分层 Lie 群上 Riesz 位势交换子的加权紧性刻画

陈嵩箐¹, 伍火熊², 杨福林^{2,3*}

1. 湖北经济学院财经高等研究院, 武汉 430205;

2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005;

3. 哈尔滨工业大学数学研究院, 哈尔滨 150001

E-mail: chensongqing@hbue.edu.cn, huoxwu@xmu.edu.cn, fulinyoung@hit.edu.cn

收稿日期: 2020-08-07; 接受日期: 2021-03-15; 网络出版日期: 2022-02-18; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771358 和 11871101) 资助项目

摘要 设 $\mathcal{G}$ 是齐次维数为 Q 的分层 Lie 群, $\{X_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathcal{G}$ 上左平移不变向量场的一组基. 记 $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n X_j^2$ 为其上的次 Laplace 算子, 其 Riesz 位势定义为 $\mathcal{I}_\alpha = (-\mathcal{L})^{-\alpha/2}$. 本文研究 $\mathcal{I}_\alpha$ 交换子在加权 Lebesgue 空间的紧性问题, 通过建立 Riesz 位势算子核的下界估计, 获得 $\text{CMO}(\mathcal{G})$ 空间关于该类交换子的加权紧性刻画.

关键词 分层 Lie 群 Riesz 位势 交换子 加权紧性 $\text{BMO}(\mathcal{G})$ $\text{CMO}(\mathcal{G})$

MSC (2020) 主题分类 43A15, 43A17, 22E30, 42B20, 43A80

1 引言

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间. 对于 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $0 < \alpha < n$, 定义

$$R_j := \partial_j (-\Delta)^{-1/2}, \quad I_\alpha := (-\Delta)^{-\alpha/2},$$

分别称其为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Riesz 变换与 Riesz 位势, 其中 $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2$. 对于 $b \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 考虑如下交换子算子:

$$[b, T](f) := bT(f) - T(bf),$$

其中 f 是适当的可积函数, $T = R_j$ 或 $T = I_\alpha$. 在 1978 年, Uchiyama^[1] 证明了对于 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $[b, R_j]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的紧算子当且仅当 $b \in \text{CMO}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\text{CMO}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 范数下的闭包. 在 1987 年, Wang^[2] 证明了对于 $b \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$ 且 $1/p = 1/q + \alpha/n$, $[b, I_\alpha]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的紧算子当且仅当 $b \in \text{CMO}(\mathbb{R}^n)$. 随后, 关于奇异积分和分数次积分交换子各类函数空间的紧性研究受到调和分析学者的广泛关注, 可参见文献 [3–9] 等及

英文引用格式: Chen S Q, Wu H X, Yang F L. Characterization of weighted compactness for commutators of Riesz potentials on stratified Lie groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1169–1182, doi: 10.1360/SSM-2020-0245

其参考文献. 特别地, 本文第二作者与其合作者在文献 [9] 中将文献 [1, 2] 的结果推广到加权 Lebesgue 情形.

本文将考虑底空间是分层 Lie 群的情形, 经典的 Heisenberg 群是其特例. 设 $\mathcal{G}$ 是齐次维数为 Q 的分层 Lie 群, $\{X_j\}_{j=1}^n$ 为 $\mathcal{G}$ 上左平移不变向量场的一组基. 记 $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n X_j^2$ 为其上的次 Laplace 算子, $\mathcal{R}_j = X_j(-\mathcal{L})^{-1/2}$ 表示相应于 $\mathcal{L}$ 的第 j 个 Riesz 变换, $\mathcal{I}_\alpha = (-\mathcal{L})^{-\alpha/2}$ 为相应的 Riesz 位势. 最近, Chen 等^[10] 证明了对于 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(\mathcal{G})$, $[b, \mathcal{R}_j]$ 是 $L_\omega^p(\mathcal{G})$ 上的紧算子当且仅当 $b \in \text{CMO}(\mathcal{G})$, 其中 $\text{CMO}(\mathcal{G})$ 表示 $C_0^\infty(\mathcal{G})$ 在 $\text{BMO}(\mathcal{G})$ 范数下的闭包.

