



Lorentz 几何与 Einstein 方程

陈兵龙

中山大学数学学院, 广州 510275

E-mail: mcsobl@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2023-01-21; 接受日期: 2023-03-21; 网络出版日期: 2023-04-26

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005400) 和国家自然科学基金 (批准号: 12141106) 资助项目

摘要 本文综述 Lorentz 几何的一些进展, 包括等距嵌入定理、完备稳态真空的 Bernstein 型定理和局部最优坐标系的构造等. 本文的主要目的是发展 Lorentz 流形上的几何分析并以之来研究 Einstein 方程.

关键词 Lorentz 几何 Einstein 方程 调和映射 正则性估计

MSC (2020) 主题分类 53C50, 83C20

1 引言

1905 年, Einstein^[13] 发表了 5 篇划时代的论文, 其中《论动体的电动力学》是现在所称的狭义相对论, 它将 Maxwell 电动力学运用于运动的物体, 深刻地阐释了时间与空间的内在联系. Minkowski^[26] 将 Einstein、Lorentz 和 Poincaré 的结果用 3+1 维 Minkowski 空间重新表述. 3+1 维 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{3,1}$ 是一个 4 维实线性空间, 配备 Minkowski 内积 (光速 $c=1$)

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot (y_0, y_1, y_2, y_3) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \quad (1.1)$$

1915 年, Einstein^[14] 创立了广义相对论, 将引力表述为 4 维 Lorentz 时空流形 (M, g) 的几何, 并提出了著名的 Einstein 方程

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg = \kappa T, \quad (1.2)$$

其中, g 是 4 维流形 M 上的 Lorentz 度量, Ric 和 R 分别是 g 的 Ricci 曲率和数量曲率, κ 是常数, T 是由空间的物质和能量分布引起的能动张量.

第一个真空 Einstein 方程的非平凡的显式解是 Schwarzschild (1916) 给出的:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

英文引用格式: Chen B-L. Lorentzian geometry and Einstein equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 791–814, doi: 10.1360/SSM-2023-0017

其中 $m > 0$ 为无穷远处测得的天体的引力质量. Schwarzschild 解描述的是旋转对称的静态的真空. 描述绕轴旋转的真空是 Kerr 解 (1963):

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2,$$

其中, $\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta(r) = r^2 - 2mr + a^2$, m 和 ma 是从无穷远处测得的天体的质量和角动量. Einstein 方程其他的特解参见文献 [19].

事实上, 以往用来验证广义相对论与 Newton 引力理论的差别的实验都基于一些特解. 要进一步了解时空的结构, 必须对 Einstein 方程展开深入研究. 按照广义相对论, 引力充当的是背景舞台的角色, 这使得 Einstein 方程与其他物质场在本质上不同. 引力的几何学特质使得研究 Lorentz 几何与研究 Einstein 方程这两件事情等同起来. Lorentz 几何的研究也因此引起了数学家的极大关注.

1965 年, Penrose 通过在 Lorentz 流形上引入一系列基于因果结构的拓扑概念, 运用微分几何的技巧证明了时空的“奇点定理”. 该定理表明, 在自然合适的能量条件和因果条件下, 如果时空有非紧的 Cauchy 面 (Cauchy surface) 和紧致的陷俘面 (trapped surface), 则时空一定会出现奇点. Penrose 引入的陷俘面这一几何概念非常基本, 引发了大量的研究工作 (参见文献 [11, 23, 24, 28, 31]). Hawking 进一步发展了 Penrose 的思想, 将其运用于黑洞的研究之中. 目前, 黑洞唯一性定理和宇宙监督假设 (cosmic censorship conjecture) 等仍然是该领域中未解决的核心问题.

需要强调的是, 广义相对论中的奇点与通常数学中的奇点概念不同 (参见文献 [30]). Penrose 的奇点定理只是断言了时空的不完备性. 在奇点附近, 时空究竟有什么样的结构, 奇点定理本身并没有给我们提供更多的信息. 如同在 Ricci 流等领域那样, 奇点的出现也有积极的一面, 因为奇点结构往往反映了背景空间深刻的拓扑性质.

如何进一步发展 Penrose 与 Hawking 开启的大范围的 Lorentz 几何, 对 Einstein 方程运用爆破等手段来充分地了解奇点以及时空的结构, 将是几何分析的一个重要研究方向.

需要指出的是, 限于篇幅, 本文没有讨论正质量定理、拟局部质量和向量场方法等数学广义相对论中经典的重要课题.

2 类空子流形

2.1 等距嵌入

1916 年, Weyl^[33] 提出了著名的 Weyl 问题: 具有正 Gauss 曲率的紧致定向的曲面能不能等距地嵌入到 3 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中? 这个问题的显然背景是人们希望能够“看到”一个内蕴定义的正曲率的曲面. Weyl 提出了解决该问题的连续性方法, 并证明了开性. 该问题被 Nirenberg^[27] 和 Pogorelov^[29] 完全解决.

对于负曲率情形, 早在 1901 年, Hilbert^[20] 证明了任何完备的单连通的具有常负 Gauss 曲率的曲面不能光滑地等距嵌入到 3 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 中. Efimov^[12] 将该结果推广到 Gauss 曲率具有负上界的情形 ($K \leq -C$).

2015 年, Chen 和 Yin^[8] 重新考虑了 Hilbert 和 Efimov 的结果, 发现如果将 3 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$ 换成 3 维 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{2,1}$, 强负曲率曲面 ($K \leq -C$) 的等距嵌入是可以实现的. 具体而言, Chen 和 Yin 证明了如下定理:

定理 2.1 ^[8] 任何完备单连通 Gauss 曲率具有负上界 $K \leq -C$ 的曲面 (M, g) , 能够光滑逆紧等距地嵌入到 $\mathbb{R}^{2,1}$. 该曲面可以夹在双曲面 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1/C$ 与光锥 $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ 之间, 而且这种嵌入在差 $\mathbb{R}^{2,1}$ 的一个刚体运动的意义下唯一.

假设存在一个等距嵌入 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, 使得对于任意 $x \in M, X(x)$ 都是类时向量 (即 $X(M)$ 落在 O 点的光锥以内). 令 $u = -\langle X, X \rangle$, 那么 u 满足如下的 Monge-Ampère 型方程:

$$\frac{\det(\nabla^2 u + g)}{\det(g)} = -K_g(|\nabla u|^2 + 2u). \quad (2.1)$$

反之, 假如能够求得 (2.1) 的一个正解 u , 则可以证明 Riemann 度量 $\bar{g} = \frac{g + (d\sqrt{2u})^2}{2u}$ 的 Gauss 曲率恒为 -1 . 从而可以构造一个从 $(M, \bar{g})$ 到 $\mathbb{R}^{2,1}$ 中 (上半叶) 虚单位球 $\mathbb{H} = \{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, x_0 > 0\}$ 的等距映射 i . 可以证明, 在 $\mathbb{R}^{2,1}$ 的极坐标系下, 映射 $I: (M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}, I(y) = (i(y), \sqrt{2u})$, 是一个等距嵌入.

这样, 上述等距嵌入问题就归结为如何在 (M, g) 上求解 (2.1). 为求解 (2.1), 固定 $x_0 \in M$, 考虑一系列开球 $\Omega_l = B(x_0, l)$ ($l = 1, 2, 3, \dots$). 下面在 Ω_l 上求解 Dirichlet 问题:

$$\frac{\det(\nabla^2 u + g)}{\det(g)} = -K_g(|\nabla u|^2 + 2u), \quad u|_{\partial B(x_0, l)} = \frac{1}{2C_2(l)}, \quad (2.2)$$

其中 $C_2(l) = \max_{x \in \bar{B}(x_0, l)} (-K_g(x))$. 假设 Gauss 曲率在整个流形上有一个负的上界,

$$K_g \leq -C_1, \quad (2.3)$$

其中 $C_1 > 0$. 显然 $u_0 = \frac{1}{2C_2(l)}$ 是 (2.2) 的一个下解. 用连续性方法可知 (2.2) 可解, 它的解 u_l 满足 $\nabla^2 u + g > 0$ 并且有

$$\frac{1}{2C_2(l)} \leq u_l \leq \frac{1}{2C_1}. \quad (2.4)$$

我们希望 u_l 有一个收敛子列, 使得收敛的极限是 (2.1) 的解. 任意给定 $k_0 > 0$ 和 $k > 0$, 希望能够证明

$$\sup_l |u_l|_{C^k(B(x_0, k_0))} \leq D(k_0, k), \quad (2.5)$$

其中 $C^k(B(x_0, k_0))$ 用覆盖 $B(x_0, k_0)$ 的 (任意) 一族局部坐标系来定义.

在推导更精细的零阶估计之前, 可以先根据 (2.4) 处理一阶估计. 考虑闸函数

$$\xi(\cdot) = \frac{1}{2C_2(l)} + \frac{2}{\sqrt{C_1}}(l - d(x_0, \dots)). \quad (2.6)$$

利用比较定理, 我们发现 $\frac{1}{2C_2(l)} \leq u_l \leq \xi$. 在边界上, 这蕴涵了 $|\nabla u_l|_{\partial B(x_0, l)} \leq \frac{2}{\sqrt{C_1}}$. 考虑 $|\nabla u_l|^2 + 2u_l$ 的极大值. 如果该极大值在区域内部某点 $\bar{x}$ 达到, 则 $(\nabla u_l)(\bar{x}) = 0$, 因为在 $\bar{x}$ 点, $0 = \nabla_i(|\nabla u_l|^2 + 2u_l) = 2((u_l)_{ij} + g_{ij})(u_l)_j$ 和 $\nabla^2 u_l + g > 0$ 成立. 因此, 得到 u_l 的一致的梯度估计 (与 l 无关):

$$\sup_{B(x_0, l)} |\nabla u_l| \leq \frac{2}{\sqrt{C_1}}. \quad (2.7)$$

如果要避免 $\inf_{B(x_0, k_0)} u_l$ 趋于 0, 估计 (2.4) 是不够用的. 注意, 我们没有假设 Gauss 曲率有下界, 即当 l 趋于无穷时, $C_2(l)$ 可能会趋于 0. 这要求我们必须去发展纯粹的局部估计.

现在推导局部的零阶估计: 任意给定 $r_0 > 0$, 存在仅依赖于 r_0 和 C_1 的常数 $C > 0$, 使得只要 $\bar{B}(\tilde{x}, r_0) \subset B(x_0, l)$, 就有

$$u_l(\tilde{x}) \geq \frac{C^{-1}}{\max_{\bar{B}(\tilde{x}, r_0)}(-K_g)}. \quad (2.8)$$

我们去掉下标 l . (2.8) 的证明需要利用解 $u = u_l$ 来构造一个截断函数 $\psi^{\tilde{x}}$.

假设 $u(\tilde{x}) < \frac{r_0}{4\sqrt{c_2} \coth(r_0\sqrt{c_2})} \triangleq \frac{r_0}{2r_2}$, 其中 $c_2 = \max_{\bar{B}(\tilde{x}, r_0)}(-K_g)$, $r_2 = 2\sqrt{c_2} \coth(r_0\sqrt{c_2})$, 令 $\xi = u + \frac{d^2(\tilde{x}, \cdot)}{r_0 r_2}$, $Q_{\tilde{x}} = \{\xi < \frac{r_0}{r_2}\} \subset B(\tilde{x}, r_0)$, $\psi^{\tilde{x}} = \frac{r_0}{r_2} - \xi \triangleq \zeta$. 考虑函数 u/ζ 在区域 $Q_{\tilde{x}}$ 上的最小值. 它在边界 $\partial Q_{\tilde{x}}$ 上为无穷大, 所以 u/ζ 的最小值一定在内部某点 $\bar{x} \in Q_{\tilde{x}}$ 达到. 在点 $\bar{x}$, 选一个合适的坐标系使得 $\text{Hess}(u)$ 对角化, 即 $u_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. 由极值原理, 有

$$\frac{\nabla u}{u}(\bar{x}) = \frac{\nabla \zeta}{\zeta}(\bar{x}), \quad 0 \leq \frac{\nabla^2 u}{u}(\bar{x}) - \frac{\nabla^2 \zeta}{\zeta}(\bar{x}). \quad (2.9)$$

利用方程 (2.1), 在 $\bar{x}$ 点, 有

$$\begin{aligned} \sum \frac{\nabla_{ii}\zeta}{1+\lambda_i} &\leq 2\frac{\zeta}{u} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}}\right) = 2\frac{\zeta}{u} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(-K_g)(|\nabla u|^2 + 2u)}}\right) \\ &= 2\frac{\zeta}{u} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(-K_g)(|\nabla \zeta|^2 u^2/\zeta^2 + 2(u/\zeta)\zeta)}}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

由 $|\nabla \zeta| \leq \frac{3}{\sqrt{C_1}}$ 和 $\nabla^2 \zeta \geq -(\nabla^2 u + g)$ (比较定理) 以及 (2.10), 有

$$\frac{u}{\zeta} \geq \frac{1}{\sqrt{(-K_g)(\frac{9}{C_1} u^2/\zeta^2 + 2\frac{r_0}{r_2}(u/\zeta))}} - 1. \quad (2.11)$$

这可以推导出

$$\frac{u}{\zeta}(\bar{x}) \geq \min \left\{ 1, \frac{2C_1 r_0}{9r_2}, \frac{r_2}{16r_0 c_0} \right\}. \quad (2.12)$$

由 (2.12) 可推导出 (2.8).

