i^{(i)}}$, $1 \leq i \leq 3$, 以构成另一个 FGM 联合分布等.

例 5.2 3 维 Frank 联合分布使用下列 copula 定义:

$$C(u, v, w) = -\gamma^{-1} \ln(1 + (e^{-\gamma u} - 1)(e^{-\gamma v} - 1)(e^{-\gamma w} - 1)(e^{-\gamma} - 1)^{-2}), \quad u, v, w \in [0, 1],$$

这里 γ 是一个正常数. 而联合分布为

$$F(x, y, z) = C(F(x), F(y), F(z)), \quad x, y, z \in (-\infty, \infty).$$

例 5.3 回顾乘积 copula $\Pi(u, v) = uv$, $u, v \in [0, 1]$ 和二元 Frank copula

$$C_\gamma(\kappa, w) = -\gamma^{-1} \ln(1 + (e^{-\gamma \kappa} - 1)(e^{-\gamma w} - 1)(e^{-\gamma} - 1)^{-1}), \quad \kappa, w \in [0, 1],$$

这里常数 $\gamma \in (0, \infty)$. 然后, 构造一个新的三元函数如下:

$$C(u, v, w) = C_\gamma(\Pi(u, v), w) = -\gamma^{-1} \ln(1 + (e^{-\gamma uv} - 1)(e^{-\gamma w} - 1)(e^{-\gamma} - 1)^{-1}), \quad u, v, w \in [0, 1].$$

下面证明该函数 $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ 也是一个三元 copula.

首先, 易证 $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ 满足文献 [36, 条件 (2.10.4a) 和 (2.10.4b)], 即

$$C(0, v, w) = C(u, 0, w) = C(u, v, 0) = 0,$$

$$C(u, 1, 1) = u, \quad C(1, v, 1) = v, \quad C(1, 1, w) = w.$$

其次, 经过一些简化后, 该三元函数在域 $B = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \times [w_1, w_2]$ 上的值为

$$\begin{aligned} V_C(B) &= -\gamma^{-1} \ln \left(1 + \frac{Q_1(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)}{Q_2(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)} \right) \\ &= -\gamma^{-1} \ln \left(1 + \frac{Q_1}{Q_2} \right), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} Q_1 &= (e^{-\gamma} - 1)^3 (e^{-\gamma w_2} - e^{-\gamma w_1}) (l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22}) \\ &\quad + (e^{-\gamma} - 1)^2 (e^{-\gamma w_2} - e^{-\gamma w_1}) (e^{-\gamma w_1} + e^{-\gamma w_2} - 2) (l_{11} l_{22} - l_{12} l_{21}) \\ &\quad + (e^{-\gamma} - 1) (e^{-\gamma w_1} - 1) (e^{-\gamma w_2} - 1) (e^{-\gamma w_2} - e^{-\gamma w_1}) l_{11} l_{12} l_{21} l_{22} (l_{21}^{-1} - l_{22}^{-1} - l_{11}^{-1} + l_{12}^{-1}), \\ Q_2 &= \prod_{k=1}^2 ((e^{-\gamma} - 1) + l_{kk} (e^{-\gamma w_1} - 1)) \prod_{1 \leq i \neq j \leq 2} ((e^{-\gamma} - 1) + l_{ij} (e^{-\gamma w_2} - 1)), \end{aligned}$$

而 $l_{ij} = e^{-\gamma u_i v_j} - 1$, $1 \leq i, j \leq 2$. 又根据 $l_{12} l_{21} > l_{11} l_{22}$ 和 $(1 + l_{11})(1 + l_{22}) < (1 + l_{12})(1 + l_{21})$ 知,

$$\begin{aligned} Q_1 &\leq (e^{-\gamma} - 1)^3 (e^{-\gamma w_2} - e^{-\gamma w_1}) (l_{11} - l_{12} - l_{21} + l_{22} + 2l_{11} l_{22} - 2l_{12} l_{21} \\ &\quad + l_{11} l_{12} l_{21} l_{22} (l_{21}^{-1} - l_{22}^{-1} - l_{11}^{-1} + l_{12}^{-1})) \\ &= (e^{-\gamma} - 1)^3 (e^{-\gamma w_2} - e^{-\gamma w_1}) ((1 - l_{12} l_{21})(1 + l_{11})(1 + l_{22}) - (1 - l_{11} l_{22})(1 + l_{12})(1 + l_{21})) \\ &< 0 \end{aligned}$$