受文献 [9, 10] 中上述结果的启发, 一个自然的问题是, 在分层 Lie 群背景下能否建立 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 的加权紧性刻画? 本文将围绕这个问题展开研究, 建立如下主要结果:

定理 1.1 设 $\mathcal{G}$ 是齐次维数为 Q 的分层 Lie 群, $0 < \alpha < Q$, $1 < p < q < \infty$ 且满足 $1/p = 1/q + \alpha/Q$, $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$, $b \in \text{BMO}(\mathcal{G})$, 则 $b \in \text{CMO}(\mathcal{G})$ 当且仅当 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 是 $L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})$ 到 $L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$ 的紧算子.

本文余下内容安排如下: 第 2 节给出一些相关的预备知识. 第 3 节先建立 Riesz 位势交换子的一个局部上下界, 然后给出定理 1.1 的证明.

记号 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集, $A \lesssim B$ 表示存在一个常数 C 使得 $A \leq CB$ 成立, $A \simeq B$ 表示 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 同时成立.

2 预备知识

2.1 分层 Lie 群上的一些基本概念

分层 Lie 群 $(\mathcal{G}, \circ)$ 定义为具有运算 $\circ$ 和单位元为 e 的单连通的 Lie 群, 且其左平移不变 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ (可假定为实的且维数有限) 满足直和分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^k V_i, \quad \text{其中对于 } i \leq k-1, \text{ 有 } [V_1, V_i] = V_{i+1}, [V_1, V_k] = 0,$$

k 称为群 $\mathcal{G}$ 的阶. 左平移不变 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和它相应的 Lie 群 $\mathcal{G}$ 可通过指数映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{G}$ 在微分同胚意义下等同起来, 也可以在 $\mathcal{G}$ 上定义一个双平移不变的 Haar 测度 dx (它是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Lebesgue 测度关于指数映射的一个提升).

对于 $r > 0$, 很自然地可以在 $\mathfrak{g}$ 上定义一个伸缩族

$$\delta_r \left(\sum_{i=1}^k v_i \right) = \sum_{i=1}^k r^i v_i, \quad \text{其中 } v_i \in V_i.$$

进而可以在 $\mathcal{G}$ 上引入一个伸缩族 $\delta_r^\mathcal{G} = \exp \circ \delta_r \circ \exp^{-1}$. $\delta_r^\mathcal{G}$ 与 δ_r 本质上是自同构的. 因此为方便起见, 仍记 $\delta_r^\mathcal{G}$ 为 δ_r (参见文献 [11]).

设 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$ 为分层 Lie 群 $\mathcal{G}$ 上齐次阶数为 1 的左平移不变向量场, 对应的次 Laplace 算子定义为 $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n X_j^2$, 则对于任意 $r > 0$, 有

$$\begin{aligned} X_j(f \circ \delta_r) &= r(X_j f) \circ \delta_r, \quad 1 \leq j \leq n, \quad f \in C^1(\mathcal{G}), \\ \delta_{1/r} \circ \mathcal{L} \circ \delta_r &= r^2 \mathcal{L}, \end{aligned}$$

即 X_j ($1 \leq j \leq n$) 和 $\mathcal{L}$ 关于伸缩的齐次阶分别为 1 和 2.

由文献 [12] 知, 在 $\mathcal{G}$ 上存在对称齐次度量 $\rho(\cdot) : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty)$, $\rho(x) \in C^\infty \setminus \{e\}$ 且满足

$$\rho(x^{-1}) = \rho(x), \quad \rho(\delta_r(x)) = r\rho(x), \quad \forall x \in \mathcal{G}, \quad r > 0$$

及 $\rho(x) = 0$ 当且仅当 $x = e$.

为方便起见, 记

$$\rho(x, y) := \rho(y^{-1} \circ x) = \rho(x^{-1} \circ y), \quad \forall x, y \in \mathcal{G}.$$

由此定义了一个 Coifman-Weiss 意义下的拟距离, 即存在一个常数 $\gamma \geq 1$ 满足

$$\rho(x, y) \leq \gamma(\rho(x, z) + \rho(z, y)) \quad \text{和} \quad \rho(x, y) \geq \gamma^{-1}(\rho(x, z) - \rho(z, y)), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{G}. \quad (2.1)$$

应当指出, 在分层 Lie 群 $\mathcal{G}$ 上存在着若干光滑且对称的齐次度量. 本文考虑由向量场 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$ 生成的 Carnot-Carathéodory 距离 d (参见文献 [12]). 该距离函数与任意的齐次对称度量 $\rho(\cdot)$ 等价, 即存在 $C_1 \geq 0$ 和 $C_2 \geq 0$ 满足

$$C_1 \rho(x, y) \leq d(x, y) \leq C_2 \rho(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{G}. \quad (2.2)$$

一般而言, 分层 Lie 群上由向量场 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$ 生成的 Carnot-Carathéodory 距离 d 在 $\mathcal{G} \setminus \{e\}$ 上都不是光滑的.

