第 58 卷　第 2 期　厦门大学学报(自然科学版)　Vol. 58　No. 2
2019 年 3 月　Journal of Xiamen University (Natural Science)　Mar. 2019
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.201807014

度量凸函数和渐近非扩张算子半群的公共不动点

林国琛[1*],张　文[2]
(1.厦门理工学院应用数学学院,福建 厦门 361024;2.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

摘要:证明了度量凸函数的一个类似凸分析中 Brondsted-Rockafellar 定理的结论,并刻画了下半连续度量凸函数的结构;证明了完备一致凸双曲度量空间上渐近非扩张算子半群公共不动点的存在性和该半群的弱星紧性.

关键词:度量凸函数;不动点;渐近非扩张算子半群
中图分类号:O 177.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0438-0479(2019)02-0292-05

众所周知,凸性在 Banach 空间上的凸分析和不动点理论中扮演重要角色.把这些经典结果推广到度量空间,是自然的问题.

一方面,Soltan 等[1-7]在 20 世纪 80 年代的图论领域引入度量凸函数概念.Krynski[8]在 1993 年给出赋范空间上度量凸函数的代数结构.但是较少人关注度量凸函数的拓扑性质.这类函数在非离散型空间上的连续性和可微性是本文中研究内容的一部分.

定义 1[9]　度量空间(D,d)是度量凸的,当且仅当对$\forall x,y\in D,0<\beta<1$,存在$z\in D$使得

$$d(x,z)=\beta d(x,y),d(z,y)=(1-\beta)d(x,y).$$

当z唯一时(记为$(1-\beta)x\oplus\beta y$),D称为凸度量空间.

定义 2[10]　(D,d)是双曲度量空间,当且仅当(D,d)度量凸且

$$d\left(\frac{1}{2}p\oplus\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}p\oplus\frac{1}{2}y\right)\leqslant\frac{1}{2}d(x,y),\forall p,x,y\in D.$$

显然赋范空间是双曲度量空间.另外存在一些非线性的例子,如 Hadamard 流形[11]、赋予双曲度量的 Hilbert 开单位球[12]以及 CAT(0)空间[13-15].

双曲度量空间D的子集C是凸的,当且仅当$\forall x,y\in C,0<\beta<1$,有$(1-\beta)x\oplus\beta y\in C$.

定义 3[16-19]　设D是双曲度量空间.D一致凸,当且仅当 任意$a\in D,r>0,\epsilon>0$,有$\delta(r,\epsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{r}d(\frac{1}{2}x\oplus\frac{1}{2}y,a);d(x,a)\leqslant r,d(y,a)\leqslant r,d(x,y)\geqslant r\epsilon\right\}>0.$

定义 4　F是度量空间(D,d)上的度量凸函数,当且仅当

$$F(z)\leqslant\frac{d(z,y)}{d(x,y)}F(x)+\frac{d(x,z)}{d(x,y)}F(y),\forall x,y,z\in D,d(x,z)+d(z,y)=d(x,y).$$

当D是完备双曲一致凸度量空间,给定$y\in D$时,映射$d(\cdot,y):D\to\mathbf{R}$是度量凸函数[19].

另一方面,凸性也应用于不动点问题.20 世纪 60 年代初,压缩映射族和非扩张映射族公共不动点的存在性成为研究热点[20-25].人们也利用渐近方法寻求公共不动点[26-31].本文中证明出:完备一致凸双曲度量空间上渐近非扩张算子半群公共不动点的存在性,并证明该半群是弱星紧集.

