流形上的 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题

贺妍, 涂强*, 张剑楠

湖北大学数学与统计学学院应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062

E-mail: helenai@hubu.edu.cn, qiangtu@hubu.edu.cn, 229082210@qq.com

收稿日期: 2020-03-06; 接受日期: 2020-07-25; 网络出版日期: 2020-12-28; * 通信作者
应用数学湖北省重点实验室开放基金 (批准号: HBAM201904) 资助项目

摘要 本文考虑紧致具有全脐边界的 Riemann 流形上 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题; 通过对 k -Hessian 方程的解做零阶、一阶、二阶估计和使用连续性方法, 得到流形上 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题的存在性结果.

关键词 k -Hessian 先验估计 全脐边界

MSC (2020) 主题分类 53C21, 35J60

1 引言

设 (M, g) 是 n 维紧致的带边 Riemann 流形. 用 $\sigma_k(D^2u)$ 表示 $g^{-1} \cdot D^2u$ 特征值的 k 次对称多项式, 即

$$\sigma_k(D^2u) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ 表示 $g^{-1} \cdot D^2u$ 的特征值. 本文考虑 (M, g) 上下列方程的解:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x), & x \in M, \\ u_\nu = -u + \phi(x), & x \in \partial M, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $f(x) \in C^\infty(M)$, ν 是边界 ∂M 的单位外法向, $\phi(x)$ 为边界上的给定光滑函数.

首先回顾 k -Hessian 方程的历史. 当 $k = n$ 时, 称相应的 k -Hessian 方程为 Monge-Ampère 方程. 考虑如下 Monge-Ampère 方程的 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} \det(D^2u) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

英文引用格式: He Y, Tu Q, Zhang J N. The Neumann boundary problem for k -Hessian equations on compact manifolds (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 155–176, doi: 10.1360/SSM-2020-0067

其中 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界开区域. 为了使方程是椭圆的, 我们要求矩阵 u_{ij} 是正定的. 首先考虑一种特殊情形: 同时假设 f 足够光滑、 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界凸区域且边界 $\partial\Omega$ 是一致凸的. 在这种情形下, 对于这类方程 Dirichlet 问题先验估计的一系列工作由 Caffarelli 等^[1]、Ivchikina^[2]、Evans^[3] 和 Krylov^[4,5] 完成. 在此基础之上, 应用连续性方法可以得到整体光滑解的存在性. 文献 [6] 得到了下列方程 Dirichlet 问题解的存在性和正则性: $\sigma_k(D^2u) = f(x)$, $x \in \Omega$; $u = \phi$, $x \in \partial\Omega$, 其中 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界一致凸区域. 而文献 [7] 考虑了方程 $\det(D^2u) = f(x, u, Du)$ ($x \in \Omega \subset \mathbb{S}^n$) 的 Dirichlet 问题, 并用“下解存在”的条件取代了文献 [6] 中的“边界一致凸”条件. 1995 年, 文献 [8] 证明了 k -Hessian 商方程 Dirichlet 问题解的存在性和正则性, $\frac{\sigma_k(D^2u)}{\sigma_l(D^2u)} = f(x)$, $x \in \Omega$, 其中 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑有界一致凸区域. 2014 年, Jiang 等^[9] 考虑了方程

$$\begin{aligned} \det(D^2u - A(x, Du)) &= f(x, Du), \quad x \in \Omega, \\ u &= \phi(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

并在下解存在的假设下证明了 Dirichlet 边值问题解的存在性和正则性. 现在来看 Riemann 流形上 k -Hessian 方程 Dirichlet 问题的相关结果. Guan^[10] 考虑了 Riemann 流形上列方程的 Dirichlet 问题: $\sigma_k(D^2u + a\text{g}) = f(x, u, Du)$, 其中 a 是常数. 此外, 2014 年, Guan^[11] 研究了方程 $\sigma_k(D^2u + A) = f(x)$ Dirichlet 问题解的存在性和正则性结果, 其中 $A = A(x)$ 为光滑的 $(0, 2)$ 型张量. 随后, Guan 和 Jiao^[12] 把上述结论推广到了 $A = A(x, u)$ 的情形.

关于 k -Hessian 方程解的内部估计显得更为困难. 由于 Urbas^[13] 对于 $k \geq 3$ 的 k -Hessian 方程的内部估计构造了一个反例, 在进行内部估计时主要考虑的对象是 2-Hessian 方程. Warren 和 Yuan^[14] 在 $n = 3$ 的情形下对 $\mathbb{R}^n$ 上有界开区域 Ω 上的方程 $\sigma_2(D^2u) = 1$ 的解建立了内部 C^2 估计. 随后, McGonagle 等^[15] 在 $n \geq 3$ 、 $D^2u \geq [\delta - \sqrt{2/[n(n-1)]}]I$ 的条件下得到了内部估计. Qiu^[16] 在维数 n 为 3 的情形下, 对方程 $\sigma_2(D^2u) = f(x, u, Du)$ 的解得到了内部 C^2 估计. Guan 和 Qiu^[17] 在 $\sigma_3(D^2u) > -A$ 的条件下建立了 2-Hessian 方程 $\sigma_2(D^2u) = f(x, u, Du)$ 解的内部 C^2 估计.

接下来, 考虑 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题. k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题最早的结果由 Lions 等^[18] 完成. 在文献 [18] 中, 他们在一致凸的区域上得到了 Monge-Ampère 方程 Neumann 边值问题解的存在性和正则性. 最近, Ma 和 Qiu^[19] 关于 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题也得到了解的存在性结果, 从而证明了 Trudinger^[20] 提出的猜想. 随后, Chen 和 Zhang^[21] 将上述结果推广到了更一般的 Hessian 商方程的 Neumann 边值问题上. 此外, Jiang 等^[22] 用上解条件替换边界上的严格凸性的条件, 得到了推广的 Monge-Ampère 型方程 Neumann 边值问题经典解的正则性. 与此同时, Chen 等^[23] 考察了对数 Monge-Ampère 方程—特殊 Lagrange 方程的 Neumann 边值问题, 得到了该问题解的存在性结果. 相关的工作还有文献 [24]. 随后, Jiang 和 Trudinger^[25-27] 研究了 k -Hessian 方程的斜微商边值问题解的存在性和正则性. 关于 Riemann 流形上 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题的结果有: 文献 [28] 在下解存在的条件下得到了更为一般的完全非线性方程解的存在性和正则性. 进一步, 文献 [29] 在边值条件为 $u_\nu = \phi(x)$ 的情形下, 得到了该问题解的存在性和正则性结果. 相关的工作还有文献 [30].

本文的结论如下:

定理 1.1 设 (M, g) 是 n 维紧致的具有全脐边界的流形, 截曲率非负, 边界上的平均曲率为正, 且流形上存在具有正定的 Hessian 矩阵的光滑函数, 则对于任意的光滑正函数 f 和任意的边界上的光滑函数 ϕ , Neumann 边值问题 (1.1) 存在 k 相容的解 $u \in C^\infty(M)$.

本文将借鉴文献 [19] 中的证明方法. 余下内容结构如下: 第 2 节介绍相关背景知识. 第 3 节证明 C^0 估计. 第 4 节给出 C^1 估计的证明. 第 5 节证明 C^2 估计. 定理 1.1 的证明在第 6 节中给出. 第 7 节展望后续工作.

2 背景知识

本文中采用 Einstein 求和习惯: 对于上下指标的求和将省略求和符号.