现在已经有了函数本身的局部上下界 (2.4) 和 (2.8) 以及一阶导数估计 (2.7). 下面根据 (2.4)、(2.8) 和 (2.7) 想办法推导出纯粹局部的二阶估计.

在一个固定的单连通区域 Ω 上定义 Riemann 度量

$$d\bar{s}^2 = \sum_{ij} (\nabla_{ij} u + g_{ij}) dx^i dx^j. \quad (2.13)$$

由单值化定理, $(\Omega, d\bar{s}^2)$ 共形等价于单位圆盘 $\{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $z = x + iy$,

$$d\bar{s}^2 = \mu(x, y)(dx^2 + dy^2). \quad (2.14)$$

设 x^1 和 x^2 是 Ω 的一个固定的坐标系. 将 (2.14) 按 x^1 和 x^2 坐标的分量写出来 (共形关系):

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{11}^2 u + g_{11}}{\sqrt{(-K_g)(|\nabla u|^2 + 2u)}} &= \frac{|Dx^2|^2}{Dx^1 \wedge Dx^2}, \\ \frac{\nabla_{22}^2 u + g_{22}}{\sqrt{(-K_g)(|\nabla u|^2 + 2u)}} &= \frac{|Dx^1|^2}{Dx^1 \wedge Dx^2}, \\ -\frac{\nabla_{12}^2 u + g_{12}}{\sqrt{(-K_g)(|\nabla u|^2 + 2u)}} &= \frac{Dx^1 \cdot Dx^2}{Dx^1 \wedge Dx^2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中,

$$\begin{aligned} Dx^1 \cdot Dx^2 &= (x^1)_x (x^2)_x + (x^1)_y (x^2)_y, \\ |Dx^1|^2 &= Dx^1 \cdot Dx^1, \quad |Dx^2|^2 = Dx^2 \cdot Dx^2, \\ Dx^1 \wedge Dx^2 &= (x^1)_x (x^2)_y - (x^1)_y (x^2)_x. \end{aligned}$$

可以看出, x^1 和 x^2 (作为 x 和 y 的函数) 的 C^1 估计加上 $Dx^1 \wedge Dx^2$ 的下界估计可以推导出函数 u (作为 x^1 和 x^2 的函数) 的 C^2 估计. 这里, 假设变换 $(x, y) \rightarrow (x^1, x^2)$ 是保定向的. 现在开始推导这些估计.

下面这些函数都看作 x^1 、 x^2 、 u 、 p_1 和 p_2 ($p_1 = u_1$, $p_2 = u_2$) 这 5 个变量的函数:

$$\begin{aligned} A &= -\Gamma_{11}^i p_i + g_{22}, \quad B = -\Gamma_{12}^i p_i + g_{12}, \quad C = -\Gamma_{22}^i p_i + g_{11}, \\ D &= g^{kl} p_k p_l + 2u, \quad K = -K_g \det(g_{ij}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

原方程变成

$$(\partial_1^2 u + A)(\partial_2^2 u + C) - (\partial_{12}^2 u + B)^2 = KD. \quad (2.17)$$

$x^1 = x^1(x, y)$ 和 $x^2 = x^2(x, y)$ 满足方程

$$\begin{aligned} Lx^1 &= h_1 |Dx^1|^2 + h_2 Dx^1 \cdot Dx^2 + h_3 |Dx^2|^2 + h_4 Dx^1 \wedge Dx^2, \\ Lx^2 &= \tilde{h}_1 |Dx^1|^2 + \tilde{h}_2 Dx^1 \cdot Dx^2 + \tilde{h}_3 |Dx^2|^2 + \tilde{h}_4 Dx^1 \wedge Dx^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中 $L = \frac{1}{\sqrt{K}}[\partial_x(\sqrt{K}\partial_x) + \partial_y(\sqrt{K}\partial_y)]$ 是一个散度形式的椭圆算子,

$$\begin{aligned} h_1 &= -B_{p_2} - (\sqrt{D})_{x^1} - (\sqrt{D})_u p_1 + (\sqrt{D})_{p_1} A + (\sqrt{D})_{p_2} B, \\ h_2 &= -C_{p_2} + B_{p_1} - (\sqrt{D})_{x^2} - (\sqrt{D})_u p_2 + (\sqrt{D})_{p_2} C + (\sqrt{D})_{p_1} B, \\ h_3 &= C_{p_1}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$h_4 = \frac{1}{\sqrt{KD}} \left(C_{x^1} + C_u p_1 - B_{x^2} - B_u p_2 - C_{p_1} A - (C_{p_2} - B_{p_1})B + B_{p_2} C - \frac{D_{p_1} K}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= A_{p_2}, \\ \tilde{h}_2 &= B_{p_2} - A_{p_1} - (\sqrt{D})_{x^1} - (\sqrt{D})_u p_1 + (\sqrt{D})_{p_1} A + (\sqrt{D})_{p_2} B, \\ \tilde{h}_3 &= -B_{p_1} - (\sqrt{D})_{x^2} - (\sqrt{D})_u p_2 + (\sqrt{D})_{p_2} C + (\sqrt{D})_{p_1} B, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\tilde{h}_4 = -\frac{1}{\sqrt{KD}} \left(A_{x^2} + A_u p_2 - B_{x^1} - B_u p_1 - A_{p_2} C - (A_{p_1} - B_{p_2})B + B_{p_1} A - \frac{D_{p_2} K}{2} \right).$$

由 u 的零阶和一阶估计推导出 $|h_i|_{C^0(\Omega)} \leq C_\Omega$. 方程 (2.18) 的右端被形式为 $a(|Dx^1|^2 + |Dx^2|^2) + b$ 的函数所控制. 要使用散度形方程的 Campanato 技巧, 还需要对系数 $\sqrt{K}$ 作出控制. 注意 $\sqrt{K}$ 关于 x^1 和 x^2 的 Hölder 模 $[\sqrt{K}]_{C_x^\mu}$ 有一致估计 (它原来就是 x^1 和 x^2 的 C^∞ 函数). x^1 和 x^2 的 C^0 估计加上共形关系可以推导出

$$\int_{|z|<1} |Dx^1|^2 + |Dx^2|^2 \leq C_\Omega. \quad (2.21)$$

因为 (x^1, x^2) 是具有有限 Dirichlet 能量的同胚映射, 根据 Courant-Lebesgue 引理, (x^1, x^2) 的连续模有一致估计

$$\text{Osc}_{B(x_0, R)}(x^1, x^2) \leq C \frac{1}{\log(1/R)} \quad (2.22)$$

对所有的 $B(x_0, \sqrt{R}) \subset \{|z| < 1\}$ 成立. 一旦有了连续模估计 (2.22), 对 (2.18) 使用散度形方程的 Campanato 技巧 (凝固系数法, 参见文献 [32, 定理 2.4.4]), 可以推导出 $\|x^1, x^2\|_{C_{\text{loc}}^{1, \mu}}$ 的一致估计.

现估计 $Dx^1 \wedge Dx^2$. 从 (2.19) 和 (2.20) 可以推导出

$$\begin{aligned} h_1 - \tilde{h}_2 &= -2B_{p_2} + A_{p_1} = -\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2, \\ h_2 - \tilde{h}_3 &= -C_{p_2} + 2B_{p_1} = \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1, \\ h_3 &= -\Gamma_{22}^1, \quad \tilde{h}_1 = -\Gamma_{11}^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

这些函数都是关于 (x^1, x^2) 的 Lipschitz 函数 (Lipschitz 常数一致有界). 一旦这个结构条件成立, 根据文献 [32, 定理 9.4.1 或 8.3.2], 可以得到 Jacobi 的一致下界估计, 即任意给定 $0 < R < 1$, 有

$$Dx^1 \wedge Dx^2|_{\{|z| < R\}} \geq \frac{1}{C(\Omega, R)}. \quad (2.24)$$

根据 (2.15)、(2.24) 和 $\|x^1, x^2\|_{C_{\text{loc}}^{1, \mu}}$ 估计, 对于任意正整数 $k_0 > 0$, $0 < \mu < 1$, 存在常数 $D(k_0, \mu) > 0$ 使得

$$\sup_{\Omega_l \supset B(x_0, k_0+1)} |u_l|_{C^{2, \mu}(B(x_0, k_0))} \leq D(k_0, \mu), \quad (2.25)$$

其中范数 $C^{2, \mu}$ 是用任意 (固定好的) 能覆盖 $B(x_0, k_0)$ 的有限个坐标系来定义的.

利用二阶估计 (2.25) 和标准的椭圆方程 Schauder 估计可以推导出高阶导数的估计 (2.5).

注 2.1 Guan^[18] 证明了负曲率的测地星形圆盘有到 $\mathbb{R}^{2,1}$ 的等距嵌入. 假设完备单连通负曲率曲面的曲率能衰减到二次方以上, Hong^[21] 证明等距嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 能够实现.

定理 2.1 说明对于强负曲率曲面的等距嵌入问题, 合适的目标空间应该是 $\mathbb{R}^{2,1}$ 而不是 $\mathbb{R}^3$. 目前还不知道如何将定理 2.1 推广到具有负截面曲率的高维流形. 是否可以通过增加余维数 m , 来证明任意一个 n 维完备单连通的截面曲率具有负上界 $K \leq -C$ 的 Riemann 流形 (M^n, g) , 都可以作为类空子流形等距地嵌入到 $\mathbb{R}^{n, m}$ 中? 如果能够找到这样的嵌入, 我们就能从外几何 (extrinsic geometry) 的角度去研究负曲率流形.

如下结论是定理 2.1 的一个推论:

推论 2.1 令 (M, g) 是一个具有负 Gauss 曲率 $K < 0$ 的紧致 Riemann 面, 则在 (M, g) 上存在一个光滑的二阶对称协变张量 h_{ij} 使得

$$R_{ijkl} = -[h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}], \quad \nabla_i h_{jk} = \nabla_j h_{ik}. \quad (2.26)$$

如果将上面第一式中的负号变成正号, 则得到 Euclid 空间中超曲面满足的 Gauss-Codazzi 方程, 其中 h_{ij} 是该曲面的第二基本形式.

定义 2.1 设 (M, g) 是 n 维 Riemann 流形, 如果在 M 上存在一个光滑的二阶对称协变张量 h_{ij} 使得 (2.26) 成立, 则称 (M, g, h) 为类空流形 (spacelike manifold).

推论 2.1 指出具有负 Gauss 曲率的紧致曲面是类空流形.

定理 2.2^[9] 设 (M^n, g, h) 为偶数维紧致类空流形, 则它带符号的 Euler 示性数是非负的, 即 $(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(M^n) \geq 0$; 并且等号成立当且仅当 M^n 的单形体积 (simplicial volume) 为 0 或极小体积 (minimal volume) 为 0.

假设 (M^n, g) 是一个具有负截面曲率的偶数维紧致 Riemann 流形, Hopf 猜测它带符号的 Euler 示性数是正的. 该猜测当维数大于 4 时, 除了 Kähler 情形, 人们所知不多. 一个更一般的猜测属于 Singer: 任意一个偶数维紧致的 aspherical 流形 (即 $\pi_i = 0, i \geq 2$), 它的带符号的 Euler 示性数是非负的. 负截面曲率的 Riemann 流形一定是 aspherical 流形. 可以证明, 一个紧致的类空流形一定是 aspherical 流形. 定理 2.2 指出, 对于类空流形而言, Singer 猜想是对的.

定理 2.2 的证明需要引入如下“内在”平均曲率流:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= -2R_{ij} + 2h_{ik}h_{jl}g^{kl}, \\ \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} &= \Delta h_{ij} - R_{ip}h_{qj}g^{pq} - R_{jp}h_{qi}g^{pq} + 2h_{ip}h_{jq}h_{kl}g^{pk}g^{lq} - h_{pq}h_{kl}g^{pk}g^{ql}h_{ij}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

如果 $h \equiv 0$, 则 (2.27) 就是 Ricci 流. 在 (2.27) 下, 只要 (2.26) 在初始时刻成立, 就可以证明 (2.26) 将继续保持. 可以证明解一定是长时间存在的, 而且当时间趋于无穷大时, 某种弱形式的厚薄 (thick-thin) 分解会发生. 类空流形存在弱形式的厚薄分解, 这个事实已经可以回答上述的 Euler 示性数的问题. 定理 2.2 似乎是在高维情形 ($n \geq 4$), 能运用“几何化”思想来处理拓扑问题的一个例子. 这种例子应该是非常稀少的.