定义 5　设C是度量空间D的有界闭凸子集,则一族从C到C的算子$\mathfrak{F}=\{T(t):t\geqslant 0\}$是 Lipschitz 半群,当且仅当$\mathfrak{F}$满足如下条件:

(i) 任意$x\in C,T(0)x=x$;

(ii) 任意$x\in C$,任意$t,s\geqslant 0,T(t+s)x=T(t)T(S)x$;

(iii) 任意$x\in C,T(t)x$在$t\in[0,\infty)$上连续;

收稿日期:2018-07-07　**录用日期**:2018-11-06
基金项目:国家自然科学基金(11471270);中央高校基本业务费专项(20720160010);福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT160371)
* **通信作者**:linguochen@xmut.edu.cn
引文格式:林国琛,张文.度量凸函数和渐近非扩张算子半群的公共不动点[J].厦门大学学报(自然科学版),2019,58(2):292-296.
Citation:LIN G C,ZHANG W.Metrically convex functions and common fixed points of asymptotically nonexpensive semigroups [J].J Xiamen Univ Nat Sci,2019,58(2):292-296.(in Chinese)

(iv) 任意 $t\geqslant 0$,存在 $k_t>0$,使得 $d(T(t)x,T(t)y)\leqslant k_t d(x,y)$, $\forall x,y\in C$.

Lipschitz 算子半群 $\mathfrak{F}$ 是非扩张的,当且仅当任意 $t\geqslant 0$, $k_t=1$. $\mathfrak{F}$ 是渐近非扩张的,当且仅当 $\lim_{t\to\infty} k_t=1$.

1　度量凸函数

度量凸函数是凸函数概念的推广. 二者是否具有类似的拓扑性质,是一个自然的问题. 答案是肯定的. 定理 1 和定理 2 是本节的主要结果.

首先,正如次微分在凸分析中扮演重要角色,在本文中为度量凸函数引入一种新的次微分.

定义 6　设 F 是度量凸空间 D 上的度量凸函数, $x\in D$. 若存在 $\lambda>0$ 使得

$F(y)-F(x)\geqslant -\lambda d(y,x)$, $\forall y\in D$,

本文中定义 $-\lambda d(\cdot,x)$ 为 F 在 x 的 d-次微分.

下面的引理 1 和引理 2 有助于我们证明定理 1.

引理 1[32]　度量空间等距同构于某个 Banach 空间的子集.

引理 1 说明:在等距嵌入意义下,每个度量空间可视为某个 Banach 空间的子集,且度量凸性是不变的. 这为非线性问题提供一种新方法.

引理 2[33]　设 F 是定义在 Banach 空间 X 上的真,下半连续,有下界函数. 任意 $\epsilon>0$, $F(x_0)<\inf\{F(x):x\in X\}+\epsilon$,则任意 λ 且 $0<\lambda<1$,存在有效定义域 dom F 上的 z,使得

(i) $\lambda\|z-x_0\|\leqslant F(x_0)-F(z)$,

(ii) $\|z-x_0\|<\epsilon/\lambda$,

(iii) $\lambda\|x-z\|+F(x)>F(z)$, $x\neq z$.

引理 2 在非线性分析中有广泛应用,也被应用于定理 1 的证明.

定理 1　设 D 是完备度量凸空间, F 是 D 上的下半连续度量凸函数,则 d-次微分存在的点在有效定义域 dom F 中稠密.

证明　根据引理 1,在等距映射下,存在 Banach 空间 X 使得 $(D,d)\subset(X,\|\cdot\|)$,其中的度量 d 由范数 $\|\cdot\|$ 诱导. 定义 $\widetilde{F}:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$,

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases}F(x), & x\in D,\\ +\infty, & x\overline{\in} D.\end{cases}$$

显然 $\widetilde{F}$ 下半连续. 对于任意 $\epsilon>0$ 和 $x_0\in$ dom F,令 $H:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$,

$$H(x)=\begin{cases}\widetilde{F}(x), & \widetilde{F}(x)>F(x_0)-\dfrac{\epsilon}{2},\\ \widetilde{F}(x_0)-\dfrac{\epsilon}{2}, & \widetilde{F}(x)\leqslant F(x_0)-\dfrac{\epsilon}{2}.\end{cases}$$