2.1 协变导数和 Ricci 恒等式

用 D 表示 (M, g) 上的 Levi-Civita 联络. 同时, 曲率张量的记号为

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, \quad (2.1)$$

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(Z, W)Y, X \rangle. \quad (2.2)$$

设 $e_1, \dots, e_n$ 为 M 上的局部标架, 且 $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $D_i = D_{e_i}$. 定义

$$R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), \quad R_{jkl}^i = g^{im} R_{mjkl}, \quad D_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k. \quad (2.3)$$

对于光滑函数 v 而言, 有

$$v_{ji} = \partial_i(v_j) - \Gamma_{ij}^k v_k, \quad v_{kji} - v_{kij} = -R_{kij}^l v_l, \quad (2.4)$$

以及

$$\begin{aligned} v_{lkji} - v_{ljki} &= -R_{lj k}^m v_{mi} - R_{lj k, i}^m v_m, \\ v_{ljki} - v_{ljik} &= -R_{jik}^m v_{lm} - R_{lik}^m v_{mj}, \\ v_{ljik} - v_{jilk} &= v_{jlik} - v_{jilk} = -R_{jil, k}^m v_m - R_{jil}^m v_{mk}, \\ v_{lkji} - v_{jilk} &= -R_{lj k}^m v_{mi} - R_{lj k, i}^m v_m - R_{jik}^m v_{lm} - R_{lik}^m v_{mj} \\ &\quad - R_{jil, k}^m v_m - R_{jil}^m v_{mk}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Fermi 坐标系

在边界附近将选用 Fermi 坐标系. 在该坐标系下, 度量的表达式为 $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2$, 其中希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示切向指标. 拉丁字母 $i, j, k, \dots$ 表示全指标. 在该坐标系下 x^n 恰好表示点到边界的距离, 单位外法向可以记为 $\nu = -\frac{\partial}{\partial x^n}$. Fermi 坐标系下的坐标邻域可以取为

$$B_r^+ = \left\{ x^n \geq 0, \sum_i (x^i)^2 < r^2 \right\}.$$

第二基本形式记为 L_{ij} . 则在边界上有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = L_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha n}^\beta = -L_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \quad \Gamma_{\alpha n}^n = 0.$$

如果边界是全脐的, 且 ∂M 上的平均曲率为 κ , 则有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = \kappa g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha n}^\beta = -\kappa \delta_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\alpha n}^n = 0.$$

2.3 术语

定义 2.1 称函数 u 是 k 相容的, 如果 $\sigma_1(D^2u) > 0, \dots, \sigma_k(D^2u) > 0$.

定义 2.2 按如下方式定义正锥 Γ_k :

$$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_1(\lambda) > 0, \dots, \sigma_k(\lambda) > 0\}.$$

定义 2.3 采用如下记号:

(1)

$$F^{ij} = \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_{ij}}.$$

(2)

$$\sigma_k(\lambda \mid i) = \sigma_k(\lambda) \mid_{\lambda_i=0}.$$

(3)

$$\sigma_k(\lambda \mid ij) = \sigma_k(\lambda) \mid_{\lambda_i=0, \lambda_j=0}.$$

定理 2.1 ^[31] 当 u 是 k 相容时, $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是椭圆的和凹的.

定理 2.2 ^[32] (1) 设 $\lambda \in \Gamma_k$, 则

$$\sigma_{k-1}(\lambda \mid i) > 0.$$

(2)

$$\sum_i \lambda_i \sigma_k(\lambda \mid i) = (k+1) \sigma_{k+1}(\lambda).$$

(3)

$$\sum_i \sigma_k(\lambda \mid i) = (n-k) \sigma_k(\lambda).$$

(4)

$$\sigma_k(\lambda) = \lambda_i \sigma_{k-1}(\lambda \mid i) + \sigma_k(\lambda \mid i).$$

(5) 若 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, 则

$$\lambda_1 \sigma_{k-1}(\lambda \mid 1) \geq \frac{k}{n} \sigma_k(\lambda). \quad (2.6)$$

3 C^0 估计

以下是 Riemann 流形上 C^0 估计的证明, 沿用了文献 [19] 中的方法.

定理 3.1 ^[19] 设 M 为紧致的带边流形, 且流形上存在具有正定的 Hessian 矩阵的光滑函数 ρ . ν 为 ∂M 上的单位外法向. 设 $u \in C^2(M)$ 是下列方程 k 相容的解:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x), & x \in M, \\ u_\nu = -u + \phi(x), & x \in \partial M, \end{cases} \quad (3.1)$$

则

$$\sup_M |u| \leq M_0,$$

其中 M_0 依赖于 k 、 n 、 $\text{diam}M$ 、 ϕ 和 f .

证明 取 A_1 足够大使得

$$\sigma_k(D^2u) = f \leq \sigma_k(D^2(A_1\rho)).$$

由比较原则可知, $u - A_1\rho$ 在边界点 x_0 处达到极小值. 于是,

$$0 \geq (u - A_1\rho)_\nu(x_0) \geq -u(x_0) - C.$$

进一步有

$$u(x) \geq u(x_0) - C \geq -C.$$

另一方面, 由于流形是紧致的, 则存在 $B_1 > 0$, 使得

$$\sigma_k(D^2u) = f \geq \frac{1}{B_1} \sigma_k(D^2(\rho)).$$

同样由比较原则可知, $u - \frac{1}{B_1}\rho$ 的最大值在边界点 x_1 达到. 于是,

$$0 \leq \left(u - \frac{1}{B_1}\rho\right)_\nu(x_1) \leq -u(x_1) + C.$$

进一步成立

$$u(x) \leq u(x_1) \leq C.$$

从而有

$$\sup_M |u| \leq C.$$

证毕. □

4 C^1 估计

令 $M_0 = \sup |u|$, 记

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial M)$$

以及

$$M_\mu = \{x \in M \mid d(x) < \mu\}.$$

下面的两个定理来自于文献 [33]. 不难看出这些定理在 Riemann 流形上也成立.

引理 4.1 [33] 若 u 是 k 相容的, $u_{11} < -\frac{h'|Du|^2}{4}$, 其中 h' 是正函数, 则

$$\frac{1}{n-k+1} \sum_i F^{ii} \leq F^{11}$$

且

$$\sum_i F^{ii} \geq C_{n-1}^{k-1} \left[\frac{h'}{4C_{n-1}^k} \right]^{k-1} |Du|^{2k-2}.$$

下面是内部梯度估计.

引理 4.2 ^[33] 设 $u \in C^3(M)$ 是方程

$$\sigma_k(D^2u) = f(x, u)$$

的 k 相容的解, 且 $|u| \leq M_0$, 存在正数 L_1 使得

$$\begin{aligned} f(x, z) &\geq 0, \\ |f(x, z)| + |f_x(x, z)| + |f_z(x, z)| &\leq L_1, \end{aligned}$$

其中 $f \in C^2(M \times [-M_0, M_0])$, 则对于任意的 $M' \subset\subset M$, 成立

$$\sup_{M'} |Du| \leq \tilde{M}_1,$$

其中 $\tilde{M}_1$ 是依赖于 $n, k, M_0, \text{dist}(M', \partial M)$ 和 L_1 的正数.

接下来是整体梯度估计, 其 Euclid 情形下的证明来自于文献 [34].

定理 4.1 假设 ∂M 是全脐的, $u \in C^2(M)$ 是下列方程 k 相容的解:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x, u), & x \in \partial M, \\ u_\nu = -\phi_1(x)u + \phi_2(x), & x \in \partial M, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $|u| \leq M_0$, $f(x, u)$ 是 $M \times [-M_0, M_0]$ 上给定的函数, 且 $0 < \phi_1(x) \in C^\infty(M)$, $\phi_2(x) \in C^\infty(M)$, 则存在 $\mu_0 > 0$ 使得

$$\sup_{M_{\mu_0}} |Du| \leq C,$$

其中 C 依赖于 $M, n, k, \mu_0, M_0, \phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$.

证明 与文献 [19] 类似, 考虑辅助函数

$$G(x) = \log |Dw|^2 + h(u) + g(d),$$

其中

$$w(x) = u(x) + \bar{\phi}(x, u)d(x), \quad \bar{\phi}(x, u) = -\phi_1(x)u + \phi_2(x), \quad (4.2)$$

$$h(u) = -\frac{1}{2} \log(1 + 4M_0 - u), \quad (4.3)$$

$$g(d) = A_0 d,$$

A_0 是待定的常数. 由 (4.3) 有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \log(1 + 5M_0) &\leq h \leq -\frac{1}{2} \log(1 + 3M_0), \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 5M_0} &\leq h' \leq \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 3M_0}, \\ \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 5M_0)^2} &\leq h'' \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 3M_0)^2}. \end{aligned}$$

从 (4.2) 可以看到

$$w_i = u_i + (\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_u u_i)d + \bar{\phi} d_i. \quad (4.4)$$

再假设函数 $G(x)$ 的最大值在 $x_0 \in M_{\mu_0}$ 处达到. 接下来分两种情形计算.