2.2 Riesz 位势 $\mathcal{I}_\alpha$

设 $Q = \sum_{i=1}^k i \cdot \dim V_i$ 为分层 Lie 群 $\mathcal{G}$ 的齐次维数, $0 < \alpha < Q$, 对于 $\mathcal{G}$ 上适当的可测函数 g , 其 Riesz 位势 $\mathcal{I}_\alpha(g)$ 可以写成

$$\mathcal{I}_\alpha(g)(x) = g * K_\alpha(x) = \int_{\mathcal{G}} g(y) K_\alpha(y^{-1} \circ x) dy,$$

其中

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} h_t(x) dt \in C^\infty(\mathcal{G} \setminus \{e\}),$$

此处, $h_t(x)$ 是相应于次 Laplace 算子 $\mathcal{L}$ 的热核.

回顾 $\nabla = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 从文献 [13] 知, 对于任意的 $x \in \mathcal{G}$, $t > 0$, 存在 $\sigma > 0$ 使得

$$Ct^{-Q/2} e^{-C'd(x)^2/t} \leq h_t(x) \leq C_\sigma t^{-Q/2} e^{-d(x)^2/4(1+\sigma)t},$$

$$|\nabla^k h_t(x)| \lesssim t^{-Q/2-k/2} e^{-d^2(x)/Ct}.$$

由此得到

$$K_\alpha(x) \simeq d(x)^{\alpha-Q}, \quad (2.3)$$

$$|\nabla K_\alpha(x)| \lesssim d(x)^{\alpha-Q-1}, \quad \forall x \neq e. \quad (2.4)$$

2.3 BOM($\mathcal{G}$)

为方便起见, 后文中均用 $B(x, r)$ 和 $S(x, r)$ 分别表示由 $d(\cdot)$ 所决定的中心为 x 且半径为 r 的开球和球面, B 表示由距离 $d(\cdot)$ 所决定的半径为 r_B 的开球, $|B|$ 表示 B 在 $\mathcal{G}$ 上的 Lebesgue 测度, 且对于任意的 $a > 0$, 记 $aB(x, r) = B(x, ar)$.

定义 2.1 定义 BMO (bounded mean oscillation) 空间 $\text{BMO}(\mathcal{G})$ 为

$$\text{BMO}(\mathcal{G}) := \{b \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{G}) : \|b\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} < \infty\},$$

其中

$$\|b\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} := \sup_{B \subset \mathcal{G}} \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B| dx, \quad b_B := \frac{1}{|B|} \int_B b(x) dx.$$

为简单起见, 记

$$M(b, B) := \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b_B| dx,$$

则 $\|b\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} = \sup_{B \subset \mathcal{G}} M(b, B)$.

定义 2.2 定义 $\text{CMO}(\mathcal{G})$ 为 $C_0^\infty(\mathcal{G})$ 在 $\text{BMO}(\mathcal{G})$ 中关于 $\|\cdot\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})}$ 的闭包.

对于空间 $\text{BMO}(\mathcal{G})$, 存在如下等价范数:

$$\|b\|'_{\text{BMO}(\mathcal{G})} = \sup_{B \subset \mathcal{G}} \inf_c \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - c| dx.$$

定义 2.3 在球 B 上, 如果数 $m_b(B)$ 同时满足

$$|\{x \in B : b(x) > m_b(B)\}| \leq \frac{1}{2}|B| \quad \text{和} \quad |\{x \in B : b(x) < m_b(B)\}| \leq \frac{1}{2}|B|,$$

则称 $m_b(B)$ 为球 B 上的均值.

根据文献 [10] 可知 $\|b\|'_{\text{BMO}(\mathcal{G})}$ 可以通过函数 b 的均值而取到, 而且对于每一个球 $B \subset \mathcal{G}$, 有

$$M(b, B) \simeq \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - m_b(B)| dx,$$

其中的常数不依赖于函数 b 和球 B .