易知 H 下半连续,有下界且

$$H(x_0)=F(x_0)<(F(x_0)-\frac{\epsilon}{2})+\epsilon\leqslant\inf H+\epsilon.$$

因 F 下半连续,所以存在 $0<\delta<\epsilon$,

$$\{x\in D,d(x,x_0)<\delta\}\subset\{x\in D,F(x)>F(x_0)-\frac{\epsilon}{2}\}.$$

根据引理 2,对于 $\lambda=\frac{\epsilon}{\delta}$,存在 $z\in$ dom $H=$ dom $F\subset D$ 满足

1) $\|z-x_0\|<\frac{\epsilon}{\lambda}=\delta<\epsilon$;

2) $\lambda\|x-z\|+H(x)>H(z)$, $\forall x\neq z$.

因为存在 $r>0$ 使得 $\{x\in D:d(x,z)<r\}\subset\{x\in D:d(x,x_0)<\delta\}$,则

$$F(x)>F(x_0)-\frac{\epsilon}{2},\forall x\in\{x\in D:d(x,z)<r\},$$

所以 $F(x)=\widetilde{F}(x)=H(x)$. 则

$$\lambda\|x-z\|+F(x)>F(z),\forall x\in\{x\in D:d(x,z)<r\}\backslash\{z\}.$$

对于 $y\in D$, $y\neq z$ 且 $x\in\{x\in D:d(x,z)<r,x\neq z,d(z,x)+d(x,y)=d(z,y)\}$,有

$$F(y)+\lambda d(y,z)\geqslant\{d(z,y)[F(x)+\lambda d(x,z)]-d(x,y)F(z)\}/d(x,z)>\{d(z,y)F(z)-d(x,y)F(z)\}/d(x,z)=F(z),$$

即 $F(y)-F(z)>-\lambda d(y,z)$. 则 F 在 z 有 d-次微分. 证毕.

定理 1 类似 Banach 空间凸分析[33]的 Brondsted-Rockafellar 定理. 现在我们在定理 1 的基础上,刻画该函数的结构,这是本文第 2 个主要结论.

定理 2　D 是完备度量凸空间, F 是 D 上下半连续度量凸函数,则

(i) $F(x)=\sup\{F(z)-\lambda d(x,z):\lambda>0,z\in$ dom $F,y\in D,F(y)-F(z)\geqslant-\lambda d(y,z)\}$,

(ii) 上确界能够达到,当且仅当 F 在 x 存在 d-次微分.

证明　(i) 设 $z\in$ dom F, $\lambda>0$ 满足

$F(z)-\lambda d(y,z)<F(y)$, $\forall y\in D$.

根据定理 1,这样的 z 在 dom F 中稠密. 则对于任意 $x_0\in$ dom F,有

$$F(x_0)\geqslant\sup\{F(z)-\lambda d(x_0,z):\lambda>0,z\in\text{dom }F,y\in D,F(y)-F(z)\geqslant-\lambda d(y,z)\}.$$

根据定理 1 的证明,对于任意 $\epsilon>0$,存在 δ 且 $0<\delta<\epsilon$,有

$$F(z) > F(x_0) - \frac{\epsilon}{2}, \forall z \in D, d(z, x_0) < \delta.$$

对于 $\lambda = \frac{\epsilon}{\delta}$，存在 $z \in \mathrm{dom}\, F$ 且 $d(z, x_0) < \frac{\epsilon}{\lambda} = \delta < \epsilon$，使得

$$F(z) - \lambda d(y, z) \leqslant F(y), y \in D,$$

因此 $F(z) - \lambda d(x_0, z) > F(x_0) - \frac{\epsilon}{2} - \epsilon$，则 $F(x_0) < F(z) - \lambda d(x_0, z) + \frac{3\epsilon}{2}$. 于是

$$F(x_0) < \sup\{F(z) - \lambda d(x_0, z): \lambda > 0, z \in \mathrm{dom}\, F, y \in D, F(y) - F(z) \geqslant -\lambda d(y, z)\} + \frac{3\epsilon}{2}.$$