情形 I 边界估计.

假设 G 的最大值在边界上达到. 接下来在 Fermi 坐标系下计算. 由 (4.4) 容易看到, 在边界上有

$$w_n = u_n + (\bar{\phi}_n + \bar{\phi}_u u_n)d + \bar{\phi} = 0.$$

再次求协变导数得到

$$w_{\alpha n} = w_{n\alpha} = \partial_\alpha w_n - \Gamma_{n\alpha}^i w_i = -\Gamma_{n\alpha}^n w_n = \kappa w_\alpha.$$

直接计算得

$$0 \geq G_n = \frac{w_n w_{nn} + w_\alpha w_{\alpha n}}{|Dw|^2} + g' + h' u_n.$$

可以看到只要 A_0 充分大就有

$$0 \geq G_n \geq \kappa + A_0 - C > 0.$$

这个矛盾意味着 G 一定在内部达到最大值.

情形 II 边界附近的估计.

关于辅助函数 G 求一阶和二阶导数:

$$0 = G_i = \frac{2w_p w_{pi}}{|Dw|^2} + g' d_i + h' u_i, \quad (4.5)$$

且

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{2w_{pj} w_{pi} + 2w_p w_{pij}}{|Dw|^2} - \frac{4w_p w_{pi} w_q w_{qj}}{|Dw|^4} \\ &\quad + g'' d_i d_j + g' d_{ij} + h'' u_i u_j + h' u_{ij}. \end{aligned}$$

在 G 的最大值点处, 有

$$\begin{aligned} 0 &\geq F^{ij} G_{ij} \\ &= \frac{2F^{ij} w_{pj} w_{pi} + 2F^{ij} w_p w_{pij}}{|Dw|^2} - \frac{4F^{ij} w_p w_{pi} w_q w_{qj}}{|Dw|^4} \\ &\quad + g'' F^{ij} d_i d_j + g' F^{ij} d_{ij} + h'' F^{ij} u_i u_j + h' F^{ij} u_{ij}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

不妨假设在最大值点处 $|\nabla w| = w_1$, 且 $(u_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ 是对角的. 于是,

$$w_{11} = -\frac{1}{2}(g' d_1 + h' u_1)w_1. \quad (4.7)$$

且当 $i \geq 2$ 时,

$$u_i = \frac{-\bar{\phi}_i d - \bar{\phi} d_i}{1 + \bar{\phi}_u d}. \quad (4.8)$$

在此, 假设 μ_0 充分小, 使得

$$\frac{1}{2} \leq 1 + \bar{\phi}_u d \leq 1.$$

(4.8) 意味着

$$|u_i| \leq C. \quad (4.9)$$

再由 (4.4) 可知,

$$w_1 = (1 + \bar{\phi}_u d)u_1 + \bar{\phi}_1 d + \bar{\phi} d_1. \quad (4.10)$$

再假设 u_1 充分大, 进而由 (4.10) 得到

$$\frac{1}{4}u_1 \leq w_1 \leq 2u_1. \quad (4.11)$$

同时从 (4.5) 可以看到, 对于 $i \geq 2$ 有

$$w_{1i} = -\frac{1}{2}(g'd_i + h'u_i)w_1. \quad (4.12)$$

结合 (4.9), 有

$$|w_{1i}| \leq Cw_1.$$

同时, 对 (4.4) 直接计算可得

$$\begin{aligned} w_{ji} &= u_{ji}(1 + \bar{\phi}_u d) + u_j(\bar{\phi}_{ui} + \bar{\phi}_{uu}u_i)d + u_j\bar{\phi}_u d_i \\ &\quad + (\bar{\phi}_{ji} + \bar{\phi}_{ju}u_i)d + \bar{\phi} d_i + (\bar{\phi}_u u_i + \bar{\phi}_i)d_j + \bar{\phi} d_{ji}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

再次结合 (4.9), 成立

$$|u_{i1}| \leq Cw_1. \quad (4.14)$$

同时在 (4.13) 的基础上直接计算可得

$$\begin{aligned} w_{1ij} &= u_{1ij}(1 + \bar{\phi}_u d) + u_{1i}(\bar{\phi}_{uj} + \bar{\phi}_{uu}u_j)d + u_{1i}\bar{\phi}_u d_j \\ &\quad + u_{1j}(\bar{\phi}_{ui} + \bar{\phi}_{uu}u_i)d + u_1(\bar{\phi}_{uij} + \bar{\phi}_{uiu}u_j + \bar{\phi}_{uuu}u_ju_i + \bar{\phi}_{uu}u_jd_i + \bar{\phi}_{uu}u_{ij})d + u_1(\bar{\phi}_{ui} + \bar{\phi}_{uu}u_i)d_j \\ &\quad + u_{1j}\bar{\phi}_u d_i + u_1(\bar{\phi}_{uu}u_j + \bar{\phi}_{uj})d_i + u_1\bar{\phi}_u d_{ij} \\ &\quad + (\bar{\phi}_{1i} + \bar{\phi}_{1u}u_i)d_j + (\bar{\phi}_{1ij} + \bar{\phi}_{1iu}u_j + \bar{\phi}_{1uj}u_i + \bar{\phi}_{1uu}u_ju_i + \bar{\phi}_{1u}u_{ij})d \\ &\quad + \bar{\phi} d_{ij} + (\bar{\phi}_u u_j + \bar{\phi}_j)d_i \\ &\quad + (\bar{\phi}_u u_i + \bar{\phi}_i)d_{1j} + (\bar{\phi}_{uu}u_iu_j + \bar{\phi}_{uj}u_i + \bar{\phi}_u u_{ij} + \bar{\phi}_{iu}u_j + \bar{\phi}_{ij})d_1 \\ &\quad + \bar{\phi} d_{1ij} + (\bar{\phi}_u u_j + \bar{\phi}_j)d_{1i}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

结合 Ricci 恒等式 (4.9)、(4.14) 和 (4.15), 在 w_1 充分大和 $\bar{\phi}_{uu} = 0 = \bar{\phi}_{uuu}$ 的假设下, 有

$$\begin{aligned} F^{ij}w_{ij1} &\geq (1 + \bar{\phi}_u d)F^{ij}u_{ij1} - C \sum F^{ii}|Dw|^2 + 2F^{ij}(u_{1i}\bar{\phi}_{uj}d + u_{1i}\bar{\phi}_u d_j) \\ &\quad + F^{ij}u_{ij}(\bar{\phi}_{1u}d + (\bar{\phi}_u)d_1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

再结合

$$F^{ij}u_{ij} = kf \quad (4.17)$$

和

$$F^{ij}u_{ij1} = f_1 + f_u u_1, \quad (4.18)$$

在 w_1 充分大的假设下, 结合 (4.11) 和 (4.16)–(4.18), 意味着

$$\begin{aligned} F^{ij}w_{ij1} &\geq -C \sum_i F^{ii}|Dw|^2 + 2F^{ij}(u_{1i}\bar{\phi}_{uj}d + u_{1i}\bar{\phi}_ud_j) \\ &\geq -C \sum_i F^{ii}|Dw|^2 + 2F^{1j}(u_{11}\bar{\phi}_{uj}d + u_{11}\bar{\phi}_ud_j). \end{aligned} \quad (4.19)$$