及 $Q_2 > 0$. 这样, 再由 $\gamma > 0$ 知 $V_C(B) \geq 0$, 即文献 [27, 条件 (2.10.4c)] 也满足. 最后, 根据文献 [36, 定义 2.10.6] 知函数 $C(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是一个三元 copula.

我们称上述构造方法为嵌入法. 不难想象, 通过该法还可以构造许多合乎要求的联合分布, 例如, 也可以把二元乘积 copula 嵌入到二元 FGM copula 中去.

最后指出, 文献 [16, 18] 给出了例 5.1 的全局分布结果, 文献 [18] 给出了例 5.2 的全局分布结果, 文献 [16] 给出了基于全局分布的嵌入法.

致谢 非常感谢两位审稿人和编委的宝贵意见, 非常感谢英国 Lancaster University 的 Dmitry Korshunov 教授和常熟理工学院的崔召磊博士的有益讨论.

参考文献

- 1 Konstantinides D, Tang Q, Tsitsiashvili G. Estimates for the ruin probability in the classical risk model with constant interest force in the presence of heavy tails. *Insurance Math Econom*, 2002, 31: 447–460
- 2 Hao X, Tang Q. A uniform asymptotic estimate for discounted aggregate claims with subexponential tails. *Insurance Math Econom*, 2008, 43: 116–120
- 3 Kalashnikov V, Konstantinides D. Ruin under interest force and subexponential claims: A simple treatment. *Insurance Math Econom*, 2000, 27: 145–149
- 4 Tang Q. The finite-time ruin probability of the compound Poisson model with constant interest force. *J Appl Probab*, 2005, 42: 608–619
- 5 Tang Q. Heavy tails of discounted aggregate claims in the continuous-time renewal model. *J Appl Probab*, 2007, 44: 285–294
- 6 Chen Y, Ng K W. The ruin probability of the renewal model with constant interest force and negatively dependent heavy-tailed claims. *Insurance Math Econom*, 2007, 40: 415–423