令 $\epsilon \to 0$，则

$$F(x_0) \leqslant \sup\{F(z) - \lambda d(x_0, z): \lambda > 0, z \in \mathrm{dom}\, F, y \in D, F(y) - F(z) \geqslant -\lambda d(y, z)\}.$$

综上所述，

$$F(x_0) = \sup\{F(z) - \lambda d(x_0, z): \lambda > 0, z \in \mathrm{dom}\, F, y \in D, F(y) - F(z) \geqslant -\lambda d(y, z)\}.$$

(ii) 因为存在 $\lambda > 0, z \in \mathrm{dom}\, F$，

$$F(y) - F(z) > -\lambda d(y, z),$$

$$F(x) = F(z) - \lambda d(x, z), \forall y \in D, y \neq z,$$

则 $x = z$. 则对于任意 $y \in D$ 且 $y \neq x$，有 $F(y) - F(x) > -\lambda d(y, x)$. 则 F 在 x 存在 d-次微分.

又因为存在 $\lambda > 0$ 使得

$$F(y) - F(x) > -\lambda d(y, x), y \in D, y \neq x,$$

且

$$F(x) = F(x) - \lambda d(x, x),$$

所以上确界能够达到.

2 渐近非扩张算子半群的公共不动点

Tan 等[26]应用凸性证明出 Banach 空间渐近非扩张算子半群的遍历定理. 本文中借助度量凸函数，利用类似方法研究渐近非扩张算子半群的公共不动点.

引理 3[34] 设 D 是完备、一致凸、双曲度量空间，则任意单调不增、非空、凸、有界、闭子集族有非空的交集.

下面给出本文第 3 个主要结论，其类似于一致凸 Banach 空间的相关定理[35].

定理 3 设 D 是完备、一致凸、双曲度量空间，C 是 D 的有界闭凸子集，$\mathfrak{F} = \{T(t): t \geqslant 0\}$ 是 C 上渐近非扩张算子半群，则 $\mathfrak{F}$ 存在公共不动点，且公共不动点集是闭凸集.

证明 首先证明 $F(\mathfrak{F})$ 非空. 取 C 中一点 x，令 $r(y) = \overline{\lim}_{t \to \infty} d(T(t)x, y), y \in C$.

因 $d(T(t)x, \cdot)$ 的连续性和凸性[19]，则 r 是 C 上连续度量凸函数. 对于任意 t，$\{y \in C: r(y) \leqslant t\}$ 是闭凸集，根据引理 3，存在 C 中的点 z，使得

$$r(z) = \inf\{r(y): y \in C\} =: r.$$

现在证明 z 是 $\mathfrak{F}$ 的公共不动点. 即：任意 $t \geqslant 0$ 有 $T(t)z = z$. 这需要如下说明：

$$T(t)z \to z, t \to \infty.$$

若不然，则存在子列 $\{T(t_n)z\}$，且存在 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$d(T(t_n)z, z) \geqslant \epsilon_0, n = 1, 2, \cdots.$$

可以设 $r > 0$，选取 $\epsilon > 0$，使得

$$(r + \epsilon)(1 - \delta(r + \epsilon, \frac{\epsilon_0}{r + \epsilon})) < r,$$

其中 δ 是 D 的凸性模. 令 $\eta > 0$ 充分小，使得 $\eta < \epsilon$ 且 $(1 + \eta)(r + \eta) < r + \epsilon$. 本文中选取充分大的 t_0，使得当 $t \geqslant t_0$ 时，$k_t < 1 + \eta$ 且 $d(T(t)x, z) < r + \eta$. 最后选取 N 使得 $s := t_N > t_0$. 现在得到：对于所有的 $t \geqslant t_0$，

$$d(T(t+s)x, T(s)z) \leqslant k_s d(T(t)x, z) \leqslant (1 + \eta)(r + \eta) < r + \epsilon$$

且

$$d(T(t+s)x, z) \leqslant r + \eta < r + \epsilon,$$

则

$$r \leqslant \overline{\lim}_{t \to \infty} d(T(t+s)x, \frac{1}{2}T(s)z \oplus \frac{1}{2}z) \leqslant (r + \epsilon)(1 - \delta(r + \epsilon, \frac{\epsilon_0}{r + \epsilon})) < r.$$

矛盾！说明成立.