再次取充分大的 w_1 , 使得 (4.7) 中的 w_{11} 满足

$$|w_{11}| \leq Cw_1^2. \quad (4.20)$$

结合 (4.13) 和 (4.20) 可以得到

$$|u_{11}| \leq Cw_1^2.$$

再注意到 F^{ij} 正定, $|F^{ij}| \leq C \sum_i F^{ii}$. 从而, (4.19) 成为

$$F^{ij}w_{ij1} \geq -C \sum_i F^{ii}|Dw|^2. \quad (4.21)$$

又由于 $F^{ij}w_{pj}w_{pi} \geq 0$, 同时, 利用 Ricci 恒等式、(4.5) 和 (4.17), (4.6) 可以改写成

$$\begin{aligned} 0 &\geq F^{ij}G_{ij} \\ &\geq \frac{2F^{ij}w_1w_{1ij}}{|Dw|^2} - \frac{4F^{ij}w_pw_{pi}w_qw_{qj}}{|Dw|^4} \\ &\quad + g''F^{ij}d_id_j + g'F^{ij}d_{ij} + h''F^{ij}u_iu_j + h'F^{ij}u_{ij} \\ &= \frac{2F^{ij}w_1w_{ij1} - C \sum_i F^{ii}w_1^2}{|Dw|^2} - \frac{4F^{ij}\frac{w_1^2}{2}(g'd_i + h'u_i)\frac{w_1^2}{2}(g'd_j + h'u_j)}{|Dw|^4} \\ &\quad - C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii}|u_1| + h''F^{11}u_1u_1 + h'kf \\ &\geq -C \sum_i F^{ii}|Dw| - C \sum_i F^{ii} - \frac{4F^{ij}\frac{w_1^2}{2}(g'd_i + h'u_i)\frac{w_1^2}{2}(g'd_j + h'u_j)}{|Dw|^4} \\ &\quad - C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii}|u_1| + h''F^{11}u_1u_1 + h'kf \\ &\geq -\frac{4F^{ij}\frac{w_1^2}{2}(g'd_i + h'u_i)\frac{w_1^2}{2}(g'd_j + h'u_j)}{|Dw|^4} \\ &\quad - C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii}|u_1| + h''F^{11}u_1u_1 + h'kf \\ &\geq -C \sum_i F^{ii}|u_1| - C \sum_i F^{ii} + (h'' - (h')^2)F^{11}u_1u_1 \\ &\geq -C \sum_i F^{ii}|u_1| - C \sum_i F^{ii} + (h')^2F^{11}u_1u_1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

在 (4.22) 中使用了性质 $h'' = 2(h')^2$. 再次假设 u_1 充分大, 使得

$$\frac{1}{2}h'u_1 \leq g'd + h'u_1 \leq \frac{3}{2}h'u_1.$$

于是, 从 (4.7) 可以得到

$$u_{11} \leq -\frac{1}{4}h'u_1w_1 \leq -\frac{1}{4}h'|Du|^2 < 0,$$

这里使用了 u_1 充分大的假设. 由引理 4.1, 在 w_1 充分大的假设下 (4.22) 成为

$$0 \geq F^{ij}G_{ij} \geq -C \sum_i F^{ii} + \frac{1}{2(n-k+1)}(h')^2 \sum_i F^{ii}u_1^2, \quad (4.23)$$

进而得到 G 是有界的. $\square$

5 C^2 估计

现在考虑下列方程 k 相容的解的二阶导数估计:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x, u), & x \in M, \\ u_\nu = -\phi_1(x)u + \phi_2(x), & x \in \partial M, \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 ν 是边界 ∂M 的单位外法向, $f(x, u) \in C^\infty(M) \times [-M_0, M_0]$, 且 $0 < \phi_1(x) \in C^\infty(M)$, $\phi_2(x) \in C^\infty(M)$.

定理 5.1 设 M 是光滑紧致流形, 截曲率非负, 它具有凸的全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 假设 $u \in C^4(M)$ 是方程 (5.1) 的 k 相容的解, 则有如下估计:

$$\sup_M |D^2u| \leq C,$$

其中 C 依赖于 $n, k, \|u\|_{C^1(M)}, \|f\|_{C^2(M)}, \min f, \phi_1(x), \phi_2(x)$ 和 ∂M .

首先, 由边界条件很容易得到边界上的“切法”方向上的估计.

引理 5.1 ^[18] 设 τ 为切向. 在定理 5.1 的假设下, 有

$$|D_{\tau\nu}u(y)| \leq C, \quad (5.2)$$

其中 $y \in \partial M$, C 依赖于 $\|u\|_{C^1}, \|\partial M\|_{C^2}, \phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$.

证明 在 Fermi 坐标系下计算. 首先, 边界条件可以写成

$$u_n = \phi_1(x)u - \phi_2(x).$$

再对上式关于切向求协变导数, 得到

$$u_{n\gamma} = \partial_\gamma u_n - \Gamma_{\gamma n}^i u_i = \partial_\gamma (\phi_1 u - \phi_2) + \kappa u_\gamma.$$

这意味着

$$|u_{n\alpha}| \leq C.$$

证毕. $\square$

接下来将证明二阶导数可以被边界上的“法法”方向上的导数控制. 该定理的 Euclid 情形下的证明同样来自于 Lions 等 ^[18].

引理 5.2 ^[18] 设 M 是光滑紧致流形, 截曲率非负, 它具有凸的全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 令 $M_1 = \sup_{\partial M} |u_{\nu\nu}|$, 且 $u(x)$ 是定理 5.1 中的 k 相容的解, 则有

$$\sup u_{\xi\xi} \leq C_0(1 + M_1), \quad (5.3)$$

其中 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, C_0 依赖于 $\|u\|_{C^1}, \|\partial M\|_{C^4}, \|f\|_{C^2}, \min f, \phi_1, \phi_2$ 和 ∂M .

证明 考虑辅助函数

$$v(x, \xi) = u_{\xi\xi} - a^l u_l + K_1 \rho^2 + K_2 |Du|^2,$$

其中 $a^l = g^{il} a_l$, $a^l u_l = \langle Da, Du \rangle$, 函数 a 待定. 直接求协变导数可以得到

$$v_i = u_{\xi\xi i} - a_i^l u_l - a^l u_{li} + K_1 (\rho^2)_i - 2K_2 u_l u_{li},$$

以及

$$\begin{aligned} v_{ij} &= u_{\xi\xi ij} - a_{ij}^l u_l - a_i^l u_{lj} - a_j^l u_{li} - a^l u_{lij} \\ &\quad + K_1 (\rho^2)_{ij} + 2K_2 u_{li} u_{lj} + 2K_2 u_l u_{lij}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

记 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 为 $\tilde{F}$, 并关于方程

$$\tilde{F} = \sigma_k^{\frac{1}{k}} = f^{\frac{1}{k}} = \tilde{f}$$

两边求协变导数, 可以得到

$$\tilde{F}^{ij} u_{ijl} = \tilde{f}_l + \tilde{f}_u u_l. \quad (5.5)$$

再由 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 的凹性得到

$$\tilde{F}^{ij} u_{ij\xi\xi} \geq \tilde{F}^{ij} u_{ij\xi\xi} + \tilde{F}^{ij,pq} u_{ij\xi} u_{pq\xi} = \tilde{f}_{\xi\xi}. \quad (5.6)$$

利用 (5.5)、(5.6) 和 (2.5), 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{ij} v_{ij} &= \tilde{F}^{ij} u_{\xi\xi ij} - \tilde{F}^{ij} a_{ij}^l u_l - 2\tilde{F}^{ij} u_{lj} a_i^l - \tilde{F}^{ij} u_{li} a_j^l \\ &\quad + 2K_1 \sum_i \tilde{F}^{ii} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_{lj} u_{li} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_{li} u_{lj} \\ &\geq -C \left(\sum_i \tilde{F}^{ii} + 1 \right) + 2K_1 \sum_i \tilde{F}^{ii} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_{li} u_{lj} - 2\tilde{F}^{ij} u_{lj} a_i^l \\ &\quad - 2\tilde{F}^{ij} R_{ji\xi}^m u_{m\xi}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

倘若 $v(x, \xi)$ 的最大值点在内部达到, 可以假设 g_{ij} 和 u_{ij} 是对角的, 且 $u_{ii} = \lambda_i$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

将证明可以找到 K_2 使得

$$K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2\tilde{F}^{ii} R_{ii\xi}^\xi u_{\xi\xi} > 0. \quad (5.8)$$