- 7 Liu X, Gao Q, Wang Y. A note on a dependent risk model with constant interest rate. *Statist Probab Lett*, 2012, 82: 707–712
- 8 Wang K, Wang Y, Gao Q. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate. *Methodol Comput Appl Probab*, 2013, 15: 109–124
- 9 Albrecher H, Teugels J L. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *J Appl Probab*, 2006, 43: 257–273
- 10 Asimit A V, Badescu A L. Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model. *Scand Actuar J*, 2010, 2010: 93–104
- 11 Badescu A L, Cheung E C K, Landriault D. Dependent risk models with bivariate phase-type distributions. *J Appl Probab*, 2009, 46: 113–131
- 12 Li J, Tang Q, Wu R. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model. *Adv in Appl Probab*, 2010, 42: 1126–1146
- 13 Chan W, Yang H, Zhang L. Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. *Insurance Math Econom*, 2003, 32: 345–358
- 14 Chen Y, Wang Y, Wang K. Asymptotic results for ruin probability of a two-dimensional renewal risk model. *Stoch Anal Appl*, 2013, 31: 80–91
- 15 Chen Y, Yuen K C, Ng K W. Asymptotics for the ruin probabilities of a two-dimensional renewal risk model with heavy-tailed claims. *Appl Stoch Models Bus Ind*, 2011, 27: 290–300
- 16 Jiang T, Wang Y, Chen Y, et al. Uniform asymptotic estimate for finite-time ruin probabilities of a time-dependent bidimensional renewal model. *Insurance Math Econom*, 2015, 64: 45–53
- 17 Li J, Liu Z, Tang Q. On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model. *Insurance Math Econom*, 2007, 41: 185–195
- 18 Cheng D, Yu C. Uniform asymptotics for the ruin probabilities in a bidimensional renewal risk model with strongly subexponential claims. *Stochastics*, 2019, 91: 643–656
- 19 Wang Y, Yang Y, Wang K, et al. Some new equivalent conditions on asymptotics and local asymptotics for random sums and their applications. *Insurance Math Econom*, 2007, 40: 256–266
- 20 Asmussen S, Foss S, Korshunov D. Asymptotics for sums of random variables with local subexponential behaviour. *J Theoret Probab*, 2003, 16: 489–518
- 21 Borovkov A A, Borovkov K A. *Asymptotic Analysis of Random Walks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
- 22 Chen G, Wang Y, Cheng F. The uniform local asymptotics of the overshoot of a random walk with heavy-tailed increments. *Stoch Models*, 2009, 25: 508–521
- 23 Denisov D, Shneer V. Local asymptotics of the cycle maximum of a heavy-tailed random walk. *Adv in Appl Probab*, 2007, 39: 221–244
- 24 Denisov D, Dieker A B, Shneer V. Large deviations for random walks under subexponentiality: The big-jump domain. *Ann Probab*, 2008, 36: 1946–1991
- 25 Jiang T, Wang Y, Cui Z, et al. On the almost decrease of a subexponential density. *Statist Probab Lett*, 2019, 153: 71–79
- 26 Lin J. Second order subexponential distributions with finite mean and their applications to subordinated distributions. *J Theoret Probab*, 2012, 25: 834–853
- 27 Shneer V V. Estimates for interval probabilities of the sums of random variables with locally subexponential distributions. *Sib Math J*, 2006, 47: 779–786
- 28 Wang Y, Cheng D, Wang K. The closure of a local subexponential distribution class under convolution roots, with applications to the compound Poisson process. *J Appl Probab*, 2005, 42: 1194–1203
- 29 Wang Y, Wang K. Random walks with non-convolution equivalent increments and their applications. *J Math Anal Appl*, 2011, 374: 88–105
- 30 Wang Y, Xu H, Cheng D, et al. The local asymptotic estimation for the supremum of a random walk with generalized strong subexponential summands. *Statist Papers*, 2018, 59: 99–126
- 31 Watanabe T, Yamamuro K. Ratio of the tail of an infinitely divisible distribution on the line to that of its Lévy measure. *Electron J Probab*, 2010, 15: 44–74
- 32 Watanabe T, Yamamuro K. Two non-closure properties on the class of subexponential densities. *J Theoret Probab*, 2017, 30: 1059–1075
- 33 Yang Y, Leipus R, Šiaulys J. Local precise large deviations for sums of random variables with O -regularly varying densities. *Statist Probab Lett*, 2010, 80: 1559–1567
- 34 Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987
- 35 Cline D B H, Samorodnitsky G. Subexponentiality of the product of independent random variables. *Stochastic Process*

Appl, 1994, 49: 75–98

36 Nelsen R B. An introduction to copulas. Technometrics, 2000, 42: 317

The uniform local asymptotics of the bidimensional discounted aggregate claim process

Tao Jiang, Ting Chen, Hui Xu & Yuebao Wang

Abstract In this paper, we consider a bidimensional risk model with constant interest force, in which the claim size vector with the local subexponential marginal distributions and its inter-arrival time are subject to a local time-dependence structure. Moreover, we give some types of concrete joint distributions following the structure. Then we obtain the uniform local asymptotic expression of the discounted aggregate claim process and the total net loss process in the model.

Keywords bidimensional risk model, discounted aggregate claim process, total net loss process, local time-dependence, uniform local asymptotics, local subexponential distribution

MSC(2010) 62H05, 62E20, 62P05

doi: 10.1360/SSM-2020-0002