2.2 极大子流形

关于极小曲面的 Bernstein 定理说, 如果 $\mathbb{R}^3$ 中的任意极小子流形 (平均曲率为 0) 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个图, 那么它一定是超平面. 这个定理一直到维数为 7 都是对的, 即 $\mathbb{R}^8$ 中的 7 维极小图是超平面.

在 Lorentz 情形下, 平均曲率为 0 的类空超曲面称为极大类空超曲面. 1968 年, Calabi^[3] 猜测 $\mathbb{R}^{n-1,1}$ 中任何整个极大的类空超曲面 (entire maximal spacelike hypersurface) 一定是超平面, 并提供了低维情形 ($n \leq 4$) 的证明. Cheng 和 Yau^[10] 证明了 Calabi 的猜测, 即上述极大类空超曲面的 Bernstein 性质对任意维数都成立. 事实上, 他们证明了一个更一般的结果 (参数化形式), 只要假设该极大曲面是闭的即可:

定理 2.3^[10] 设 M 是 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{n,1}$ 中具有常平均曲率的 n 维类空超曲面, 假设 M 关于 Euclid 空间的拓扑是闭的, 则有

$$|h_{ij}|^2 \leq |H|^2, \quad (2.28)$$

其中, h_{ij} 是第二基本形式, $H = g^{ij}h_{ij}$ 是平均曲率.

当 M 极大时, $H = 0$, 可以推导出 $h_{ij} = 0$, 即 M 是一个超平面.

首先, 若 $0 \in M$, $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ 是位置向量映射, 只要 M 是类空且关于 Euclid 拓扑是闭的, 函数 $z = \langle X, X \rangle$ 就是一个非负的逆紧的函数. 通过梯度估计的方法, 可以证明存在一个仅依赖常平均曲率 H 的常数 B 使得

$$\frac{|\nabla z|^2}{(1+z)^2} \leq B. \quad (2.29)$$

沿着测地线积分上式, 可以推导出 M 是测地完备的. 另外, 第二基本形式 h_{ij} 满足方程

$$\frac{1}{2} \Delta |h_{ij}|^2 = |\nabla_k h_{ij}|^2 + |h_{ij}|^4 - h_{ij}h_{jk}h_{ki}H. \quad (2.30)$$

利用该方程的非线性性质以及 M 的完备性, 通过作局部估计, 再令区域趋向于全空间可以推导出 $|h_{ij}|^2$ 的整体估计. 整体估计的结果是: $|h_{ij}|^2$ 有界, 并且存在一列点 $x_l \in M$ 使得 $\lim_{l \rightarrow \infty} |h_{ij}|^2(x_l) = \sup_M |h_{ij}|^2$ 以及

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |h_{ij}|^4(x_l) - h_{ij}h_{jk}h_{ki}H(x_l) \leq 0. \quad (2.31)$$

这可以推导出 (2.28).

3 Einstein 方程稳态解

定理 3.1 ^[4] 设 (M, g) 是一个具有类时 Killing 向量场的完备 4 维时空, 度量 g 满足 Einstein 方程 $\text{Ric}(g) = \lambda g$, $\lambda \geq 0$. 那么 (M, g) 是平坦的.

这方面最早的研究属于 Einstein 和 Pauli ^[15]. 1955 年, 法国数学家 Lichnerowicz ^[25] 在假设时空是时序 (chronological) 并且渐近平坦的情形下证明了该定理. 时空是时序的是指时空不含类时闭曲线. 在时序条件下, 时空有 $3+1$ 维的分解 $M = N \times \mathbb{R}$. 2000 年, 美国数学家 Anderson ^[1] 去掉了渐近平坦的条件, 但是他仍然假设了时序条件. Anderson ^[1] 将如何去掉时序条件作为一个问题提出. 无论是渐近平坦还是时序条件都是整体的条件. 要完全解决这个问题, 必须发展纯粹局部的先验估计.

设 X 是类时 Killing 向量场, X_* 是通过用 Lorentz 度量下降 X 的指标得到的 1- 形式. 记 Lorentz 度量为 $\bar{g}$, $u^2 = -\bar{g}(X, X)$, 定义一个 (自然联系于 X 的) Riemann 度量

$$\hat{g} = 2u^{-2}X_* \otimes X_* + \bar{g}. \quad (3.1)$$

定理 3.2 ^[4] 设 $(M, \bar{g})$ 是一个具有类时 Killing 向量场 X 的 4 维时空, $\bar{g}$ 满足 $\text{Ric}(\bar{g}) = \lambda \bar{g}$. 令 $\hat{B}(x_0, a)$ 是 $\hat{g}$ 度量下以 x_0 为心、 a 为半径的球, 假设它的闭包是紧的, 则存在一个万有常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \hat{B}(x_0, \frac{a}{2})} |\text{Rm}(\bar{g})|_{\bar{g}} \leq C(a^{-2} + \max\{-\lambda, 0\}). \quad (3.2)$$

(3.2) 的估计相当于度量 $\bar{g}$ 的二阶估计, 要证明 (3.2), 需要先作一阶估计.

物理学家已经知道 (参见文献 [16, 17]), Einstein 方程的稳态解会联系一个调和映射. 这个调和映射的能量密度可以控制 $\bar{g}$ 和 X 的一部分一阶导数. 之前因为都假设了时序条件, 人们都着眼于在 3 维流形上用这个调和映射. 本文的思路是在 4 维时空上使用这个调和映射, 推导出局部曲率估计.

换个角度看, 可以先推导向量场 X 的正则性估计. Lie 导数 $\mathcal{L}_X \bar{g}$ 控制了 $D_{\bar{g}} X$ 的对称部分, 自然只需要控制反对称部分 (张量) $A: TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$:

$$A(Y, Z) = \langle D_Y^{\bar{g}} X, Z \rangle - \langle D_Z^{\bar{g}} X, Y \rangle, \quad (3.3)$$

其中 Y 和 Z 是切向量场. 称与 X 正交的子丛为水平子丛 (horizontal subbundle). 令 $P: TM \rightarrow TM$ 是到水平子丛的正交投影, 则

$$\Lambda(\cdot, \cdot) = -u^{-2}A(P\cdot, P\cdot), \quad \nabla \log u = d(\log u)(P\cdot) \quad (3.4)$$

为两个 “水平” 张量. Λ 是 2- 形式, 通过水平的 Hodge 对偶将它转化成 1- 形式:

$$\omega = u^3 *_3 \Lambda. \quad (3.5)$$

为简单起见, 讨论 $\lambda = 0$ 的情形. 通过伸缩, 可以设 $a = 1$. 我们要证明的关键一阶估计是: 存在一个万有常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \hat{B}(x_0, 1)} d_{\hat{g}}^2(x, \partial \hat{B}(x_0, 1)) \left(2|\nabla \log u|_{\hat{g}}^2 + \frac{1}{2}|\omega|_{\hat{g}}^2 u^{-4} \right) \leq C. \quad (3.6)$$

下面使用反证法, 假设估计 (3.6) 不对, 那么会有一列带类时 Killing 向量场的标记 Lorentz 流形 $(\bar{M}_j, \bar{g}_j, X_j, P_j)$ 使得 $\text{Ric}(\bar{g}_j) = 0$,

$$\sup_{x \in \hat{B}(P_j, 1)} d_{\hat{g}_j}^2(x, \partial \hat{B}(P_j, 1)) \left(2|\nabla \log u_j|_{\hat{g}_j}^2 + \frac{1}{2}|\omega_j|_{\hat{g}_j}^2 u_j^{-4} \right)(x) = m_j^2 \geq j \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

选一个能达到 (3.7) 上确界的点 $\bar{x}_j$ 使得

$$d_{\hat{g}_j}^2(\bar{x}_j, \partial \hat{B}(P_j, 1)) \left(2|\nabla \log u_j|_{\hat{g}_j}^2 + \frac{1}{2}|\omega_j|_{\hat{g}_j}^2 u_j^{-4} \right)(\bar{x}_j) = m_j^2. \quad (3.8)$$

用 $\epsilon_j^{-2} \triangleq 2|\nabla \log u_j|_{\hat{g}_j}^2 + \frac{1}{2}|\omega_j|_{\hat{g}_j}^2 u_j^{-4}(\bar{x}_j)$ 伸缩度量 $\bar{g}_j$ 和 $\hat{g}_j$. 合适地伸缩 X_j , 使得对新的度量和 Killing 向量场 (仍用同样记号) 有 $\text{Ric}(\bar{g}_j) = 0$ 和

$$\begin{aligned} 2|\nabla \log u_j|_{\hat{g}_j}^2 + \frac{1}{2}|\omega_j|_{\hat{g}_j}^2 u_j^{-4}(\bar{x}_j) &= 1, \\ 2|\nabla \log u_j|_{\hat{g}_j}^2 + \frac{1}{2}|\omega_j|_{\hat{g}_j}^2 u_j^{-4}(x) &\leq (1 - \epsilon)^{-2}, \quad x \in \hat{B}(\bar{x}_j, \epsilon m_j). \end{aligned} \quad (3.9)$$

一个大致的想法是, 令 $j \rightarrow \infty$, 通过取“极限”来得到一个矛盾.

为了记号简便, 去掉下标 j . 想办法将 $(2|\nabla \log u|_{\hat{g}}^2 + \frac{1}{2}|\omega|_{\hat{g}}^2 u^{-4})(x)$ 看作某调和映射的能量. 这个想法来自物理学家. 最初在 3 维轨道空间上定义, 当假设时空是时序的, 这个 3 维空间是存在的, 而且是一个 Hausdorff 流形. 但是当时空不是时序时, 轨道空间可能性质很差. 一个简单的紧的例子是二维的环面 (赋予平坦的 Minkowski 度量), 在它上面考虑无理常向量场, 它是 Killing 的, 但是商空间连 Hausdorff 都不是. 非紧的例子可以考虑 Minkowski 环面和 $\mathbb{R}^k$ 的乘积.

本文的处理方式是坚持在原来的时空流形上考虑.

首先, 任意给定一个点 P 以及经过该点的一张 (局部的) 类空超曲面 Σ , 假设 x^1 、 x^2 和 x^3 是在 Σ 上 P 点附近的局部坐标系, $x^1(P) = x^2(P) = x^3(P) = 0$, 通过积分 X 并令积分曲线的仿射参数 t 在 Σ 上为 0, $\{t, x^1, x^2, x^3\}$ 构成了 P 点附近一个局部坐标系. 在该局部坐标系下, 度量 $\bar{g}$ 和 $\hat{g}$ 有如下表达式:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= -u^2(dt + \theta)^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \\ \hat{g} &= u^2(dt + \theta)^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中, $\theta = \theta_i dx^i$ 是水平的 1-形式, $X_* = -u^2(dt + \theta)$, g_{ij} 、 θ 和 u 不随时间而改变. 令 $e_0 = X$, $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \theta_i \frac{\partial}{\partial t}$, 则 $\{e_\alpha : \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ 构成了切空间的一个基底, $\{e_i : i = 1, 2, 3\}$ 构成水平基底. 不难证明, $[e_0, e_j] = 0$, $[e_i, e_j] = -\Lambda_{ij}e_0$, $\langle e_0, e_i \rangle = 0$, $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$, $\Lambda_{ij} = \nabla_i \theta_j - \nabla_j \theta_i$, 其中 $\nabla_i \theta_j$ 是张量 θ 关于度量 g 的协变导数.

在基底 $\{e_\alpha : \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ 下, $\bar{g}$ 的曲率张量有如下表达式:

$$\begin{aligned}\bar{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) &= R_{ijkl} - \frac{u^2}{4}(\Lambda_{il}\Lambda_{jk} - \Lambda_{ik}\Lambda_{jl}) + \frac{u^2}{2}\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}, \\ \bar{R}(e_i, e_j, e_k, e_0) &= \frac{1}{2}(u^2\nabla_k\Lambda_{ij} + \nabla_k u^2\Lambda_{ij}) - \frac{1}{4}(\nabla_i u^2\Lambda_{jk} - \nabla_j u^2\Lambda_{ik}), \\ \bar{R}(e_i, e_0, e_j, e_0) &= u\nabla_{ij}u + \frac{u^4}{4}\Lambda_{ik}\Lambda_{jl}g^{kl},\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 R_{ijkl} 是 g_{ij} 的曲率张量. 通过取迹, 可以得到 Ricci 曲率公式 (利用 (3.5)),

$$\begin{aligned}R_{ij} &= u^{-1}\nabla_i\nabla_j u + \frac{1}{2}u^{-4}(\omega_i\omega_j - |\omega|^2 g_{ij}) + \bar{\text{Ric}}(e_i, e_j), \\ \Delta u &= -\frac{1}{2}u^{-3}|\omega|^2 + u^{-1}\bar{\text{Ric}}(X, X), \\ g^{kl}\nabla_k\omega_l &= 3g^{kl}\omega_k\nabla_l \log u, \\ (*d\omega)_j &= \pm 2u\bar{\text{Ric}}(X, e_j).\end{aligned}\tag{3.12}$$

我们将 (3.12) 理解成是关于 g_{ij} 、 u 和 θ 这 3 个量的方程.