如果 (5.8) 是对的, 再由

$$K_2 \tilde{F}^{ij} u_{li} u_{lj} - 2\tilde{F}^{ij} u_{lj} a_i^l = K_2 \tilde{F}^{ii} \left(u_{ii} - \frac{a_i^i}{K_2} \right)^2 - \tilde{F}^{ii} \left(\frac{(a_i^i)^2}{K_2} \right), \quad (5.9)$$

可以得到

$$\tilde{F}^{ij} v_{ij} \geq 2K_2 \sum \tilde{F}^{ii} \left(u_{ii} - \frac{a_i^i}{K_2} \right)^2 + \left(K_1 - \frac{(a_i^i)^2}{K_2} - C \right) \sum \tilde{F}^{ii}. \quad (5.10)$$

这样只要进一步选择了 K_1 、 K_2 和 a 使得

$$K_1 - \frac{(a_i^i)^2}{K_2} - C > 0, \quad (5.11)$$

就得到了

$$\tilde{F}^{ij}v_{ij} > 0.$$

从而 v 的最大值一定在边界达到. 现在来补充证明 (5.8). 由定义可得

$$K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2 \tilde{F}^{ii} R_{ii\xi}^\xi u_{\xi\xi} = K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 + 2 \tilde{F}^{ii} g^{\xi\xi} R_{i\xi i\xi} u_{\xi\xi}.$$

如果 $u_{\xi\xi} \geq 0$, 则 (5.8) 自然成立. 因此不妨假设 $u_{\xi\xi} < 0$. 此时,

$$F^{\xi\xi} \geq c(n, k) \sum_i F^{ii}.$$

这样, 当 K_2 充分大时有

$$\begin{aligned} K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2 \tilde{F}^{ii} R_{ii\xi}^\xi u_{\xi\xi} &\geq K_2 \tilde{F}^{\xi\xi} u_{\xi\xi}^2 + 2 \tilde{F}^{ii} g^{\xi\xi} R_{i\xi i\xi} u_{\xi\xi} \\ &\geq \frac{1}{k} \sigma_k^{\frac{1}{k}-1} \left(K_2 c(n, k) \sum_i F^{ii} u_{\xi\xi}^2 - C \sum_i F^{ii} |u_{\xi\xi}| \right) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

于是 $v(x, \xi)$ 在 ∂M 上达到最大值. 接下来在该边界最大值处, 在 Fermi 坐标系下有

$$0 \geq v_n = u_{\xi\xi n} - (a^l u_l)_n + K_1(\rho^2)_n + 2K_2 u_l u_{ln}. \quad (5.13)$$

注意到边值条件为 $u_n = \phi_1 u - \phi_2$, 因此对于 $1 \leq \alpha \leq n-1$, 有

$$u_{\alpha n} = u_{n\alpha} = \partial_\alpha u_n - \Gamma_{\alpha n}^i u_i = (\phi_1 u - \phi_2)_\alpha - \Gamma_{\alpha n}^\beta u_\beta = (\phi_1 u)_\alpha - (\phi_2)_\alpha + \kappa u_\alpha,$$

以及

$$\begin{aligned} u_{n\beta\alpha} &= \partial_\alpha u_{n\beta} - \Gamma_{\alpha n}^i u_{i\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^i u_{ni} \\ &= \partial_\alpha ((\phi_1 u)_\beta - (\phi_2)_\beta + \kappa u_\beta) + \kappa u_{\alpha\beta} \\ &\quad - \kappa g_{\alpha\beta} u_{nn} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma ((\phi_1 u)_\gamma - (\phi_2)_\gamma + \kappa u_\gamma). \end{aligned} \quad (5.14)$$

进一步由 Ricci 恒等式得到

$$u_{n\beta\alpha} = u_{\beta n\alpha} = u_{\beta\alpha n} - R_{\beta\alpha n}^i u_i. \quad (5.15)$$

结合 (5.13)–(5.15), 成立

$$\begin{aligned} 0 &\geq u_{\alpha\alpha n} - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1(\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} \\ &= u_{n\alpha\alpha} + R_{\alpha\alpha n}^i u_i - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1(\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} \\ &\geq \partial_\alpha ((\phi_1 u)_\alpha - (\phi_2)_\alpha + \kappa u_\alpha) + \kappa u_{\alpha\alpha} - \kappa g_{\alpha\alpha} u_{nn} - \Gamma_{\alpha\alpha}^\gamma ((\phi_1 u)_\gamma - (\phi_2)_\gamma + \kappa u_\gamma) \\ &\quad - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1(\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} - C \\ &\geq \partial_\alpha ((\phi_1 u)_\alpha + \kappa u_\alpha) + \kappa u_{\alpha\alpha} - (\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2(\phi_1 u - \phi_2)) u_{nn} - C \\ &\geq (\phi_1 + \kappa)(u_{\alpha\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^i u_i) + \kappa u_{\alpha\alpha} - (\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2(\phi_1 u - \phi_2)) u_{nn} - C \end{aligned}$$

$$\geq (\phi_1 + 2\kappa)u_{\alpha\alpha} - (\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2(\phi_1 u - \phi_2))u_{nn} - C. \quad (5.16)$$

于是只要 a^n 和 K_2 满足

$$\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2(\phi_1 u - \phi_2) > 0, \quad (5.17)$$

就有

$$u_{\alpha\alpha} \leq C(1 + u_{nn})$$

以及

$$u_{\xi\xi} \leq C(1 + |u_{\nu\nu}|).$$

证毕. □

5.1 边界上法向二阶导数的估计

设 u 是方程 (5.1) 的 k 相容的解. 取辅助函数

$$h(x) = -d(x) + K_3 d^2(x),$$

其中 K_3 待定. 与前面一样定义

$$M_\mu = \{x \in M : 0 < d(x) < \mu\},$$

其中 μ 是很小的正数. 容易看到

$$-\mu + K_3 \mu^2 \leq h \leq 0$$

且

$$\frac{Dh}{|Dh|} = \nu.$$

引理 5.3 设 M 是光滑紧致流形, 具有凸的全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 设 $u \in C^4(M)$ 是方程 (5.1) 的 k 相容的解. 存在正常数 K_3 , 依赖于 ∂M 、 n 、 k 和 $\min f$. 对于充分小的 μ , 有

$$F^{ij} h_{ij} \geq \delta \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) \quad (5.18)$$

以及

$$2 \geq |Dh| \geq \frac{1}{2}.$$

证明 将在 Fermi 坐标系下计算. 注意到在边界邻域中成立 $g = (dx^n)^2 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. 在边界上成立 $\Gamma_{\alpha\beta}^n = \kappa g_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha n}^\beta = -\kappa \delta_{\alpha\beta}$ 和 $\Gamma_{\alpha n}^n = 0$. 此时, $h = -x^n + K_3(x^n)^2$. 通过直接计算可以得到

$$\begin{aligned} (h)_{ij} &= -\Gamma_{ij}^l (-x^n)_l + K_3((x^n)^2)_{ij} \\ &= \Gamma_{ij}^n + K_3(\partial_i \partial_j ((x^n)^2) - \Gamma_{ij}^n ((x^n)^2)_n). \end{aligned}$$

因而,

$$h_{nn} = 2K_3,$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha n} &= 0, \\ h_{\alpha\beta} &= \kappa g_{\alpha\beta}(1 - 2K_3 x^n). \end{aligned}$$

故由 h_{ij} 的连续性知, 当 μ 充分小时, 存在 $\delta > 0$ 使得 $h_{ij} \geq \delta$. 从而证明了 (5.18). $\square$

定义辅助函数

$$\begin{aligned} K(x) &= 1 - \beta h, \\ G(x) &= (A + \sigma M_1)h, \\ \psi(x) &= |Dh|(-\phi_1 u + \phi_2), \end{aligned}$$

其中 σ 、 β 、 μ 和 A 是待定的正数. 接下来仿照文献 [19] 的证明, 构造下闸函数:

$$P(x) = K(x)(Du \cdot Dh - \psi) - G.$$

下面的引理和定理的证明与文献 [19] 中是类似的. 为了定理的完整性, 在此列出证明.