2.4 Muckenhoupt 权类

由于分层 Lie 群可看作 Coifman-Weiss 意义^[14]下齐型空间的特例, 因此, $A_p(\mathcal{G})$ 和 $A_{p,q}(\mathcal{G})$ 同齐型空间上的定义一致 (参见文献 [15]). $\mathcal{G}$ 上的一个权函数 ω 是指它为 $\mathcal{G}$ 上一个局部可积的非负函数. 对任意可测集 $E \subset \mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}$ 上的权函数 ω , 记 $\omega(E) = \int_E \omega(x) dx$, $\omega^\theta(E) = \int_E \omega(x)^\theta dx$.

定义 2.4 设 $1 < p < \infty$, 称权函数 $\omega \in A_p(\mathcal{G})$ 是指它满足

$$[\omega]_{A_p(\mathcal{G})} := \sup_{B \subset \mathcal{G}} \left(\frac{\omega(B)}{|B|} \right) \left(\frac{\omega^{1/(1-p)}(B)}{|B|} \right)^{p-1} < \infty.$$

如果存在一个常数 C , 对任意球 $B \subset \mathcal{G}$, 有

$$\frac{\omega(B)}{|B|} \leq C \text{ess} \inf_{x \in B} \omega(x),$$

则称 $\omega \in A_1(\mathcal{G})$. 并记 $A_\infty(\mathcal{G}) := \bigcup_{1 \leq p < \infty} A_p(\mathcal{G})$.

设 $0 < \alpha < Q$, $1 < p < \infty$ 且满足 $1/p = 1/q + \alpha/Q$, 称权函数 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$ 是指它满足

$$[\omega]_{A_{p,q}(\mathcal{G})}^{1/q} := \sup_{B \subset \mathcal{G}} \left(\frac{\omega^q(B)}{|B|} \right)^{1/q} \left(\frac{\omega^{-p'}(B)}{|B|} \right)^{1/p'} < \infty.$$

对 $r > 1$, 称权函数 $\omega \in RH_r(\mathcal{G})$ (满足 r 阶逆 Hölder 条件) 是指对任意球 $B \subset \mathcal{G}$, 存在常数 C 满足

$$\left(\frac{\omega^r(B)}{|B|} \right)^{1/r} \leq C \frac{\omega(B)}{|B|}.$$

由文献 [16] 知, $\omega \in A_\infty(\mathcal{G})$ 当且仅当存在 $r > 1$ 使得 $\omega \in RH_r(\mathcal{G})$ 成立. 此外, 对每个 $\omega \in A_\infty(\mathcal{G})$, 存在常数 $C > 1$ 满足 $\omega(2B) \leq C\omega(B)$, 即 $A_\infty(\mathcal{G})$ 权满足双倍条件.

进一步, 由 $A_p(\mathcal{G})$ 和 $A_{p,q}(\mathcal{G})$ 权类的定义及 Hölder 不等式易得以下结论.

引理 2.1 (i) 设 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(\mathcal{G})$. 则存在只与 Q 、 p 、 $[\omega]_{A_p(\mathcal{G})}$ 和 γ 有关的 ϵ 满足

$$\omega^{1+\epsilon} \in A_p(\mathcal{G}), \quad \omega \in A_{p-\epsilon}(\mathcal{G}).$$

(ii) 设 $p, r > 1$. 若 $\omega \in A_p(\mathcal{G}) \cap RH_r(\mathcal{G})$, 则对于任意可测子集 $E \subset B$, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 满足

$$C_1 \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^p \leq \frac{\omega(E)}{\omega(B)} \leq C_2 \left(\frac{|E|}{|B|} \right)^{1-1/r}.$$

特别地, 对任意 $\beta > 1$, $R > 0$, 有 $\omega(B(x, \beta R)) \leq C\beta^{Qp}\omega(B(x, R))$.

引理 2.2 设 $0 < \alpha < Q$, $1 < p < \infty$ 且 $1/p = 1/q + \alpha/Q$. 则

(i) $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G}) \Rightarrow \omega^p \in A_p(\mathcal{G})$, $\omega^q \in A_q(\mathcal{G})$ 和 $\omega^{-p'} \in A_{p'}(\mathcal{G})$;

(ii) $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \omega^q \in A_{q(Q-\alpha)/Q}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \omega^q \in A_{1+q/p'}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \omega^{-p'} \in A_{1+p'/q}(\mathcal{G})$.

3 Riesz 位势交换子的加权紧性

本节致力于定理 1.1 的证明. 首先借助于 Riesz 位势算子核 K_α 的上下界估计来建立交换子 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 的一个局部上下界.