(3.12) 最后一式告诉我们, 如果 $\bar{\text{Ric}}(X, Y) = 0$ 对任意水平向量 Y 都成立, 那么有 $d\omega = 0$. 根据 Poincaré 引理, 局部存在一个函数 ψ 使得 $\omega = d\psi$. 令 $g_H = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ 是 Poincaré 上半平面 $H = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 上的双曲度量 ($K \equiv -1$). 这时, 定义局部从 M 到 H 的映射 $\Phi = (\psi, u^2) = (x, y)$. 我们有

$$\Phi^*g_H = u^{-4}\omega \otimes \omega + 4d\log u \otimes d\log u,\tag{3.13}$$

$$\hat{\Delta}\Phi = 2\bar{\text{Ric}}(X, X)\frac{\partial}{\partial y},\tag{3.14}$$

其中 $\hat{\Delta}$ 是从 $(M, \hat{g})$ 到 (H, g_H) 的调和映射 Laplace 算子. 特别地, 当 $\bar{\text{Ric}} \equiv 0$ 时, Φ 是从 $(M, \hat{g})$ 到 (H, g_H) 的 (局部定义的) 调和映射. 它的能量密度刚好是 $e(\Phi) = 4|\nabla \log u|^2 + u^{-4}|\omega|^2$.

利用 (3.14), 通过计算调和映射的能量满足的 Bochner 公式, 有

$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{g}}h &= 4|\nabla \log u|^4 + |\omega|^2|\nabla \log u|^2 + |2\nabla_{ij}\log u + u^{-4}\omega_i\omega_j|^2 \\ &\quad + u^{-4}|\nabla_i\omega_j - 2\omega_i\log u_j - 2\omega_j(\log u)_i|^2 + 5|u^{-2}\omega \wedge d\log u|^2 \\ &\geq 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中 $h = \frac{1}{2}e(\Phi) = 2|\nabla \log u|_{\hat{g}}^2 + \frac{1}{2}|\omega|_{\hat{g}}^2 u^{-4}(x)$. 注意, (3.15) 是整体成立的.

如果 h 在内部取得 (非零) 极大值, 那么在极大值点处, 由 (3.15) 有 $h = 0$, 这将给出矛盾. 回到 (3.9), 我们希望通过取极限, 使得 h 在极限上能够取得局部极大值. 我们希望极限流形和极限度量足够光滑, 使得方程 (3.15) 在某种意义下还成立.

注意 $\bar{g}$ 的曲率公式 (3.11) 包含了 $\nabla^2 u$ 和 $\nabla\omega$ 这些二阶的量. 所以在条件 (3.9) 下不能期望全曲率张量有界.

一个关键观察是, 通过一个共形变换 $u^2\bar{g}$, 可以消去水平 Ricci 曲率张量 ((3.12) 第一式) 中的

$u^{-1}\nabla^2 u$. 在新的水平度量 $\tilde{g} = u^2 g$ 下, 有

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ij} &= \frac{1}{2}u^{-4}\omega_i\omega_j + 2\frac{u_i u_j}{u^2} + \bar{\text{Ric}}(e_i, e_j) - u^{-2}\bar{\text{Ric}}(X, X)g_{ij}, \\ u^2\tilde{\Delta}\log u &= -\frac{1}{2}u^{-4}|\omega|^2 + u^{-2}\bar{\text{Ric}}(X, X), \\ \tilde{g}^{kl}\tilde{\nabla}_k\omega_l &= 4\tilde{g}^{kl}\omega_k\nabla_l\log u, \\ (*_{\tilde{g}}d\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \pm 2\bar{\text{Ric}}(X, e_j).\end{aligned}\quad (3.16)$$

尽管共形之后还是不能控制全曲率张量, 但是水平方向的曲率 ((3.11) 的第一式) 变成有界.

现在定义水平的指数映射. 令 $\bar{x}_j \triangleq \bar{x}$ 是 (3.9) 中 h 的几乎极大值点. 令 $E = \mathcal{H}_{\bar{x}} \subset T_{\bar{x}}M$ 是与 X 垂直的 (水平) 子空间, $\exp_E : E \rightarrow M$ 是共形 Lorentz 度量 $u^2(\bar{g})$ 的指数映射在 E 上的限制. 水平曲率的有界性会导致 $\exp_E$ 在某个球 $B(0, \delta_1)$ 上是非退化的, 其中 $\delta_1 > 0$ 是一个万有常数. 注意 $\exp_E(B(0, \delta_1))$ 一般不会是水平子流形, 因为 X 的正交补一般不是可积的 (否则称为静态时空). 但是当赋予 $\exp_E(B(0, \delta_1))$ 水平度量 $u^2 g$ 时, 上述通过原点的 $u^2(\bar{g})$ 水平测地线变成了 $u^2 g$ 的测地线. (3.16) 中的第一式可以给出 $u^2 g$ 指数映射共轭半径的下界估计. 利用 $\exp_E$ 将 u, ω 和 $u^2 g$ 拉回到 $B(0, \delta_1)$ 上, 取 0 点附近的 $u^2 g$ 的调和坐标系 (z^1, z^2, z^3) , 在此坐标系下 $u^2 g$ 将有 $W^{2,p}$ 估计. 由 (3.16) 知, $\tilde{\Delta}u, \delta_{\tilde{g}}\omega$ 和 $d\omega$ 都是有界的, u 和 ω 在坐标系 (z^1, z^2, z^3) 下分别有 $W^{2,p}$ 和 $W^{1,p}$ 估计. 沿着浸入类空子流形 $\exp_E : B(0, \delta_1) \rightarrow M$ 积分向量场 X , 会得到一个时间坐标 t , 这样就构造了一个 4 维的浸入坐标系 $\{|z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 + t^2 < \delta_2^2\}$. 在这个坐标系下, g, u 和 ω 会有一个光滑的收敛极限, 使得 h 在内点 (原点) 取得了非零极大值, 得到矛盾.

有了一阶估计 (3.6), 利用 Einstein 方程可以得到曲率的估计以及曲率的任意阶协变导数的估计.

从定理 3.2 到定理 3.1, 如果要令 (3.2) 中的 $a \rightarrow \infty$, 还需要用到一个看起来不太显然的结果, 即 $(M, \bar{g})$ 是测地完备的可以推导出 $(M, \hat{g})$ 是测地完备的 (参见文献 [4, 定理 3.3]).

注 3.1 Anderson^[1] 的证明是在完备 3 维流形 (Killing 轨道的空间) 上取极限. 如果这一列流形是非崩塌的 (non-collapsed), 那么可以在 Cheeger-Gromov 意义下取极限. 如果这一列流形是崩塌的, Anderson 论证说在万有覆盖上不发生崩塌, 然后在万有覆盖上再来取极限. 如果时空不是时序的, 则没有这个 3 维流形可用.

下面讨论非真空的情形. 作为一个初步的探索, 这里仅讨论两种物质场, 一种是电磁场, 另一种是数量场.

对于只有前者的时空而言, 引力与电磁场的相互作用可以用下述的 Einstein-Maxwell 方程描述:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} &= \kappa \left(F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta}g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4}|F|^2 g_{\alpha\beta} \right), \\ dF &= d * F = 0,\end{aligned}\quad (3.17)$$

其中, Λ 和 κ 是常数, $|F|^2 \triangleq F_{\xi\gamma}F_{\eta\delta}g^{\xi\eta}g^{\gamma\delta}$ 是电磁场 2-形式 $F_{\alpha\beta}$ 的 Lorentz 长度. (3.17) 中第二个方程称为 Maxwell 方程.

对于数量场, 考虑描述介子的 Klein-Gordon 数量场, 它与 Einstein 方程耦合:

$$\begin{aligned}\text{Ric}(g_M) - \frac{R}{2}g_M + \Lambda g_M &= \kappa' \left[d\phi \otimes d\phi - \frac{1}{2} \left(|d\phi|^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} |\phi|^2 \right) g_M \right], \\ \Delta_{g_M} \phi &= \frac{m^2}{\hbar^2} \phi,\end{aligned}\quad (3.18)$$

其中, Λ 、 κ' 、 m 和 $\hbar$ 都是常数, $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^2$ 是一个映射 (数量场).

也可以考虑既有电磁场又有数量场的情形 (但没有相互作用), 即下面的 Einstein-Maxwell-Klein-Gordon 方程 (参见文献 [19, 第 3 章]):

$$\begin{aligned} & \text{Ric}(g_M) - \frac{R}{2}g_M + \Lambda g_M \\ &= \kappa \left(F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4}|F|^2 g_{\alpha\beta} \right) + \kappa' \left[d\phi \otimes d\phi - \frac{1}{2} \left(|d\phi|^2 + \frac{m^2}{\hbar^2} |\phi|^2 \right) g_M \right], \\ & dF = d * F = 0, \\ & \Delta_{g_M} \phi = \frac{m^2}{\hbar^2} \phi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

当 $\phi = 0$ 或 $F = 0$ 时, (3.19) 可以约化为 (3.17) 或 (3.18).

现在在稳态的情形下处理 (3.19). 设 X 是 M 上 Killing 场, 如果 F 和 ϕ 满足

$$\mathcal{L}_X(F) = 0, \quad d\phi(X) = 0, \quad (3.20)$$

则称满足 (3.19) 的 (g_M, F, ϕ) 是继承的 (inheriting). 分别记关于 X 的电场和磁场为

$$E = i_X F, \quad B = i_X * F, \quad (3.21)$$

其中, $i_X F$ 是用 X 对 2-形式 F 的缩并, $*F$ 是 F 的 Hodge 对偶 (关于 g_M).

定理 3.3 ^[5] 令 (M, g_M) 是带类时 Killing 场 X 的 4 维时空, g_M 满足 (3.19) 和 (3.20), 其中 $\Lambda \geq 0$ 、 $\kappa \leq 0$ 和 $\kappa' \geq 0$ 为常数. 令 $\hat{B}(x_0, a)$ 是以 x_0 为心、 $a > 0$ 为半径、闭包是紧的 $\hat{g}$ -度量球, 且

$$\sup_{x \in \hat{B}(x_0, a)} |\kappa| u^{-2} |E \wedge B|_{\hat{g}} \leq a^{-2}. \quad (3.22)$$

那么, 任意给定 $0 < \delta < 1$, 存在仅依赖于 δ 的常数 $C_\delta > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \hat{B}(x_0, \frac{a}{2})} |\text{Rm}(g_M)|_{\hat{g}} \leq \delta \frac{m^2}{\hbar^2} + C_\delta a^{-2}. \quad (3.23)$$

2-形式 $E \wedge B$ 在水平空间上的 Hodge 对偶, 对应于物理中的 Poynting 向量. 如下定理是定理 3.3 的一个推论:

定理 3.4 ^[5] 令 (M, g_M) 是一个带有类时 Killing 场 X 的测地完备的 4 维时空, 度量 g_M 满足 Einstein-Maxwell-Klein-Gordon 方程 (3.19) 和 (3.20), 其中 $\Lambda \geq 0$ 、 $\kappa \leq 0$ 和 $\kappa' \geq 0$ 为常数. 假设 Poynting 向量为 0. 那么 (M, g_M) 是平坦的.