引理 5.4 ^[19] 设 M 是光滑紧致流形, 截曲率非负, 它具有凸的全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 固定 $\sigma = \frac{1}{2}$, 在引理 5.3 的条件下, 对任意的 $x \in M_\mu$, 如果合适地选取 β 充分大, μ 很小, A 充分大, 则有

$$P(x) \geq 0.$$

证明 首先假设 P 的最小值在 M_μ 内部的 x_0 点达到. 对 P 求协变导数:

$$\begin{aligned} P_i &= K_i \left(\sum_l u_l h_l - \psi \right) + K \left(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i \right) - G_i, \\ P_{ij} &= K_{ij} \left(\sum_l u_l h_l - \psi \right) + K_i \left(\sum_l u_{lj} h_l + \sum_l u_l h_{lj} - \psi_j \right) \\ &\quad + K \left(\sum_l u_{lij} h_l + \sum_l u_{li} h_{lj} + \sum_l u_{lj} h_{li} + \sum_l u_l h_{lij} - \psi_{ij} \right) \\ &\quad + K_j \left(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i \right) - G_{ij}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

仍然假设 $\{u_{ij}(x_0)\}$ 是对角的. 于是有

$$\begin{aligned} 0 \leq F^{ii} P_{ii} &= F^{ii} K_{ii} \left(\sum_l u_l h_l - \psi \right) + 2F^{ii} K_i \left(u_{ii} h_i + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i \right) \\ &\quad + K F^{ii} \left(\sum_l u_{lii} h_l + 2u_{ii} h_{ii} + \sum_l u_l h_{lii} - \psi_{ii} \right) \\ &\quad - F^{ii} G_{ii}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

利用引理 5.3、辅助函数的定义、一阶导数估计和方程本身可以得到

$$0 \leq F^{ii} P_{ii} \leq C\beta \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - (A + \sigma M_1)\delta \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - 2\beta F^{ii} u_{ii} h_i^2 + 2F^{ii} u_{ii} h_{ii} K,$$

其中 δ 是 (5.18) 中出现的常数. 取 β 充分大使得

$$\frac{\delta}{2\beta} < \frac{1}{4n}. \quad (5.21)$$

这样一定存在 i_0 使得

$$|h_{i_0}|^2 > \frac{1}{4n}.$$

事实上, 如果对所有的 i 都有

$$h_i^2 \leq \frac{1}{4n},$$

则

$$|Dh|^2 < \frac{1}{4}.$$

而这与引理 5.3 矛盾.

不妨把 i_0 设为 1. 再令

$$B = \left\{ i \mid |h_i|^2 \leq \frac{\delta}{2\beta} \right\},$$

$$G = \left\{ i \mid |h_i|^2 > \frac{\delta}{2\beta} \right\}.$$

这样 $1 \in G$.

接下来, 设 $i \in G$. 由于 $P_i = 0$, 所以,

$$\frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{K} + \frac{A + \sigma M_1}{K} + \frac{-\sum_l u_l h_{li} + \psi_i}{h_i} = u_{ii}.$$

这样

$$\left| \frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{K} + \frac{-\sum_l u_l h_{li} + \psi_i}{h_i} \right| \leq \beta D,$$

其中 D 是依赖于 δ 、 $\|u\|_{C^1}$ 、 ϕ_i 和流形 (M, g) 的正常数. 再取 μ 充分小, 使得 $|\beta h| \leq \frac{1}{2}$. 于是, $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{3}{2}$. 接下来取 A 充分大, 使得 $\frac{A}{3} \geq \beta D$. 这样得到

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\sigma M_1 \leq u_{ii} \leq \frac{7}{3}A + 2\sigma M_1, \quad i \in G. \quad (5.22)$$

于是,

$$\begin{aligned} F^{ii}P_{ii} &\leq -(C\beta + (A + \sigma M_1)\delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - 2\beta \sum_{i \in G} F^{ii}u_{ii}h_i^2 - 2\beta \sum_{i \in B} F^{ii}u_{ii}h_i^2 \\ &\quad + 2 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii}u_{ii}h_{ii}K + 2 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii}h_{ii}K \\ &\leq -(C\beta + (A + \sigma M_1)\delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - 2\beta \sum_{i \in G} F^{ii}u_{ii}h_i^2 - \delta \sum_{i \in B, u_{ii} < 0} F^{ii}u_{ii} \\ &\quad + \delta \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii}u_{ii} + C_1 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii} \\ &\leq -(C\beta + (A + \sigma M_1)\delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - \frac{\beta}{2n} F^{11}u_{11} + C_1 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

不失一般性, 假设 $u_{22} \geq \cdots \geq u_{nn}$. 接下来, 分 4 种情形讨论.

情形 1 所有的 u_{ii} 都大于等于 0, 则 $\sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii} = kf$. 这样只要 A 充分大就可以使得

$$F^{ii}P_{ii} < 0. \quad (5.24)$$

而这与 (5.20) 矛盾.

情形 2 $\frac{\delta}{4C_1}u_{11} \geq -u_{nn} > 0$. 此时,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} + C_1 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii} \\
 & \leq C_1 \left(kf - \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii}u_{ii} \right) \\
 & \leq C_1 kf - C_1 \sum_i F^{ii}u_{nn} \\
 & \leq C_1 kf + \frac{\delta}{4} \sum_i F^{ii}u_{11} \\
 & \leq C_1 kf + \frac{\delta}{4} \sum_i F^{ii} \left(\frac{7}{3}A + 2\sigma M_1 \right). \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

结合 (5.23), 可以得到当 A 充分大时 (5.24) 成立.

情形 3 $-u_{nn} > \frac{\delta}{4C_1}u_{11}$, 且存在小的正常数 δ_1 使得

$$\sigma_{k-1}(\lambda | 1) \geq \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda | 1n).$$

如果 $u_{11} \geq u_{22}$, 则由 (2.6) 可知,

$$u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \geq \frac{k-1}{n-1}\sigma_{k-1}(\lambda | n).$$

如果 $u_{11} < u_{22}$, 则由引理 5.2 可知,

$$\begin{aligned}
 u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) & \geq \left(\frac{A}{3} + \frac{2\sigma M_1}{3} \right) \sigma_{k-2}(\lambda | 2n) \\
 & \geq \frac{2\sigma}{3C} u_{22} \sigma_{k-2}(\lambda | 2n) \\
 & \geq \frac{k-1}{n-1} \frac{2\sigma}{3C} \sigma_{k-1}(\lambda | n). \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 F^{11} & \geq \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 & \geq \delta_1 \frac{\delta}{4C_1} u_{11} \sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 & \geq \delta_1 \frac{\delta}{4C_1} \frac{k-1}{n-1} \frac{2\sigma}{3C} \sigma_{k-1}(\lambda | n) \\
 & \geq \delta_1 \frac{\delta}{4C_1} \frac{k-1}{n-1} \frac{2\sigma}{3C} \frac{1}{n-k+1} \sum_i F^{ii}, \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

在最后一个不等式中利用了假设 $u_{nn} < 0$. 于是, 再结合引理 5.2 可知, 当 β 充分大时可以做到

$$-\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} + C_1 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii} < 0.$$

这样, 再次得到了 (5.24).

情形 4 $-u_{nn} > \frac{\delta}{4C_1}u_{11}$, $0 \leq \sigma_{k-1}(\lambda | 1) \leq \delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda | 1n)$.