引理 3.1 假设 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < Q$ 且满足 $1/p = 1/q + \alpha/Q$, $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$ 和 $b \in \text{BMO}(\mathcal{G})$. 如果存在 $\delta > 0$ 和球列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty := \{B(x_j, r_j)\}_{j=1}^\infty$ 满足 $M(b, B_j) > \delta$, $\forall j \in \mathbb{N}$, 则存在 $\{f_j\} \subset L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})$ 满足 $\|f_j\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})} = 1$, 及存在正常数 β_1 、 β_2 和 β_3 , 对 $k > [\log_2 \beta_1]$, 有

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j)\omega\|_{L^q((2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j) \cap \mathcal{G}_{x_j})} \geq \beta_2 \frac{\delta r_j^\alpha}{2^{(k+1)(Q-\alpha)+1}} (\omega^q(2^{k+1}B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p} \quad (3.1)$$

和

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j)\omega\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)} \leq \beta_3 \frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1}B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \quad (3.2)$$

证明 由均值的定义可知, 对于每一个 $j \in \mathbb{N}$, 在 B_j 中存在互不相交的两个子集 E_{j_1} 和 E_{j_2} 满足

$$E_{j_1} \supset \{x \in B_j : b(x) > m_b(B_j)\} \quad \text{和} \quad E_{j_2} \supset \{x \in B_j : b(x) < m_b(B_j)\}$$

及 $|E_{j_1}| = |E_{j_2}| = |B_j|/2$. 令

$$f_j(x) := (\omega^p(B_j))^{-1/p}(\chi_{E_{j_1}}(x) - \chi_{E_{j_2}}(x)).$$

由于 $\text{supp}(f_j) \subset B_j$, 则对于每个 $x \in B_j$, 可知

$$|f_j(x)| = (\omega^p(B_j))^{-1/p}, \quad f_j(x)(b(x) - m_b(B_j)) \geq 0,$$

且 $\int_{B_j} f_j(x)dx = 0$, $\|f_j\|_{L^p_{\omega^p}(\mathcal{G})} = 1$.

由于 $[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j) = (b - m_b(B_j))\mathcal{I}_\alpha(f_j) - \mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)$, 只需分别估计 $\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)$ 和 $(b - m_b(B_j))\mathcal{I}_\alpha(f_j)$.

对于每个 $x \in \mathcal{G} \setminus 2B_j$, 易知

$$\begin{aligned} |(b - m_b(B_j))\mathcal{I}_\alpha(f_j)(x)| &\lesssim |b(x) - m_b(B_j)| \int_{B_j} \frac{d(y, x_j)}{d(x, x_j)^{Q+1-\alpha}} |f_j(y)| dy \\ &\lesssim \frac{|b(x) - m_b(B_j)||B_j|r_j}{d(x, x_j)^{Q+1-\alpha}} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

利用 John-Nirenberg 不等式得

$$\begin{aligned} \|b - m_b(B)\|_{L^p(2^{j+1}B)}^p &\lesssim \|b - m_b(2^{j+1}B)\|_{L^p(2^{j+1}B)}^p + |2^{j+1}B| |m_b(2^{j+1}B) - m_b(B)|^p \\ &\lesssim j^p |2^{j+1}B|, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad B \subset \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

即 $\frac{1}{|2^{j+1}B|} \int_{2^{j+1}B} |b(x) - m_b(B)|^p dx \lesssim j^p$. 从而

$$\begin{aligned} &r_j^{Q+1} \|(b(\cdot) - m_b(B_j))d(\cdot, x_j)^{(\alpha-Q-1)}\omega(\cdot)\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)} \\ &\lesssim \frac{r_j^{Q+1}}{(2^k r_j)^{Q+1-\alpha}} \|(b - m_b(B_j))\omega\|_{L^q(2^{k+1}B_j)} \\ &\lesssim \frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q+1-\alpha)}} \|b - m_b(B_j)\|_{L^{qr'}(2^{k+1}B_j)} \|\omega\|_{L^{qr}(2^{k+1}B_j)}, \quad \forall r > 1. \end{aligned}$$