Maxwell 方程 $dF = d * F = 0$ 等价于电场 E 和磁场 B 的方程组:

$$\begin{aligned} & dE = 0, \quad dB = 0, \\ & d(u^{-1} * E) = B \wedge d\theta, \quad d(u^{-1} * B) = E \wedge d\theta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

根据 Poincaré 引理, 局部存在两个函数 ϕ_3 和 ϕ_4 使得 $E = d\phi_3$ 和 $B = d\phi_4$. 令 $H = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_i \in \mathbb{R}, y_1 > 0\}$ 是 4 维的上半空间, 装备 Riemann 度量

$$g_H = y_1^{-2}(dy_1^2 + dy_2^2 - 2\kappa y_1 dy_3^2 - 2\kappa y_1 dy_4^2).$$

度量 g_H 具有非正截面曲率. 局部定义一个从 M 到 H 的映射 $\Phi = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (u^2, \psi, \phi_3, \phi_4)$. 假设 $E \wedge B = 0$ 和 $\bar{\text{Ric}}(X, Y) = 0$ 对任意水平向量 Y 成立, 则有

$$\hat{\Delta}\Phi = -(2\Lambda + \kappa'V)u^2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad (3.25)$$

其中 $V = \frac{m^2}{h^2}|\phi|^2$. 利用 (3.25) 和映射能量的 Bochner 公式, 经过冗长计算得到

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}\left(\frac{1}{2}e(\Phi) + \frac{\kappa'}{2}V\right) &= 4|\nabla \log u|^4 + |2\nabla_{ij} \log u + u^{-4}\omega_i\omega_j - \kappa u^{-2}(E_iE_j + B_iB_j)|^2 \\ &\quad + u^{-4}|\nabla_i\omega_j - 2\omega_i(\log u)_j - 2\omega_j(\log u)_i|^2 \\ &\quad - 2\kappa u^{-2}|\nabla_iE_j - E_i(\log u)_j - E_j(\log u)_i|^2 \\ &\quad - 2\kappa u^{-2}|\nabla_iB_j - B_i(\log u)_j - B_j(\log u)_i|^2 \\ &\quad + \langle d\log u, u^{-2}\omega \rangle^2 - 2\kappa \langle d\log u, u^{-1}E \rangle^2 - 2\kappa \langle d\log u, u^{-1}B \rangle^2 \\ &\quad + 6|u^{-2}\omega \wedge d\log u|^2 + \left[\Lambda + \frac{\kappa'}{2}V - \frac{\kappa}{2}u^{-2}(|E|^2 + |B|^2)\right]e(\Phi) \\ &\quad + (2\Lambda + \kappa'V)[|\omega|^2u^{-4} - \kappa u^{-2}(|E|^2 + |B|^2)] + I, \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中

$$\begin{aligned} I &= \frac{\kappa'}{2} \left[\text{Hess}(V)_{ab} \phi_\alpha^a \phi_\beta^b \hat{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} |\nabla V|^2 \right] + \kappa' \langle d\phi \otimes d\phi, \Phi^* g_H \rangle - 2\kappa' \langle \nabla(V \circ \phi), \nabla \log u \rangle \\ &\geq \kappa' \left| \frac{1}{2} \nabla V - 2d\phi(\nabla \log u) \right|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{2}e(\Phi) + \frac{\kappa'}{2}V = 2|\nabla \log u|^2 + \frac{1}{2}u^{-4}|\omega|^2 - \kappa u^{-2}|E|^2 - \kappa u^{-2}|B|^2 + \frac{\kappa'}{2}V. \quad (3.28)$$

特别地,

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}\left(\frac{1}{2}e(\Phi) + \frac{\kappa'}{2}V\right) &\geq 4|\nabla \log u|^4 + |2\nabla_{ij} \log u + u^{-4}\omega_i\omega_j - \kappa u^{-2}(E_iE_j + B_iB_j)|^2 \\ &\quad + \left[\Lambda + \frac{\kappa'}{2}V - \frac{\kappa}{2}u^{-2}(|E|^2 + |B|^2)\right]e(\Phi) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

当 Poynting 向量满足 (3.22) 时, 爆破极限的 Poynting 向量就恒为 0, 那么 (3.29) 对极限就成立, 可以用类似于证明定理 3.2 的方法给出定理 3.3 的证明.

最后考虑高维情形. 定理 3.1 和 3.2 当维数大于等于 5 时不成立. 当维数大于等于 5 时, 我们所能期望的结果最多是一个分裂定理. 如果与类时 Killing 向量场垂直的切子空间分布是可积的, 则称一个稳态 (stationary) 时空是静态的 (static). 下面证明对于静态时空而言, 分裂定理是对的 (只要宇宙常数非负).

定理 3.5 (参见文献 [4, 定理 1.4]) 设 (M, g_M) 是一个具有类时 Killing 场 X 维数为 $n+1$ 的静态时空, 度量 g_M 满足 Einstein 方程 $\text{Ric}(g_M) = \lambda g_M$. 设 $\hat{B}(x_0, a)$ 是一个球心在 x_0 、半径为 $a > 0$ 的 $\hat{g}$ -度量球, 且设它的闭包是紧致的. 那么存在一个万有常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{\hat{B}(x_0, \frac{a}{2})} |\hat{\nabla} \log u|_{\hat{g}} \leq C(\sqrt{na}^{-1} + \sqrt{\max\{-\lambda, 0\}}). \quad (3.30)$$

定理 3.6 (参见文献 [4, 推论 4.2]) 设 (M, g_M) 是一个测地完备的、具有类时 Killing 场 X 维数为 $n+1$ 的静态时空, 度量 g_M 满足 Einstein 方程 $\text{Ric}(g_M) = \lambda g_M$, $\lambda \geq 0$. 那么 $\lambda = 0$, 并且 (M, g_M) 的万有覆盖等距于乘积 $\mathbb{R} \times N$, 乘积度量为 $-dt^2 + g_N$, 其中 (N, g_N) 是一个完备的 Ricci 平坦的 n 维 Riemann 流形.

定理 3.5 和 3.6 还可以推广到有物质场的情形, 如有电磁场和数量场. 其中数量场甚至可以让它非线性化, 即让它是映到一个固定 Riemann 流形 (W, g_W) 的映射. 这时的 Einstein-Maxwell-Klein-Gordon 方程是关于 Lorentz 度量 g_M 、2-形式 F 和一个映射 $\phi: M \rightarrow W$ 的方程:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(g_M) - \frac{R}{2}g_M + \Lambda g_M &= \kappa \left(F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4} |F|^2 g_{\alpha\beta} \right) + \kappa' \left[\phi^* g_W - \frac{1}{2} (|d\phi|^2 + V(\phi)) g_M \right], \\ dF &= d * F = 0, \\ \Delta_{g_M, g_W} \phi &= \frac{1}{2} (\nabla V) \circ \phi, \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中, Δ_{g_M, g_W} 是从 M 到 W 的调和映射 Laplace 算子, $V: W \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个固定的位势函数. 在 W 有非正的截面曲率、 V 为凸函数和磁场消失等条件下, 我们还是可以做先验估计 (参见文献 [5, 定理 3.1 和 3.2]).

本节可以看作是调和映射在广义相对论中的应用.

4 局部最优坐标系

如上文所言, 在广义相对论中, 奇点几乎是不可避免的. 在几何分析中, 本文对奇点的处理方式是进行爆破. 现在的情形涉及如何对一系列 Einstein 方程的解取极限. 为了运用分析中的 Arzela-Ascoli 型紧性定理, 需要建立 Lorentz 度量的先验估计. 这通常又与坐标系的选择有关. 如何选择一个好的坐标系使得度量在此坐标系下有好的表现, 成为了一个重要的问题.

接下来回顾 Riemann 几何中的经典结果 (参见文献 [22]). 设 M^n 是一个完备 Riemann 流形, $P \in M^n$, $r_0 > 0$, 满足

$$\sup_{B(P, r_0)} |\text{Rm}| \leq r_0^{-2}, \quad \text{inj}(M, P) \geq r_0. \quad (4.1)$$

那么对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ 和 $r_1 = \delta r_0$ 以及调和坐标系 $\{|x| < r_1\}$, $\Delta x^i = 0$, $x^i(P) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \sup_{\{|x| \leq r_1\}} |g_{ij} - \delta_{ij}| + r_1 |\partial g_{ij}| &< \epsilon, \\ \frac{1}{r_1^n} \int_{\{|x| \leq r_1\}} r_1^{2p} |\partial^2 (g_{ij} - \delta_{ij})|^p dx &\leq c(p), \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $c(p)$ 仅依赖于 p , 对所有 $p > 1$ 成立.

注 4.1 如果去掉条件 $\text{inj}(M, P) \geq r_0$, 那么“坐标系” $\{x^i\}$ 仍然存在但是要理解为一个浸入映射 $\psi: \{|x| < r_1\} \rightarrow M^n$, $\psi(0) = P$. 对于 $g_{ij} = (\psi^* g)_{ij}$ 而言, 估计 (4.2) 成立.

注 4.2 在 Lorentz 流形上, 调和坐标系事实上是波坐标系. 在波坐标系下 Lorentz 度量满足的是 (非线性) 波动方程, 我们不能期望波动方程有椭圆的 $W^{2,p}$ 估计.

我们先讨论在 Lorentz 流形上如何定义曲率界, 它有许多种定义方式, 但无论哪种定义都需要借助 (局部的) 类时向量场. 下面这种方式, 是对类时向量场依赖程度最小的一种.

在 Lorentz 流形 $(M, \bar{g})$ 上, 固定一个观测者 (P, τ_P) , $P \in M$, $\tau_P \in T_P M$, $|\tau_P|^2 = -1$. 用 τ_P 可以在 $T_P M$ 上自然诱导一个正定内积 g_{τ_P} . 假设 (关于 Lorentz 度量 $\bar{g}$) 指数映射 $\exp_P$ 可以在切空间 (T_P, g_{τ_P}) 上半径为 r_0 的球 $B_{g_{\tau_P}}(0, r_0)$ 上有定义, 记 $B_{\tau_P}(P, r_0) = \exp_P(B_{g_{\tau_P}}(0, r_0))$. 以下述方式来定义 $\bar{g}$ 的曲率在 $B_{\tau_P}(P, r_0)$ 上的界:

$$|\mathrm{Rm}(\bar{g})|_{B_{\tau_P}(P, r_0)} = \sup_{\gamma} |\mathrm{Rm}(\bar{g})|_{\dot{g}_{T_\gamma}}, \quad (4.3)$$

其中上确界是这样取的: 首先将 τ_P 沿着任意一条径向测地线 $\gamma \subset B_{\tau_P}(P, r_0)$ 平行移动出去, 得到沿着 γ 的一族观测者 T_γ ; 用这族观测者定义的正定内积 g_{T_γ} 来量度曲率张量 $\mathrm{Rm}(\bar{g})$, 再关于 γ 取上确界.

如果指数映射关于观测者 (P, τ_P) 的单射半径大于等于 r_0 , 将 τ_P 沿着径向平移出去得到的是一个单值的类时向量场.

下面的定理是文献 [7] 的主要结果. 这里与原来的 $W^{2,p}$ 估计的表述稍有不同, 它是原证明过程中实际得到的结果.

定理 4.1 ^[7] 设 $n+1$ 维 Lorentz 流形 $(M, \bar{g})$ 关于一个观测者 (P, τ_P) 满足

$$\begin{aligned} |\mathrm{Rm}(\bar{g})|_{B_{\tau_P}(P, r_0)} &\leq r_0^{-2}, \\ \mathrm{inj}(M, g, P, \tau_P) &\geq r_0, \\ \mathrm{Ric}(\bar{g}) &= 0, \end{aligned}$$

则存在一个以点 P 为心的坐标系 $(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} < C(n)^{-1} r_0$, $|t| \leq C(n)^{-1} r_0$, 使得

$$\bar{g} = -\lambda^2 dt^2 + \sum g_{ij} (dx^i + \xi^i dt)(dx^j + \xi^j dt) \quad (4.4)$$

满足

$$\begin{aligned} e^{-C(n)} &\leq \lambda \leq e^{C(n)}, \quad |\xi| \leq e^{-C(n)}, \quad |g_{ij} - \delta_{ij}| \leq e^{-C(n)}, \\ \sup_{\{|t| \leq C(n)^{-1} r_0\}} \sum_{i=1}^2 \int_{\{|x| \leq C(n)^{-1} r_0\}} r_0^{-n} [r_0^i |\partial^i g_{\gamma\delta}|]^p dx &\leq C(n, p), \quad \forall p \geq 1, \\ \sup_{\{|t| \leq C(n)^{-1} r_0\}} \int_{\{|x| \leq C(n)^{-1} r_0\}} r_0^{-n} [r_0^3 (|\partial_x^3 \lambda| + |\partial_x^2 \partial_t \lambda| + |\partial_x^1 \partial_t^2 \lambda|)]^p dx &\leq C(n, p), \quad \forall p \geq 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中, $C(n)$ 仅依赖于 n , $C(n, p)$ 仅依赖于 n 和 p .

(4.5) 的第二式是一个 $L_t^\infty W_x^{2,p}$ 估计, 第三式说明了 λ 除了关于时间的三阶导数 $\partial_t^3 \lambda$ 以外, 它的其他三阶导数都有 $L_t^\infty L_x^p$ 估计.

本节主要概述定理 4.1 的证明. 我们需要点 P 附近其他点的单射半径估计. 将 τ_P 沿着径向方向平移出去得到的单位类时向量场记为 T .

定理 4.2 ^[6] 在定理 4.1 的假设下, 存在一个仅依赖于维数的常数 $c(n) > 0$, 使得对于任意 $Q \in B_{\tau_P}(P, c(n)r_0)$, 指数映射关于观测者 (Q, T_Q) 的单射半径有下界估计:

$$\mathrm{inj}(M, g, Q, T_Q) \geq c(n)r_0.$$

定理 4.2 的证明可参见文献 [6, 第 705 页].