现在证明：对于每个 t，$T(t)z = z$. 若不然，则存在 t_0 使得 $T(t_0)z \neq z$. 由 $T(t_0)$ 的连续性推出

$$T(t + t_0)z = T(t_0)[T(t)z] \to T(t_0)z, t \to \infty.$$

另一方面，

$$T(t + t_0)z \to z, t \to \infty.$$

这又是一个矛盾.

每个 $F(T(t))$ 是闭凸集，则 $F(\mathfrak{F}) = \bigcap_{t \geqslant 0} F(T(t))$ 也是闭凸集. 证毕.

3 渐近非扩张算子半群的弱星紧性

彭济根等[36]引入 Banach 空间的一种新的对偶空间，即 Lipschitz 对偶空间. Banach 空间的 Lipschitz 对偶空间是某个包含 E 的 Banach 空间的线性对偶空间. 任何非线性 Lipschitz 算子的 Lipschitz 对偶算子是有界线性算子. 所获结果为推广线性算子理论到非线性情形开辟一条新途径. 本文中利用这些理论，得

到渐近非扩张算子半群是弱星紧集(定理 4).

定义 7[36]　设 E,X 为 Banach 空间,E^* 是 E 的对偶空间. C,B 分别为 E,X 的闭子集(不一定有界). $T:C\to B$ 是 Lipschitz 算子,当且仅当存在 $L>0$,使得

$$\| Tx - Ty \| \leqslant L \| x - y \|, \forall x,y \in C.$$

对于每个 Lipschitz 算子 T,定义其最小 Lipschitz 常数为

$$L(T) = \sup_{x\neq y} \frac{\| Tx - Ty \|}{\| x - y \|}.$$

若记 $\mathrm{Lip}\{C,B\} = \{T:C\to B \mid T$ 为 Lipschitz 算子$\}$,则易验证 $L(\cdot)$为 $\mathrm{Lip}\{C,B\}$上的半范数. 明显地,若 T 为 E 到 X 的有界线性算子,则 T 在 C 上的限制 $T_C \in \mathrm{Lip}\{C,B\}$,且 $L(T_C) \leqslant \| T \|$ (特别地,当 C 包含 E 的单位球时,$L(T_C) = \| T \|$).

证明定理 4 需要一些引理[35].

引理 4[36]　设 $0 \in C$,$\mathrm{Lip}_0\{C,B\} = \{T \in \mathrm{Lip}\{C,B\} \mid T(0) = 0\}$,则 $L(\cdot)$是 $\mathrm{Lip}_0\{C,B\}$上的范数,且 $\{\mathrm{Lip}_0\{C,B\},L(\cdot)\}$为 Banach 空间.

注 1　设 C 是完备一致凸双曲度量空间 D 的有界闭凸子集,可视为 Banach 空间 $l^\infty(D)$ 的子集,$\mathfrak{F} = \{T(t):t\geqslant 0\}$ 是 C 上渐近非扩张算子半群. 则根据定理 3,$\mathfrak{F}$存在一个公共不动点 x. 不失一般性,令不动点 $x=0$. 因此 $\mathfrak{F} \subset \mathrm{Lip}_0\{C,C\}$. 即:$\mathfrak{F}$是 Banach 空间 $\{\mathrm{Lip}_0\{C,C\},L(\cdot)\}$ 的子集.