直接计算得

$$\begin{aligned}
 k\sigma_k(\lambda | 1) &= \sum_{i=2}^n u_{ii}\sigma_{k-1}(\lambda | 1i) \\
 &= \sum_{i=2}^n u_{ii}[\sigma_{k-1}(\lambda | 1) - u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda | 1i)] \\
 &\leq \sum_{i>1, u_{ii} \geq 0} u_{ii}[\delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) - u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda | 1i)] \\
 &\quad + \sum_{i>1, u_{ii} < 0} u_{ii}[-u_{ii}\sigma_{k-2}(\lambda | 1i)] \\
 &\leq \sum_{i>1, u_{ii} \geq 0} u_{ii}[\delta_1(-u_{nn})\sigma_{k-2}(\lambda | 1n)] + u_{nn}[-u_{nn}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n)] \\
 &\leq n\delta_1(-u_{nn})u_{22}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 &\leq n\delta_1(-u_{nn})C(M_1 + 1)\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 &\leq n\delta_1(-u_{nn})C\frac{3}{2\sigma}u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 &\leq n\delta_1C\frac{3}{2\sigma}\frac{4C_1}{\delta}u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) - u_{nn}^2\sigma_{k-2}(\lambda | 1n). \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

这样只要取 δ_1 充分小就有

$$k\sigma_k(\lambda | 1) \leq -\frac{u_{nn}^2}{2}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n).$$

与 (5.26) 类似, 可以得到

$$\begin{aligned}
 k\sigma_k(\lambda | 1) &\leq \frac{1}{2}(u_{nn})\frac{\delta}{4C_1}u_{11}\sigma_{k-2}(\lambda | 1n) \\
 &\leq \frac{1}{2}(u_{nn})\frac{\delta}{4C_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C}\sigma_{k-1}(\lambda | n) \\
 &\leq \frac{1}{2}(u_{nn})\frac{\delta}{4C_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C}\frac{1}{n-k+1}\sum_i F^{ii} \\
 &\leq \left(-\frac{\delta}{4C_1}\right)u_{11}\frac{1}{2}\frac{\delta}{4C_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C}\frac{1}{n-k+1}\sum_i F^{ii} \\
 &\leq \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\sigma M_1\right)\left(-\frac{\delta}{4C_1}\right)\frac{1}{2}\frac{\delta}{4C_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C}\frac{1}{n-k+1}\sum_i F^{ii}. \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned}
 -\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} &= -\frac{\beta}{2n}(f - \sigma_k(\lambda | 1)) \\
 &\leq -\frac{\beta}{2n}f - \frac{\beta}{2nk}\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\sigma M_1\right)\left(-\frac{\delta}{4C_1}\right)\frac{1}{2}\frac{\delta}{4C_1}\frac{k-1}{n-1}\frac{2\sigma}{3C}\frac{1}{n-k+1}\sum_i F^{ii}, \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

可知当 β 充分大时, 有

$$-\frac{\beta}{2n}F^{11}u_{11} + C_1 \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii}u_{ii} < 0. \tag{5.31}$$

从情形 1-4 可知 P 的最小值一定在边界达到. 在 ∂M 上 $P = 0$. 而在 $\partial M_\mu / \partial M$ 上, 只要 A 充分大就有

$$P \geq -C + (A + \sigma M_1) \frac{\mu}{2} > 0.$$

再由极值原理, 可得

$$P \geq 0.$$

证毕. □

类似地, 可以构造上闸函数.

引理 5.5 ^[19] 令 $\bar{P} = K(Du \cdot Dh - \psi) + G$. 固定 $\sigma = \frac{1}{2}$, 在引理 5.3 的条件下, 合适地选取 β 、 μ 和 A , 则有

$$\bar{P}(x) \leq 0.$$

证明 假设 $\bar{P}$ 的最大值点在内部达到. 对 $\bar{P}$ 求协变导数:

$$\bar{P}_i = K_i \left(\sum_l u_l h_l - \psi \right) + K \left(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \psi_i \right) + G_i,$$

以及

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij} &= K_{ij} \left(\sum_l u_l h_l - \psi \right) + K_i \left(\sum_l u_{lj} h_l + \sum_l u_l h_{lj} - \psi_j \right) \\ &\quad + K \left(\sum_l u_{lij} h_l + \sum_l u_{li} h_{lj} + \sum_l u_{lj} h_{li} + \sum_l u_l h_{lij} - \psi_{ij} \right) \\ &\quad + K_j \left(\sum_l u_{li} h_l + \sum_l u_l h_{li} - \pi_i \right) + G_{ij}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

进而有

$$F^{ij} \bar{P}_{ij} \geq (-\beta C + (A + \sigma M_1) \delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) - 2\beta F^{ii} u_{ii} h_i^2 + 2F^{ii} u_{ii} h_{ii} K.$$

与前面一样, 取 β 充分大使得

$$\frac{\delta}{2\beta} < \frac{1}{4n}. \quad (5.33)$$

再定义两个集合

$$\begin{aligned} B &= \left\{ i \mid |\beta h_i^2| \leq \frac{\delta}{2} \right\}, \\ G &= \left\{ i \mid |\beta h_i^2| > \frac{\delta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

对于 G 中的 i , 成立

$$\left| \frac{\beta(\sum_l u_l h_l - \psi)}{K} - \frac{\sum_l u_l h_{li}}{h_i} + \frac{\psi_i}{h_i} \right| \leq \beta C_4,$$

以及当 $A \geq 3\beta C_4$ 时, 成立

$$-\frac{7A}{3} - 2\sigma M_1 \leq u_{ii} \leq -\frac{A}{3} - \frac{2\sigma M}{3}.$$

由 $\frac{1}{2} \leq |Dh| \leq 2$, 可知至少有一个成员, 不妨把它记为 1, 满足 $h_1^2 \geq \frac{1}{4n}$. 显然 $1 \in G$. 接着计算

$$\begin{aligned} F^{ij} \bar{P}_{ij} &\geq (-\beta C + (A + \sigma M_1) \delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) \\ &\quad - 2\beta \sum_{i \in G} F^{ii} u_{ii} h_i^2 - 2\beta \sum_{i \in B} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \\ &\quad + \delta \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii} u_{ii} + C_2 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii} u_{ii}. \end{aligned}$$

注意到

$$-2\beta \sum_{i \in G} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \geq -2\beta F^{11} u_{11} h_1^2 \geq -\frac{\beta}{2n} F^{11} u_{11}$$

以及

$$-2\beta \sum_{i \in B} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \geq -2\beta \sum_{i \in B, u_{ii} \geq 0} F^{ii} u_{ii} h_i^2 \geq -\delta \sum_{i \in B, u_{ii} \geq 0} F^{ii} u_{ii} \geq -\delta \sum_{u_{ii} \geq 0} F^{ii} u_{ii},$$

于是,

$$\begin{aligned} F^{ij} \bar{P}_{ij} &\geq (-\beta C + (A + \sigma M_1) \delta) \left(\sum_i F^{ii} + 1 \right) \\ &\quad - \frac{\beta}{2n} F^{11} u_{11} + C_2 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii} u_{ii}. \end{aligned}$$

由于 $u_{11} < 0$, 从而 $F^{11} \geq c(k, n) \sum_i F^{ii}$. 这样,

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2n} F^{11} u_{11} + C_2 \sum_{u_{ii} < 0} F^{ii} u_{ii} \\ &\geq \left(\frac{\beta}{2n} c(k, n) \left(\frac{A}{3} + \frac{2\sigma M_1}{3} \right) - C(1 + M_1) \right) \sum_i F^{ii}. \end{aligned}$$

于是当 β 充分大时, 有

$$F^{ij} \bar{P}_{ij} > 0.$$

这意味着 $\bar{P}$ 的最大值在边界达到. 与前面一样, 当 A 充分大时,

$$\begin{aligned} \bar{P}|_{\partial M} &= 0, \\ \bar{P}|_{\partial M_\mu / \partial M} &\leq C - (A + \sigma M_1) \frac{\mu}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

从而由极值原理可知

$$\bar{P} \leq 0.$$

证毕. □

下面的引理与文献 [19] 中相关结果类似. 为了定理的完整性, 我们在此列出证明.

引理 5.6 ^[19] 设 M 是光滑紧致流形, 具有凸的、全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 如果 $u \in C^4(M)$ 是方程 (5.1) 的 k 相容的解, 其中 $0 < f \in C^2(M)$, $\phi \in C^3(M)$, 则

$$\sup_{\partial M} |u_{\nu\nu}| \leq C,$$

其中 C 依赖于 $n, k, \min f, \phi_1, \phi_2, \|u\|_{C^1}, \|f\|_{C^2}$ 和 ∂M .