通过伸缩, 可设 $r_0 = 1$. 设 c 是一个小常数 (只依赖维数), 设 γ 为类时测地线, $\gamma(0) = Q$, $\gamma(c) = P$, $\dot{\gamma}(c) = \tau_P$. 由定理 4.2 知, 指数映射关于 (Q, T_Q) 有单射半径估计 ($c(n) > 2c$). 度量 $\bar{g}$ 在以 Q 为心的法坐标系下有表达式

$$\bar{g} = -d\tau^2 + g_{ij}dy^i dy^j. \quad (4.6)$$

我们可以尝试下面的自然方法来构造坐标系 (参见文献 [2]).

(1) 以点 Q 为心的距离函数给出了点 P 附近一个时间函数 τ .

(2) 在点 P 附近, 测地球面 $\{\tau = \text{const.}\}$ 都是类空子流形, 用调和坐标系 $x^1, x^2, \dots, x^n$, 将超曲面 $\{\tau = \text{const.}\}$ 参数化, 坐标函数 $x^1, x^2, \dots, x^n$, 加上时间函数 τ , 构成了点 P 附近 M 上的一个坐标系.

这个看起来自然的方法产生的坐标系却不是最优的. 原因解释如下: 在仅假设曲率有界的前提下, 一般而言, Hessian 比较定理仅给出距离函数的二阶协变导数估计, 这导致用距离函数构造的坐标系, 度量仅有一阶估计. 在曲率有界的情形下, 期望的最优坐标系的坐标函数要有三阶协变导数估计才行. 所以, 必须构造一个具有三阶协变导数估计的时间函数.

粗略的想法是扰动这些测地球面 $\{\tau = \text{const.}\}$ 使之成为常平均曲率的超曲面. 接下来将证明这些常平均曲率曲面的平均曲率函数 $H = t$ 就是一个能达到我们要求的时间函数. 下面给出证明梗概.

引入一个 Riemann 度量

$$\hat{g} = d\tau^2 + g_{ij}dy^i dy^j. \quad (4.7)$$

它的曲率是有界的,

$$|\text{Rm}(\hat{g})|_{\hat{g}} \leq C, \quad (4.8)$$

其中常数 C 仅依赖于 $\bar{g}$ 的曲率界.

引进两个在应用比较定理时会涉及的函数

$$k_1(r) = \frac{\sqrt{C}}{\tan(r\sqrt{C})}, \quad k_2(r) = \frac{\sqrt{C}}{\tanh(r\sqrt{C})}, \quad (4.9)$$

$k_1(r) \leq k_2(r)$ 并且 $k_1(r) \approx \frac{1}{r}$, $k_2(r) \approx \frac{1}{r}$. 固定一个点 $P_s = \gamma(s + s^2)$ ($s \in [c, 2c]$).

令

$$\Omega_s = \{\tau = s\} \cap \{d_{\hat{g}}(P_s, \cdot) < s^2 + s^3\}, \quad (4.10)$$

那么 $B_s(\gamma(s), \frac{1}{2}s^{\frac{5}{2}}) \subset \Omega_s \subset B_s(\gamma(s), 2s^{\frac{5}{2}})$.

不妨称 $\frac{\partial}{\partial \tau} = -\nabla \tau$ 是指向未来的方向, $-\nabla_i \nabla_j \tau = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \tau}$ 是类空超曲面 $\{\tau = \text{const.}\}$ 关于未来法向的第二基本形式. 注意以 P_s 为心的 $\hat{g}$ 的距离函数 $d_{\hat{g}}(P_s, \cdot)$ 的 $\bar{g}$ 梯度 (在 Ω_s 附近) 与 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 很接近. $\hat{g}$ 与 $\bar{g}$ 的联络的差由 $-\nabla_i \nabla_j \tau = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \tau} \approx \frac{1}{s} \ll \frac{1}{s^2}$ 来控制. 由 Hessian 比较定理, 超曲面 $\{d_{\hat{g}}(P_s, \cdot) = s^2 + s^3\}$ 在 Lorentz 度量下的 (关于未来法向的) 平均曲率大于等于 $(n-1)k_1(2s^2)$, 超曲面 $\{\tau = s\}$ 的平均曲率小于等于 $nk_2(s)$. 注意到当 c 比较小时, $nk_2(s) < (n-1)k_1(2s^2)$.

任意给定常数 $t \in (nk_2(s), (n-1)k_1(2s^2))$, 求解如下的问题:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(u)(y) &= t, \quad y \in \Omega_s, \\ u(y) &= s, \quad y \in \partial\Omega_s,\end{aligned}\tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{M}(u)$ 是图 $\Sigma_t = \{(y, u(y)) : y \in \Omega_s\}$ (关于未来法向) 的平均曲率. 设曲面 $\{d_{\tilde{g}}(P_s, \cdot) = s^2 + s^3\} = \{(y, \tilde{u}(y)) : y \in \Omega_s\}$ 定义了 Ω_s 上一个函数 $\tilde{u}$. $\tilde{u}$ 和常数 s 分别是方程 (4.11) 的下解和上解. 由偏微分方程理论知, (4.11) 一定可解, 而且解 u 满足 $\tilde{u} \leq u \leq s$.

注意 Σ_t 的诱导度量为

$$g_{ij} = \mathbf{g}_{ij} - u_i u_j,\tag{4.12}$$

并且 $|\nabla u|^2 \triangleq \mathbf{g}^{ij} u_i u_j < 1$ 当且仅当 Σ_t 是类空的. 从闸函数估计 $\tilde{u} \leq u \leq s$ 可以推导出解在边界上的导数估计:

$$|\nabla u|_{\partial\Omega_s} \leq |\nabla \tilde{u}|_{\partial\Omega_s} \leq \frac{1}{2}.\tag{4.13}$$

下面用内蕴度量 g_{ij} 来作估计. 此时, $|\nabla u|^2 = \frac{|\nabla u|^2}{1-|\nabla u|^2}$, 平均曲率方程可以表述为

$$\mathcal{M}u := h_{ij} g^{ij} = \sqrt{1-|\nabla u|^2} \left(\Delta u + g^{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \tau} \right) = t.\tag{4.14}$$

首先, 我们有 Bochner 公式

$$\Delta |\nabla u|^2 = 2|\nabla^2 u|^2 + 2\langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + 2\text{Ric}(\nabla u, \nabla u).\tag{4.15}$$

Gauss 方程可以推导出

$$\text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \geq -C(1+|\nabla u|^2)^2.\tag{4.16}$$

结合已有的边界估计 $|\nabla u|^2|_{\partial\Omega_s} \leq 1$, 对方程 (4.15) 运用 Bernstein 型估计, 可以得到 u 的整体一阶空间估计:

$$\sup_{\Omega_s} |\nabla u| \leq C.\tag{4.17}$$

u 的二阶空间估计可归结为第二基本形式 h 本身的估计. h 的方程为

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} &= |h|^2 h_{ij} - \text{tr}(h) h_{ip} h_{jq} g^{pq} - \bar{R}_{ipjq} h_{kl} g^{pk} g^{ql} \\ &\quad + \bar{R}_{jpql} h_{ik} g^{pq} g^{kl} + \nabla_p \bar{R}_{qjNi} g^{pq} - \nabla_j (\bar{R}_{jN}) - \nabla_i \nabla_j \text{tr}(h).\end{aligned}\tag{4.18}$$

由 $\text{tr}(h) = \text{const.}$ 知 $\nabla_i \nabla_j \text{tr}(h) = 0$ 和

$$\Delta |h|^2 \geq 2|\nabla h|^2 + 2|h|^4 - C|h|^3 + \nabla \bar{R}m.\tag{4.19}$$

对 (4.18) 用 Nash-Moser 迭代得

$$|h| \leq \frac{C}{\delta}\tag{4.20}$$

对到边界距离大于 δ 的任意点都成立.

由 Gauss 方程知, 曲率在内部有界, 将空间用调和坐标参数化以后再对方程 (4.18) 使用 L^p 估计得到

$$\left(\frac{1}{\delta^n} \int_{B(x, \frac{\delta}{2})} |\nabla h|^p d\text{vol} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_p}{\delta^2} \quad (4.21)$$

对任意给定的 $p > 1$ 以及到边界距离大于 δ 的任意点 x 都成立.

对方程 (4.11) 两边关于 t 求导, 有

$$[\Delta - (|h|^2 + \bar{\text{Ric}}(N, N))]\lambda = -1, \quad \lambda|_{\partial\Omega_s} = 0, \quad (4.22)$$

其中 $\lambda = -\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \frac{\partial u}{\partial t}$. 由极值原理可得 $0 < \lambda \leq C$.

任取一个到边界距离大于 δ 的点 P' , 假设 ϕ 是 $B_g(P', \delta)$ 上非负截断函数, $\Delta\phi \leq C\delta^{-2}$, 则存在常数 $\epsilon \sim \delta^2$ 使得

$$[\Delta - (|h|^2 + \bar{\text{Ric}}(N, N))](\lambda - \epsilon\phi) \leq 0. \quad (4.23)$$

运用极值原理可推导出 $\lambda - \epsilon\phi \geq 0$. 从而得到了

$$\lambda(x) \geq C^{-1} d_g^2(x, \partial\Sigma_t), \quad \forall x \in \Sigma_t. \quad (4.24)$$

注意, 这些常平均曲率曲面形成了它所占区域的一个光滑的叶状结构, 但是它不经过点 $P = \gamma(cr_0)$. 我们通过连续地变动参数 $s \in [c, 2c]$, 提升这个区域使得点 P 可以落在区域“中间”. 令 u^s 为以 s 为边值、常平均曲率为 $nk_1(\frac{s}{2}) \in (nk_2(s), (n-1)k_1(2s^2))$ 的解. 记 P 点的 y 坐标为 $\bar{y}$, $u^c(\bar{y}) < c$, $u^s(\bar{y}) > \frac{s}{2}$, 由连续性知, 存在 $s_0 \in [c, 2c]$, 使得 $u^{s_0}(\bar{y}) = c$. 固定 s_0 和这一族常平均曲率曲面 Σ_t ($t \in (nk_2(s_0), (n-1)k_1(2s_0^2))$).

一旦有了时间函数 t , 考虑一个辅助的 Riemann 度量

$$\tilde{g} = 2\lambda^2 dt \otimes dt + \bar{g}, \quad (4.25)$$

其中 $\lambda^2 = -\frac{1}{\bar{g}(\nabla t, \nabla t)}$.

如果能够控制 t 直到三阶协变导数 $\nabla_{\tilde{g}}^3 t$, 我们就能控制 $\tilde{g}$ 直到二阶协变导数 $\nabla_{\tilde{g}}^2 \tilde{g}$, 这导致我们也能估计 $\nabla_{\tilde{g}}^3 t$. 进一步能反过来控制 $\bar{g}$ 直到二阶 $\tilde{g}$ 协变导数 $\nabla_{\tilde{g}}^2 \bar{g}$. 最终在 $\tilde{g}$ 调和坐标系下, $\bar{g}$ 也会有好的二阶估计.

下面介绍如何控制 t 的三阶协变导数 $\nabla_{\tilde{g}}^3 t$. 因为讨论的是协变导数, 所以可以在一个固定的叶 Σ_t 上讨论, 不妨设该叶为 Σ_{t_0} ($t_0 = nk_1(\frac{s_0}{2})$), 并且在 P 点附近讨论. 在 Σ_{t_0} 上, 固定一个围绕 P 点的调和坐标系 $\{y_i\}$, 积分向量场 $-\frac{\nabla t}{g(\nabla t, \nabla t)}$, 给出一个坐标系 $t, y_1, y_2, \dots, y_n$, 在该坐标系下,

$$\bar{g} = -\lambda^2(y, t) dt^2 + g_{ij}(y, t) dy^i dy^j, \quad \tilde{g} = \lambda^2(y, t) dt^2 + g_{ij}(y, t) dy^i dy^j. \quad (4.26)$$

在曲面 Σ_{t_0} 上 P 点附近, 注意 λ 已有上下界估计.

经过计算, 粗略地, $\nabla_{\tilde{g}}^3 t$ 是下面右端这些项的组合:

$$\nabla_{\tilde{g}}^3 t \approx \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \nabla^2 \lambda, \nabla \frac{\partial}{\partial t} \lambda, \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}, \partial_y^2 g, \nabla \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (4.27)$$

因此, 我们需要 λ 和 g 直到二阶导数的估计.

我们已有第二基本形式的 $W_y^{1,p}$ 空间内估计, 由 Gauss 方程知, 度量 g_{ij} 的曲率内部一致有界. 由标准的椭圆估计, 在调和坐标系下, g_{ij} 的二阶空间导数 $\partial_y^2 g_{ij}$ 是 L_y^p 内部一致有界的.

为得到 g_{ij} 的时间导数 (及混合导数), 需要如下方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2\lambda h_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = -\nabla_i \nabla_j \lambda - \lambda h_{ip} h_{jq} g^{pq} + \lambda \bar{R}_{iNjN}. \quad (4.28)$$

g_{ij} 关于时间导数的估计归结为 λ 的估计.