引理 5[36]　设 $J = \{j(x,y) \in (\mathrm{Lip}_0\{C,X^*\})^* \mid x \in C, y \in X\}$,其中 $j(x,y):\mathrm{Lip}_0\{C,X^*\} \to R$, $T \to (Tx,y)$. $G = \overline{\mathrm{span}}\, J$,则 $\mathrm{Lip}_0\{C,X^*\}$ 等距同构于 G 的线性对偶空间 G^*.

注 2　因为度量空间 D 等距嵌入 $l^\infty(D)$,同时 $l^\infty(D) = (l^1(D))^*$,令 $X = l^1(D)$,$X^* = (l^1(D))^* = l^\infty(D)$,则 $\mathfrak{F} \subset \mathrm{Lip}_0\{C,C\}$ 等距嵌入 G^*.

引理 6[36]　设 $\{T_\sigma\} \subset \mathrm{Lip}_0\{C,X^*\}$ 有界网,$T \in \mathrm{Lip}_0\{C,X^*\}$,则 $\{T_\sigma\}$ 弱星收敛于 T,当且仅当 $\forall x \in C$,$\{T_\sigma x\}$ 弱星收敛于 Tx.

下面给出本文中第 4 个主要结论.

定理 4　设 D 是完备、一致凸、双曲度量空间,C 是 D 的有界闭凸子集,C 上渐近非扩张算子半群 $\mathfrak{F} = \{T(t):t\geqslant 0\}(\subset \mathrm{Lip}_0\{C,[l^1(D)]^*\})$是对偶空间的有界子集,从而$\mathfrak{F}$是弱星紧集.

证明　因为当 $t\to\infty$. 时,$L(T(t)) \to 1$,所以 $\mathfrak{F} = \{T(t):t\geqslant 0\}(\subset \mathrm{Lip}_0\{C,[l^1(D)]^*\})$是对偶空间的有界子集,从而$\mathfrak{F}$是弱星紧集. 证毕.

参考文献:

[1] SOLTAN V, CEPOI V. Solution of Weber's problem for discrete median metric spaces[J]. Trans Inst Math, 1987, 85:52-76.

[2] SOLTAN V. Some properties of d-convex functions Ⅰ[J]. Bull Acad Sci Moldova Ser Phis Techn Math Sci, 1980(1):27-31.

[3] SOLTAN V. Some properties of d-convex functions Ⅱ[J]. Bull Acad Sci Moldova Ser Phis Techn Math Sci, 1981(2):21-26.

[4] SOLTAN V. D-convexity in graphs[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1983, 272:535-537.

[5] SOLTAN V. Metric convexity in graphs[J]. Studia Univ Babes-Bolyai Mathematica, 1991, 36(4):3-43.

[6] SOLTAN V, CEPOI V. Some classes of d-convex functions in graphs[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1980, 273:1314-1317.

[7] SOLTAN V, CEPOI V. D-convexity and steiner functions on a graph[J]. Dokl Akad Nauk BSSR, 1985, 29:407-408.

[8] KRYNSKI S. Metrically convex functions in normed spaces[J]. Studia Math, 1993, 105:1-11.

[9] MENGER K. Untersuchungen über allgemeine metrik[J]. Math Ann, 1928, 100:75-163.

[10] REICH S, SHAFRIR I. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces[J]. Nonlinear Analysis, 1990, 15:537-558.

[11] BUSEMANN H. Spaces with non-positive curvature[J]. Acta Math, 1948, 80:259-310.

[12] GOEBEL K, REICH S. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings[M]// Series of monographs and textbooks in pure and applied mathematics. New York: Marcel Dekker, 1984:148-152.

[13] KIRK W. Fixed point theory for nonexpansive mappings, Ⅰ and Ⅱ[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1981, 886:485-505.

[14] KIRK W. A fixed point theorem in CAT(0) spaces and R-trees[J]. Fixed Point Theory Appl, 2004(4):309-316.