注意到当 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$ 时, 由引理 2.1 和 2.2 知, 存在 $r > 1$ 使得 $\omega^q \in RH_r(\mathcal{G})$, 则由 (3.3) 和 (3.4) 可知, 存在常数 $\beta_4 > 0$ 满足

$$\begin{aligned} &\|(b - m_b(B_j))\mathcal{I}_\alpha(f_j)\omega\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)} \\ &\lesssim \frac{1}{(\omega^p(B_j))^{1/p}} \frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q+1-\alpha)}} \|b - m_b(B_j)\|_{L^{qr'}(2^{k+1}B_j)} \|\omega\|_{L^{qr}(2^{k+1}B_j)} \\ &\leq \beta_4 \frac{k r_j^\alpha}{2^{k(Q+1-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1}B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

另外, 当 $x \in \mathcal{G} \setminus 2B_j$ 时,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)(x)| &\lesssim d(x, x_j)^{\alpha-Q} (\omega^p(B_j))^{-1/p} \int_{B_j} |b(y) - m_b(B_j)| dy \\ &\lesssim |B_j| d(x, x_j)^{\alpha-Q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \end{aligned}$$

从而

$$\|\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)\omega\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)} \lesssim \frac{|B_j|}{(\omega^p(B_j))^{1/p}} \|d(\cdot, x_j)^{(\alpha-Q)}\omega(\cdot)\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \frac{r_j^Q}{(2^k r_j)^{Q-\alpha}} (\omega^q(2^{k+1} B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p} \\ &\lesssim \frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1} B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \end{aligned}$$

由此结合 (3.5), 结论 (3.2) 得证.

由 (2.1) 和 (2.2) 易知, 当 $k \geq [\log_2(2\gamma)]$, $y \in B_j$, $x \in (\mathcal{G} \setminus 2^k B_j) \cap \mathcal{G}_{x_j}$ 时,

$$\gamma^{-1}d(x, x_j) \leq d(x, y) \leq 2\gamma d(x, x_j).$$

进而由 $M(b, B_j) > \delta$ 得到

$$|\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)(x)| \gtrsim \delta |B_j| d(x, x_j)^{\alpha-Q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}.$$

于是, 当 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$ 时, 由引理 2.1(ii) 知,

$$\|\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)\omega\|_{L^q((2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j) \cap \mathcal{G}_{x_j})} \geq \beta_2 \frac{\delta r_j^\alpha}{2^{(k+1)(Q-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1} B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}.$$

由此结合 (3.5) 得

$$\begin{aligned} \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j)\omega\|_{L^q((2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j) \cap \mathcal{G}_{x_j})} &\geq \|\mathcal{I}_\alpha((b - m_b(B_j))f_j)\omega\|_{L^q((2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j) \cap \mathcal{G}_{x_j})} \\ &\quad - \|(b - m_b(B_j))\mathcal{I}_\alpha(f_j)\omega\|_{L^q(2^{k+1}B_j \setminus 2^k B_j)} \\ &\geq \left(\beta_2 \frac{\delta r_j^\alpha}{2^{(k+1)(Q-\alpha)}} - \beta_4 \frac{k r_j^\alpha}{2^{k(Q+1-\alpha)}} \right) \\ &\quad \times (\omega^q(2^{k+1} B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

选取足够大的 β_1 使之满足 $\beta_1 > 2\gamma$ 且当 $k > [\log_2 \beta_1]$ 时有

$$\beta_2 \frac{\delta r_j^\alpha}{2^{(k+1)(Q-\alpha)}} - \beta_4 \frac{k r_j^\alpha}{2^{k(Q+1-\alpha)}} \geq \beta_2 \frac{\delta r_j^\alpha}{2^{(k+1)(Q-\alpha)+1}}.$$

从而, 结论 (3.1) 成立. 引理得证. $\square$

为证明定理 1.1 的必要性, 我们还需要下列 Riesz-Kolmogorov 型定理.

引理 3.2 ^[10, 17] (Riesz-Kolmogorov 型定理) 设 $1 < p < \infty$, $\omega \in A_\infty(\mathcal{G})$. 则对 $x_0 \in \mathcal{G}$, $L_\omega^p(\mathcal{G})$ 的子集 $\mathcal{F}$ 在 $L_\omega^p(\mathcal{G})$ 中是相对紧的当且仅当以下 3 个条件成立:

- (i) $\mathcal{F}$ 有界;
- (ii) 极限 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{G} \setminus B(x_0, R)} |f(x)|^p \omega(x) dx = 0$ 对 $f \in \mathcal{F}$ 一致成立;
- (iii) 极限 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{G}} |f(x) - f_{B(x, r)}|^p \omega(x) dx = 0$ 对 $f \in \mathcal{F}$ 一致成立.