由 λ 所满足的方程 (4.22) 和 L^p 内估计知, 对于任意 $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \Sigma_{t_0}$, 有

$$\|\lambda\|_{W^{3,p}(\Omega_1)} \leq C(\|h\|_{W^{1,p}(\Omega_2)} + \|\lambda\|_{L^p(\Omega_2)}). \quad (4.29)$$

关于时间微分 (4.22) 一次, 利用方程 (4.28), 可得

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial \lambda}{\partial t} - |h|^2 \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= 2\langle \bar{R}_{iNjN}, h_{ij} \rangle \lambda^2 - 4\lambda \langle h_{ij}, \nabla_i \nabla_j \lambda \rangle + 2h_{ij} h_{kl} h_{rs} g^{sl} g^{ik} g^{jr} \lambda^2 \\ &\quad + t|\nabla \lambda|^2 - 2g^{il} g^{kj} h_{ij} \nabla_l \lambda \nabla_k \lambda. \end{aligned} \quad (4.30)$$

虽然方程 (4.30) 右端在区域内部一致有界, 但如果没有 $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ 的一个基本的内部估计 (如 L_{loc}^p), 还是得不到 $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ 的 $W_{\text{loc}}^{2,p}$ 估计. 观察到 $\frac{\partial \lambda}{\partial t}|_{\partial \Sigma_{t_0}} = 0$, 对方程 (4.30) 两边乘以 $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ 的某个幂次再积分, 这个过程又涉及了 λ 的空间导数以及第二基本形式 h 的整体可积性.

总之, 我们不可避免地需要推导 λ 时空导数的某些整体估计. 最终所需要的整体估计如下:

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |h|^2 + |\nabla \lambda|^4 + |\nabla^2 \lambda|^2 + |\nabla^2 \lambda|^2 |\nabla \lambda|^2 + \lambda^2 |\nabla \lambda|^6 + |\nabla h|^2 \lambda^2 + |h|^2 |\nabla \lambda|^2 + |h_{ij} \nabla_j \lambda|^2 |\nabla \lambda|^2 \leq C, \quad (4.31)$$

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \left| \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + |h|^2 \left| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + |\nabla^2 \lambda|^2 \left| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + |\nabla \lambda|^2 \left| \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + |h_{ij} \nabla_j \lambda|^2 \left| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + \lambda^2 \left| \nabla^2 \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 \leq C, \quad (4.32)$$

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \left| \nabla \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 + |h|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 + (|\nabla^2 \lambda|^2 + |\nabla \lambda|^4) \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right| \leq C. \quad (4.33)$$

下面推导这些整体估计.

令 $u_1 = d_{\bar{g}}(P_{s_0}, \cdot)$, $u_1|_{\partial \Sigma_{t_0}} = s_0^2 + s_0^3 \triangleq c_0$. 因为 $c^{-1} \leq \Delta u_1 \leq c$, 所以存在常数 C 使得 $\Delta(\lambda + C u_1) \geq 0$. 由极值原理, 有

$$0 \leq \lambda \leq C(c_0 - u_1). \quad (4.34)$$

这蕴涵 $|\nabla \lambda|_{\partial \Sigma_{t_0}} \leq C$ 以及 $\lambda|h| \leq C$. 注意, 可以证明 Σ_{t_0} 边界的第二基本形式 $II_{\partial \Sigma_{t_0}}$ 一致有界. 积分 Bochner 公式 (4.15), 在进行分部积分的时候利用 $II_{\partial \Sigma_{t_0}}$ 的有界性可以处理边界项, 最终可以得到 $\|h\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} \leq C$.

我们还需要如下一些 Bochner 公式:

$$\Delta \lambda^2 = 2(|h|^2 + \text{Ric}_{\bar{g}}(N, N))\lambda^2 - 2\lambda + 2|\nabla \lambda|^2, \quad (4.35)$$

$$\Delta |\nabla \lambda|^2 = 2|\nabla^2 \lambda|^2 + 2\langle \nabla \lambda, \nabla \Delta \lambda \rangle + 2\text{Ric}(\nabla \lambda, \nabla \lambda), \quad (4.36)$$

$$\Delta \left| \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 = 2 \left| \nabla^2 \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|^2 + 2 \left\langle \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \nabla \Delta \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right\rangle + 2\text{Ric} \left(\nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right). \quad (4.37)$$

直接积分 (4.35) 和 (4.36) 可以得到 $\|\nabla\lambda\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} + \|\nabla^2\lambda\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} \leq C$. (4.35) 两边乘以 $|\nabla\lambda|^2$, 分部积分并利用 $\|\nabla^2\lambda\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} \leq C$, 可得 $\|\nabla\lambda\|_{L^4(\Sigma_{t_0})} \leq C$. (4.19) 两边乘以 $(c_0 - u_1)^2$, 分部积分可得 $\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla h|^2 (c_0 - u_1)^2 \leq C$. 这蕴涵了 $\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla h|^2 \lambda^2 \leq C$. 利用此式, 在 (4.35) 两边乘以 $|h|^2$, 分部积分得到 $\int_{\Sigma_{t_0}} |h|^2 |\nabla\lambda|^2 \leq C$.

(4.36) 两边乘以 $|\nabla\lambda|^2$, 利用 $|\Delta\lambda| \leq C|h|$, 可以得到

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla^2\lambda|^2 |\nabla\lambda|^2 + |h_{ij} \nabla_j \lambda|^2 |\nabla\lambda|^2 \leq C \int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla\lambda|^2 |h|^2 \leq C. \quad (4.38)$$

(4.35) 两边乘以 $\lambda^2 |\nabla\lambda|^4$, 分部积分有

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \lambda^2 |\nabla\lambda|^6 \leq C \int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla^2\lambda|^2 |\nabla\lambda|^2 + C \int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla\lambda|^4 \leq C. \quad (4.39)$$

至此证明了 (4.31).

利用 $\lambda|h| \leq C$ 和 (4.31), 方程 (4.30) 满足 $\|\Delta \frac{\partial\lambda}{\partial t} - |h|^2 \frac{\partial\lambda}{\partial t}\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} \leq C$.

方程 (4.30) 两边乘以 $(\frac{\partial\lambda}{\partial t})^{1+\epsilon}$ 然后分部积分, 可以证明当 $n = 3$ 时, 利用 Nash-Moser 迭代, 有 $|\frac{\partial\lambda}{\partial t}| \leq C$; 当 $n = 4$ 时, 对于任意 $p > 1$, 有 $\|\frac{\partial\lambda}{\partial t}\|_{L^p(\Sigma_{t_0})} \leq C_p$; 当 $n \geq 5$ 时, 有 $\|\frac{\partial\lambda}{\partial t}\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(\Sigma_{t_0})} \leq C$.

一旦有了整体的 $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ 的 L^p 估计, $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ 的内部一致的 $W_{\text{loc}}^{2,p}$ 估计就可以根据方程 (4.30) 来得到. 上面的估计过程已经得出

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \left| \nabla \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 + |h|^2 \left| \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 \leq C. \quad (4.40)$$

(4.37) 两边乘以 $(c_0 - u_1)^2$, 分部积分可得

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \lambda^2 \left| \nabla^2 \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 \leq C. \quad (4.41)$$

利用这个估计, 在 (4.35) 两边乘以 $|\nabla \frac{\partial\lambda}{\partial t}|^2$, 分部积分可得

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla\lambda|^2 \left| \nabla \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 \leq C. \quad (4.42)$$

(4.36) 两边乘以 $|\frac{\partial\lambda}{\partial t}|^2$, 分部积分可得

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla^2\lambda|^2 \left| \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 + |h_{ij} \nabla_j \lambda|^2 \left| \frac{\partial\lambda}{\partial t} \right|^2 \leq C. \quad (4.43)$$

至此证明了 (4.32).

下面处理 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$, 利用前面的局部估计, 可以推导出 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - |k|^2 \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} \in W_{\text{loc}}^{-1,p}$. 但是与 $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ 情形一样, 需要 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$ 的一些基本的整体估计. 经过计算, 可知 $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$ 满足

$$\Delta \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} - |k|^2 \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = \nabla_i V^i + h * f'_1 + f_2 + f_3, \quad (4.44)$$

其中

$$V = \lambda^3 \text{Rm}(\bar{g}) * h + \lambda^2 h^2 * \nabla\lambda, \quad (4.45)$$

$$f'_1 = \lambda \nabla^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) * \nabla \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial t} * (\nabla^2 \lambda + \lambda h^2 + \lambda \text{Rm}(\bar{g})), \quad (4.46)$$

$$f_2 = (\lambda h^2 + \lambda \text{Rm}(\bar{g})) * (\lambda^2 h^2 + \lambda h * \nabla \lambda + \lambda^2 \text{Rm}(\bar{g})), \quad (4.47)$$

$$f_3 = \lambda (\nabla^2 \lambda)^2 + \nabla^2 \lambda * ((\nabla \lambda)^2 + \lambda^2 h^2 + \lambda h * \nabla \lambda + \lambda^2 \text{Rm}(\bar{g})) + (\lambda h^2 + \lambda \text{Rm}(\bar{g})) * (\nabla \lambda)^2. \quad (4.48)$$

根据 (4.31) 和 (4.32), 有

$$\begin{aligned} \|V\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} + \|f'_1\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} + \|f_2\|_{L^2(\Sigma_{t_0})} &\leq C, \\ |f_3| &\leq C(|\nabla^2 \lambda|^2 + |\nabla \lambda|^4 + |h|^2) + C. \end{aligned} \quad (4.49)$$

记

$$E = \int_{\Sigma_{t_0}} \left| \nabla \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 + |h|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2.$$

(4.36) 两边乘以 $|\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}|$, 分部积分, 对于任意 $0 < \epsilon < 1$, 有

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla^2 \lambda|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right| \leq \epsilon E + \frac{C}{\epsilon} \int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla^2 \lambda|^2 |\nabla \lambda|^2 + \frac{(\Delta \lambda)^4}{|h|^2} + |\nabla \lambda|^4 \leq \epsilon E + \epsilon^{-1} C. \quad (4.50)$$

(4.35) 两边乘以 $|\nabla \lambda|^2 |\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}|$, 分部积分, 对于任意 $0 < \epsilon < 1$, 有

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |\nabla \lambda|^4 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right| \leq \epsilon E + \frac{C}{\epsilon} \int_{\Sigma_{t_0}} \lambda^2 |\nabla \lambda|^6 \leq \epsilon E + \epsilon^{-1} C. \quad (4.51)$$

另外,

$$\int_{\Sigma_{t_0}} |h|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right| \leq \epsilon \int_{\Sigma_{t_0}} |h|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 + \frac{1}{4\epsilon} \int_{\Sigma_{t_0}} |h|^2 \leq \epsilon E + \epsilon^{-1} C. \quad (4.52)$$

(4.44) 两边乘以 $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$, 分部积分并利用 (4.50)–(4.52), 可得

$$\int_{\Sigma_{t_0}} \left| \nabla \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 + |h|^2 \left| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \right|^2 \leq C. \quad (4.53)$$

至此完成了 (4.33) 的证明.

利用 (4.33) 和

$$\Delta \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} - |h|^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \in W_{\text{loc}}^{-1,p} \quad (4.54)$$

以及 L^p 估计, 可得 $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$ 的 $W_{\text{loc}}^{1,p}$ 估计. 特别地, $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$ 是内闭一致有界的. 由 (4.27), 本文证明了 $\nabla_{\bar{g}}^3 t$ 有一致的 $L_{\text{loc}}^p(\Sigma_{t_0})$ 估计. 由 (4.26) (参见文献 [7, 第 933 页] 和 [6, 第 689 页]), 有

$$|\text{Rm}(\bar{g})| \leq C(|\text{Rm}(\bar{g})| + |h|^2 + |\nabla \lambda|^2 + (|\nabla \lambda| + |\partial_t \lambda|)^2).$$

特别地, $\bar{g}$ 的曲率张量内闭一致有界. 从而在 $\bar{g}$ 的调和坐标系下, $\bar{g}$ 有 $W^{2,p}$ 估计.

前面的论证已经给出了局部最优坐标系 (度量有 $W^{2,p}$ 估计) 的一个构造. 然而, 这种构造并没有完全利用常平均曲率叶状结构空间方向的信息. 注意, (4.26) 中的坐标系 $\{y^\alpha\}$, $y^0 = t$, 也仅仅在 $t = t_0$ 时刻是最优的. 在其他时刻 $t \neq t_0$, 由 (4.28) 可知

$$|g_{ij}(t) - g_{ij}(t_0)| \leq C \int_{t_0}^t |\lambda h|(s) ds \leq C|t - t_0|, \quad (4.55)$$

$$|\Gamma_{jk}^i(g(t)) - \Gamma_{jk}^i(g(t_0))| \leq C \int_{t_0}^t |\nabla_s(\lambda h)(s)| ds. \quad (4.56)$$

这可以推导出空间度量 (在 $\{y^\alpha\}$ 坐标系下) $g_{ij}(t) \in W^{1,p} \cap C^\alpha$.