[15] LEUSTEAN L. A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT(0)-spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, 325:386-399.

[16] CLARKSON J. Uniformly convex spaces[J]. Trans Am Math Soc, 1936, 40(3):396-414.

[17] GOEBEL K, SEKOWSKI T, STACHURA A. Uniform convexity of the hyperbolic metric and fixed points of holomorphic mappings in the Hilbert ball[J]. Nonlinear Anal, 1980(4):1011-1021.

[18] KHAMSI M, KHAN A. Inequalities in metric spaces with applications[J]. Nonlinear Anal, 2011, 74:4036-4045.

[19] OPPENHEIM I. Fixed point theorem for reflexive Banach

spaces and uniformly convex non positively curved metric spaces[J]. Math Z,2014,278:649-661.
[20] BELLUCE L,KIRK W. Fixed-point theorems for families of contraction mappings[J]. Pac J Math,1966,18:213-217.
[21] BELLUCE L,KIRK W. Nonexpansive mappings and fixed-points in Banach spaces[J]. Ill J Math,1967,11:474-479.
[22] BROWDER F. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space[J]. Proc Natl Acad Sci,1965,54:1041-1044.
[23] BRUCK R. Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Trans Am Math Soc,1973,179:251-262.
[24] DEMARR R. Common fixed-points for commuting contraction mappings[J]. Pac J Math,1963,13:1139-1141.
[25] LIM T. A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings[J]. Pac J Math,1974,53:487-493.
[26] TAN K K,XU H K. An ergodic theorem for nonlinear semigroups of Lipschitzian mappings in Banach spaces [J]. Nonlinear Anal,1992,19(9):805-813.
[27] KIRK W,XU H. Asymptotic pointwise contractions[J]. Nonlinear Anal,2008,69:4706-4712.
[28] HUSSAIN N,KHAMSI M. On asymptotic pointwise contractions in metric spaces[J]. Nonlinear Anal,2009,71(10):4423-4429.
[29] KHAMSI M,KOZLOWSKI W. On asymptotic pointwise contractions in modular function spaces[J]. Nonlinear Anal,2010,73:2957-2967.
[30] KHAMSI M,KOZLOWSKI W. On asymptotic pointwise nonexpansive mappings in modular function spaces[J]. J Math Anal Appl,2011,380:697-708.
[31] KHAMSI M. Nonlinear semigroups in modular function spaces[J]. Math,1992,379:1-9.
[32] BENYAMINI Y,LINDENSTRAUSS J. Geometric nonlinear functional analysis [M]. Providence RI:American Mathematical Society,2000:11-12.
[33] PHELPS R. Convex functions,monotone operators and differentiability[M]. 2ed. New York:Springer-Verlag,1989:45-47.
[34] KHAMSI M. On metric spaces with uniform normal structure[J]. Proc Am Math Soc,1989,106:723-726.
[35] KOZLOWSKI W. Common fixed points for semigroups of pointwise Lipschitzian mappings in Banach spaces[J]. Bull Aust Math Soc,2011,84:353-361.
[36] 彭济根,徐宗本. Banach 空间的 Lipschitz 对偶及其应用[J]. 数学学报,1999,42(1):61-70.

Metrically convex functions and common fixed points of asymptotically nonexpensive semigroups

LIN Guochen[1*],ZHANG Wen[2]
(1. School of Applied Mathematics,Xiamen University of Technology,Xiamen 361024,China;
2. School of Mathematical Sciences,Xiamen University,Xiamen 361005,China)

Abstract:We prove one conclusion of metrically convex functions which is similar to Theorem Brondsted-Rockafellar in convex analysis,and we characterize the structure of lower semicontinuous metrically convex functions. We obtain that there exist common fixed points for semigroups of asymptotically nonexpensive mappings acting in a complete and uniformly convex metric space which is hyperbolic and such semigroups are weak star compact.

Keywords:metrically convex function;fixed point;asymptotically nonexpensive semigroup