证明 设 z_0 是 u_{nn} 在边界上的最大值. 于是,

$$\begin{aligned} 0 &\geq -P_n = -K \left(\sum_l (u_{ln} h_l + u_l h_{ln}) - \psi_n \right) + (A + \sigma M_1) h_n \\ &\geq u_{nn} - C - (A + \sigma M_1). \end{aligned}$$

于是, $u_{nn} \leq C + \sigma M_1$. 类似可得

$$u_{nn} \geq -C - \sigma M_1.$$

注意到 $\sigma = \frac{1}{2}$, 故

$$\sup_{\partial M} |u_{nn}| \leq C.$$

证毕. □

6 定理 1.1 的证明

设 M 是光滑紧致流形, 截曲率非负, 它具有凸的全脐边界 ∂M , ν 是边界 ∂M 上的单位外法向. 且流形 M 上存在具有正定的 Hessian 矩阵的光滑函数 ρ . 令 $f_0(x) = \sigma_k(D^2\rho)$, $\phi_0(x) = \rho_\nu + \rho$. 考虑一族方程

$$\begin{cases} t(\sigma_k(D^2u) - f(x)) + (1-t)(\sigma_k(D^2u) - f_0(x)) = 0, & x \in M, \\ u_\nu = -u + t\phi(x) + (1-t)\phi_0(x), & x \in \partial M, \end{cases} \quad (6.1)$$

其中 $t \in [0, 1]$. 考虑集合 $I = \{t \in [0, 1] \mid \text{方程 (6.1) 存在解 } u \in \Gamma_k\}$.

从第 3-5 节的证明可以得到方程是一致椭圆的, 进而有整体估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C. \quad (6.2)$$

于是 I 是闭的. 再由线性化算子可逆可知 I 是开的. 而 $u \equiv \rho$ 是 $t = 0$ 时的解, 于是 $0 \in I$. 进而有 $I = [0, 1]$. 从而原方程存在解. 至此完成了定理 1.1 的证明.

7 结论与讨论

本文在边界全脐、截曲率非负、边界上的平均曲率为正、流形上存在具有正定的 Hessian 矩阵的光滑函数的条件下, 得到了 k -Hessian 方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{aligned} \sigma_k(D^2u) &= f(x), & x \in M, \\ u_\nu &= -u + \phi(x), & x \in \partial M \end{aligned}$$

的解的先验估计. 并在此基础上得到了该方程解的存在性和正则性.

进一步还可以考虑当边界不是全脐时, 我们是不是也能得到该方程的先验估计呢? 此外, 是否能把相关结论推广到更为一般的完全非线性方程 $\sigma_k(D^2u + \chi) = f(x)$ 上呢?

我们将在后续工作中对上述问题继续展开讨论.

致谢 作者对审稿人以及给予过帮助的人表示感谢.

参考文献

- 1 Caffarelli L A, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, I: Monge-Ampère equation. *Comm Pure Appl Math*, 1984, 37: 369–402
- 2 Ivochkina N M. A priori estimates of the solution of the Dirichlet problem for the Monge-Ampère equation in weight spaces. *J Math Sci N Y*, 1984, 26: 2349–2359
- 3 Evans L C. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 333–363
- 4 Krylov N V. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. *Math USSR Izv*, 1983, 20: 459–492
- 5 Krylov N V. Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1983, 47: 75–108
- 6 Caffarelli L A, Nirenberg L, Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math*, 1985, 155: 261–301
- 7 Guan B, Spruck J. Boundary-value problems on $\mathbb{S}^n$ for surfaces of constant Gauss curvature. *Ann of Math (2)*, 1993, 138: 601–624
- 8 Trudinger N S. On the Dirichlet problem for Hessian equations. *Acta Math*, 1995, 175: 151–164
- 9 Jiang F D, Trudinger N S, Yang X P. On the Dirichlet problem for Monge-Ampère type equations. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2014, 49: 1223–1236
- 10 Guan B. The Dirichlet problem for Hessian equations on Riemannian manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1999, 8: 45–69
- 11 Guan B. Second-order estimates and regularity for fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *Duke Math J*, 2014, 163: 1491–1524
- 12 Guan B, Jiao H M. Second order estimates for Hessian type fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 2693–2712
- 13 Urbas J. On the existence of nonclassical solutions for two classes of fully nonlinear elliptic equations. *Indiana Univ Math J*, 1990, 39: 355–382
- 14 Warren M, Yuan Y. Hessian estimates for the sigma-2 equation dimension 3. *Comm Pure Appl Math*, 2009, 62: 305–321
- 15 McGonagle M, Song C, Yuan Y. Hessian estimates for convex solutions to quadratic Hessian equation. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2019, 36: 451–454
- 16 Qiu G H. Interior Hessian estimates for sigma-2 equations in dimension three. *arXiv:1711.00948*, 2017
- 17 Guan P F, Qiu G H. Interior C^2 regularity of convex solutions to prescribing scalar curvature equations. *Duke Math J*, 2019, 168: 1641–1663
- 18 Lions P L, Trudinger N S, Urbas J I E. The Neumann problem for equations of Monge-Ampère type. *Comm Pure Appl Math*, 1986, 39: 539–563
- 19 Ma X N, Qiu G H. The Neumann problem for Hessian equations. *Comm Math Phys*, 2019, 366: 1–28
- 20 Trudinger N S. Recent developments in elliptic partial differential equations of Monge-Ampère type. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 4. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 291–302
- 21 Chen C Q, Zhang D K. The Neumann problem of Hessian quotient equations. *Bull Math Sci*, 2021, 11: 2050018
- 22 Jiang F D, Trudinger N S, Xiang N. On the Neumann problem for Monge-Ampère type equations. *Canad J Math*, 2016, 68: 1334–1361
- 23 Chen C Q, Ma X N, Wei W. The Neumann problem of special Lagrangian equations with supercritical phase. *J Differential Equations*, 2019, 267: 5388–5409
- 24 Huang R L, Ou Q Z. On the second boundary value problem for a class of fully nonlinear equations. *J Geom Anal*, 2017, 27: 2601–2617
- 25 Jiang F D, Trudinger N S. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations II. *Nonlinear Anal*, 2017, 154: 148–173

- 26 Jiang F D, Trudinger N S. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations I. Bull Math Sci, 2018, 8: 353–411
- 27 Jiang F D, Trudinger N S. Oblique boundary value problems for augmented Hessian equations III. Comm Partial Differential Equations, 2019, 44: 708–748
- 28 Guan B, Xiang N. On estimates for fully nonlinear elliptic equations with Neumann boundary conditions on Riemannian manifolds. arXiv:1811.12448, 2018
- 29 Guo S. On Neumann problems for elliptic and parabolic equations on bounded manifolds. arXiv:2001.00676, 2020
- 30 Guo X, Xiang N. Gradient estimates for Neumann boundary value problem of Monge-Ampère type equations on Riemannian manifolds. Nonlinear Anal, 2017, 150: 151–158
- 31 Garding L. An inequality for hyperbolic polynomials. Indiana Univ Math J, 1959, 8: 957–965
- 32 Lin M, Trudinger N S. On some inequalities for elementary symmetric functions. Bull Aust Math Soc, 1994, 50: 317–326
- 33 Chou K S, Wang X J. A variational theory of the Hessian equation. Comm Pure Appl Math, 2001, 54: 1029–1064
- 34 Ma X N, Qiu G H, Xu J J. Gradient estimates on Hessian equations for Neumann problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 1117–1126 [麻希南, 邱国寰, 徐金菊. Hesse 方程的 Neumann 问题的梯度估计. 中国科学: 数学, 2016, 46: 1117–1126]

The Neumann boundary problem for k -Hessian equations on compact manifolds

Yan He, Qiang Tu & Jiannan Zhang

Abstract In this paper, we consider the Neumann boundary problem for k -Hessian equations on compact manifolds with umbilic boundary. We establish the *a priori* estimates to the Neumann boundary problem for k -Hessian equations. Then by using the continuity method we arrive at an existence result for the Neumann boundary problem for k -Hessian equations.

Keywords k -Hessian, the *a priori* estimate, umbilic boundary

MSC(2020) 53C21, 35J60

doi: 10.1360/SSM-2020-0067