下面给出一个符合常平均曲率叶状结构的构造. 固定一个小的 $\eta > 0$, 在每一叶 Σ_t 上求解调和方程:

$$\begin{aligned} \Delta x^i &= 0, \quad \Sigma_t \cap \{|y| < \eta\}, \\ x^i &= y^i, \quad \{|y| = \eta\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

由 (4.56), $\|\Delta y^i\|_{L^p(|y| \leq \eta)} \leq C|t - t_0|$, 在 y 坐标系下应用 L^p 估计得

$$\|x^i - y^i\|_{W_y^{2,p}(|y| \leq \eta)} \leq C|t - t_0|. \quad (4.58)$$

特别地, $\{x^0, x^1, \dots, x^n\}$ 将是一个新的坐标系, 其中 $x_0 = t$. 由极值原理得 $\{|y| \leq \eta\} = \{|x| \leq \eta\}$.

我们仍用 $\frac{\partial}{\partial t} = \lambda N$, $|N|_g^2 = -1$ 表示在前面论证中的类时向量场. $\frac{\partial}{\partial x^0} = \lambda N + \xi$, 其中 $\xi = \sum \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$ 称为偏移向量 (shift vector).

在坐标系 $\{x^\alpha\}$ 下, 度量 $\bar{g}$ 具有新的形式

$$\bar{g} = -\lambda^2(dx^0)^2 + g_{ij}(dx^i + \xi^i dx^0)(dx^j + \xi^j dx^0). \quad (4.59)$$

这里的 g_{ij} 本应记为其他的记号, 但为了简便仍然使用 g_{ij} . 由 (4.56) 和 (4.58), 至少知道在 $\{x^\alpha\}$ 坐标系下 $g_{ij} \in W_x^{1,p}(|x| \leq \eta) \cap C_x^\alpha(|x| \leq \eta)$.

令第二基本形式 $k_{ij} = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, N \rangle$. 因为 k_{ij} (局部) 有界, 所以常平均曲率超曲面的内蕴曲率有界. 在调和坐标系 $\{x^i\}$ 下, $g^{kl} \partial_{kl}^2 g_{ij} = -2R_{ij} + Q(\partial g, \partial g)_{ij} \in L_x^p$. 用 L^p 估计, 有 $(\eta^2 - |x|^2)g_{ij} \in W_x^{2,p}(|x| \leq \eta)$. 注意, 前面已经有关于 k_{ij} 和 λ 协变导数的估计, $\nabla k \in L_x^p$, $\nabla \lambda, \nabla^2 \lambda, \nabla^3 \lambda \in L_x^p, \forall p > 1$. 由 $\nabla^3 \lambda = \partial^3 \lambda + \partial g * \partial^2 \lambda + \partial^2 g * \partial \lambda$, 可得

$$(\eta^2 - |x|^2) \partial_3 \lambda \in L_x^p. \quad (4.60)$$

关于时间 t 微分 (4.57), 可得

$$\Delta \xi^k = -g^{ki} R_{ij} \xi^j - \text{tr} k g^{kl} \nabla_l \lambda + 2g^{kl} g^{ij} k_{li} \nabla_j \lambda - 2\lambda g^{kl} \text{Ric}(\bar{g})_{lN}, \quad \xi|_{\{|x|=\eta\}} = 0. \quad (4.61)$$

运用极值原理和 L^p 估计可以证明 $|\xi| \leq C(\eta - |x|)$ 和 $\|\xi\|_{W_x^{2,p}(|x| \leq \eta)} \leq C$.

为得到时间导数估计, 需要计算

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = -2\lambda k_{ij} + \mathcal{L}_\xi g_{ij} \in W_x^{1,p}, \quad \frac{\partial k_{ij}}{\partial x^0} = -\nabla_i \nabla_j \lambda + \mathcal{L}_\xi k_{ij} - \lambda k_{ip} k_{jq} g^{pq} + \lambda \bar{R}_{iNjN} \in L_x^p. \quad (4.62)$$

利用前面关于 $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ 的估计以及 $|\xi| \leq C(\eta^2 - |x|^2)$, 有 $\frac{\partial \lambda}{\partial x^0} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \xi^i \partial_i \lambda \in W_x^{2,p}$. 微分 (4.61), 可得

$$\begin{aligned} & \Delta \frac{\partial \xi^k}{\partial x^0} + g^{ki} R_{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^0} + \nabla \left(g^{-2} \nabla \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} \right) * \xi \right) \\ &= g^{-2} * \left[k * \nabla \frac{\partial \lambda}{\partial x^0} + \frac{\partial k}{\partial x^0} * \nabla \lambda \right] + \nabla \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} \right) * g^{-2} * \nabla \xi \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x^0} * [g^{-3} * \text{Rm} * \xi + g^{-2} * k * \nabla \lambda + g^{-2} * \nabla^2 \xi] \end{aligned}$$

$$\in L_x^p. \quad (4.63)$$

所以,

$$\Delta \frac{\partial \xi^k}{\partial x^0} + g^{ki} R_{ij} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^0} \in W_x^{-1,p}, \quad \frac{\partial \xi^k}{\partial x^0} \Big|_{\{|x|=\eta\}} = 0. \quad (4.64)$$

由 L^p 估计可得 $\frac{\partial \xi^k}{\partial x^0} \in W_x^{1,p}$ 和 $\nabla \frac{\partial \xi^k}{\partial x^0} \in L_x^p$. 结合 (4.62), 有 $\nabla \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial (x^0)^2} \in L_x^p$. 对 $\frac{\partial \lambda}{\partial x^0} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \xi^i \partial_i \lambda$ 求导, 可得 $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial (x^0)^2} \in W_x^{1,p}$. 现在, 只需再估计 $\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2}$. 注意, 我们已有

$$\frac{\partial \text{Ric}}{\partial x^0}, \frac{\partial^2 k}{\partial (x^0)^2}, \nabla \frac{\partial^2 \lambda}{\partial (x^0)^2}, \frac{\partial}{\partial x^0} \nabla^2 \xi, \nabla \left(\frac{\partial^2 g}{\partial (x^0)^2} \right), \nabla^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} \right) \in W_x^{-1,q}. \quad (4.65)$$

对 (4.63) 关于 x^0 求导, 当计算 $\Delta \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} + g^{ki} R_{ij} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial (x^0)^2}$ 时, 发现只有形如 $\nabla^2 (g^{-3} * g * \frac{\partial^2 g}{\partial (x^0)^2}) * \xi$ 的项不能写成 $\nabla f_1 + f_2$ 的形式, 其中 $f_1, f_2 \in L_x^p$. 但是它一定可以整理成 (4.66) 右端的形式:

$$\Delta \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} + g^{ki} R_{ij} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial (x^0)^2} = \partial_i \partial_j (F_m^{kij}) \xi^m + \partial_i F^{ki} + F^k, \quad (4.66)$$

其中 $\int_{|x| \leq \eta} |F_m^{kij}|^p + |F^{ki}|^p + |F^k|^p \leq C$.

求解一个 Dirichlet 问题:

$$\begin{aligned} g^{ab} \partial_{ab}^2 u^{kij}(x) &= F_m^{kij}(x), \quad \{|x| < \eta\}, \\ u^{kij} \Big|_{\{|x|=\eta\}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

由 L^p 估计有 $\|u_m^{kij}\|_{W^{2,p}(|x| \leq \eta)} \leq C$. 记 $\partial_{ij}^2 u_m^{kij} = u_m^k$. 可以证明

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} - u_m^k \xi^m \right) + g^{ki} R_{ij} \left(\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial (x^0)^2} - u_m^k \xi^m \right) = \partial_i \bar{F}^{ki} + \bar{F}^k. \quad (4.68)$$

结合 $\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} - u_m^k \xi^m \Big|_{\{|x|=\eta\}} = 0$, 可得 $\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} - u_m^k \xi^m \in W_x^{1,p}$. 这推导出 $\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial (x^0)^2} \in L_x^p$.

至此完成定理 4.1 的证明.

致谢 感谢几位审稿人的宝贵意见, 感谢《中国科学: 数学》邀请作者写这篇中文综述论文.

参考文献

- 1 Anderson M T. On stationary vacuum solutions to the Einstein equations. *Ann H Poincaré*, 2000, 1: 977–994
- 2 Anderson M T. Regularity for Lorentz metrics under curvature bounds. *J Math Phys*, 2003, 44: 2994–3012
- 3 Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. In: 1970 Global Analysis. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vols. XIV, XV, XVI. Providence: Amer Math Soc, 223–230
- 4 Chen B-L. On stationary solutions to the vacuum Einstein field equations. *Asian J Math*, 2019, 23: 609–630
- 5 Chen B-L. On stationary solutions to the non-vacuum Einstein field equations. *Math Z*, 2019, 293: 1227–1246
- 6 Chen B-L, LeFloch P G. Injectivity radius of Lorentzian manifolds. *Comm Math Phys*, 2008, 278: 679–713
- 7 Chen B-L, LeFloch P G. Local foliations and optimal regularity of Einstein spacetimes. *J Geom Phys*, 2009, 59: 913–941
- 8 Chen B-L, Yin L. Isometric embedding of negatively curved complete surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Pacific J Math*, 2015, 276: 347–367
- 9 Chen B-L, Zhang K. Euler characteristic numbers of space-like manifolds. *Asian J Math*, 2017, 21: 591–598
- 10 Cheng S Y, Yau S T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. *Ann of Math (2)*, 1976, 104: 407–419

- 11 Christodoulou D. The Formation of Black Holes in General Relativity. EMS Monographs in Mathematics. Zurich: Eur Math Soc, 2009
- 12 Efimov N V. Generation of singularities on surfaces of negative curvature (in Russian). Mat Sb, 1964, 64: 286–320
- 13 Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann Phys, 1905, 17: 891–921
- 14 Einstein A. Die Feldgleichungen der Gravitation. In: Sitzungsberichte Der Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften Zu Berlin. Berlin: Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, 1915, 844–847
- 15 Einstein A, Pauli W. On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations. Ann of Math (2), 1943, 44: 131–137
- 16 Ernst F J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. Phys Rev A, 1968, 167: 1175–1178
- 17 Ernst F J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II. Phys Rev A, 1968, 168: 1415–1417
- 18 Guan B. Isometric embedding of negatively curved disks in the Minkowski space. Pure Appl Math Q, 2007, 3: 827–840
- 19 Hawking S, Ellis G F R. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press, 1973
- 20 Hilbert D. Über Flächen von constanter Gausscher Krümmung. Trans Amer Math Soc, 1901, 2: 87–99
- 21 Hong J X. Realization in $\mathbb{R}^3$ of complete Riemannian manifolds with negative curvature. Comm Anal Geom, 1993, 1: 487–514
- 22 Jost J, Karcher H. Geometrische Methoden zur Gewinnung von A-Priori-Schranken für harmonische Abbildungen. Manuscripta Math, 1982, 40: 27–77
- 23 Klainerman S, Rodnianski I. On the formation of trapped surfaces. Acta Math, 2012, 208: 211–333
- 24 Li J B, Yu P. Construction of Cauchy data of vacuum Einstein field equations evolving to black holes. Ann of Math (2), 2015, 181: 699–768
- 25 Lichnerowicz A. Theories Relativistes de la Gravitation et de L'Electromagnetisme. Paris: Masson and Cie, 1955
- 26 Minkowski H. Raum und Zeit. Phys Z, 1909, 10: 104–111
- 27 Nirenberg L. The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Comm Pure Appl Math, 1953, 6: 337–394
- 28 Penrose R. Gravitational collapse and space-time singularities. Phys Rev Lett, 1965, 14: 57–59
- 29 Pogorelov A V. Regularity of a convex surface with given Gaussian curvature. Mat Sb, 1952, 31: 88–103
- 30 Schmidt B G. A new definition of singular points in general relativity. Gen Relativity Gravitation, 1971, 1: 269–280
- 31 Schoen R, Yau S T. The existence of a black hole due to condensation of matter. Comm Math Phys, 1983, 90: 575–579
- 32 Schulz F. Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge-Ampere Equations in Two Dimensions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1445. Berlin: Springer, 1990
- 33 Weyl H. Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Naturf Ges, 1916, 61: 40–72

Lorentzian geometry and Einstein equations

Bing-Long Chen

Abstract We survey some aspects of Lorentzian geometry, including the isometric embedding theorem, the Bernstein theorem of complete stationary vacuum spacetimes, and the construction of optimal coordinate systems. The purpose is to investigate the Einstein equations, from the viewpoint of developing geometric analysis on Lorentzian manifolds.

Keywords Lorentzian geometry, Einstein equation, harmonic map, regularity estimate

MSC(2020) 53C50, 83C20

doi: 10.1360/SSM-2023-0017