另外, Chen 等 ^[10] 在研究分层 Lie 群上 $[b, \mathcal{R}_j]$ 的加权紧性时给出了 $\text{CMO}(\mathcal{G})$ 空间的如下刻画.

引理 3.3 ^[10] 设 $f \in \text{BMO}(\mathcal{G})$. 则 $f \in \text{CMO}(\mathcal{G})$ 当且仅当以下 3 个条件成立:

- (i) $\lim_{a \rightarrow 0} \sup_{r_B=a} M(f, B) = 0$ 对所有球 $B \subset \mathcal{G}$ 一致成立;
- (ii) $\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{r_B=a} M(f, B) = 0$ 对所有球 $B \subset \mathcal{G}$ 一致成立;
- (iii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{B \subset \mathcal{G} \setminus B(e, r)} M(f, B) = 0$ 对所有球 $B \subset \mathcal{G}$ 一致成立,

其中 $M(f, B) := |B|^{-1} \int_B |f(x) - f_B| dx$.

此外, 注意到分层 Lie 群是 Coifman-Weiss 意义下的齐性空间, 且

$$|[b, \mathcal{I}_\alpha](f)(x)| \lesssim \int_{\mathcal{G}} |b(x) - b(y)| d(x, y)^{\alpha-Q} |f(y)| dy,$$

则由文献 [18, 定理 1.1] 知如下引理成立.

引理 3.4 设 $0 < \alpha < Q$, $1 < p < q < \infty$ 且 $1/p = 1/q + \alpha/Q$, 则对 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$, 有

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f)\|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} \lesssim \|b\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})}.$$

现在来证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 必要性 设 $b \in \text{CMO}(\mathcal{G})$. 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $b_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ 使得 $\|b - b_\varepsilon\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} < \varepsilon$. 由引理 3.4 可知,

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f) - [b_\varepsilon, \mathcal{I}_\alpha](f)\|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} \lesssim \|b - b_\varepsilon\|_{\text{BMO}(\mathcal{G})} \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})}.$$

因此, 只需证明当 $b \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ 时, $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 是 $L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})$ 到 $L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$ 的紧算子, 即证明对每个有界子集 $E \subset L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})$, $[b, \mathcal{I}_\alpha]E$ 在 $L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$ 中相对紧. 进而, 只需证明 $[b, \mathcal{I}_\alpha]E \subset L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$ 且满足引理 3.2(i)–3.2(iii).

由 $b \in C_0^\infty(\mathcal{G}) \subset \text{BMO}(\mathcal{G})$ 和引理 3.4 知, $[b, \mathcal{I}_\alpha]E \subset L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$, 且满足引理 3.2(i).

下证 $[b, \mathcal{I}_\alpha]E$ 满足引理 3.2(ii). 由 $b \in C_0^\infty(\mathcal{G})$, 不妨设 $\text{supp}(b) \subset B(e, R)$. 当 $t > 2$ 时, 有

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f)\|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G} \setminus B(e, tR))} \leq \|b\mathcal{I}_\alpha(f)\omega\|_{L^q(\mathcal{G} \setminus B(e, tR))} + \|\mathcal{I}_\alpha(bf)\omega\|_{L^q(\mathcal{G} \setminus B(e, tR))}.$$

由 $\text{supp}(b) \subset B(e, R)$ 和 $B(e, R) \cap (\mathcal{G} \setminus B(e, tR)) = \emptyset$ 可知上式右边第 1 项为 0. 因而, 只需要估计上式右边第 2 项. 当 $x \in \mathcal{G} \setminus B(e, tR)$ 时, 有

$$|\mathcal{I}_\alpha(bf)(x)| \leq \int_{B(e, R)} K_\alpha(x, y) |b(y)| |f(y)| dy \lesssim \frac{\|b\|_{L^\infty}}{d(x, e)^{Q-\alpha}} \int_{B(e, R)} |f(y)| dy.$$

由 Hölder 不等式, 当 $x \in \mathcal{G} \setminus B(e, tR)$ 时, 有

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\alpha(bf)(x)| &\lesssim d(x, e)^{\alpha-Q} \|f\omega\|_{L^p(B(e, R))} \|\omega^{-1}\|_{L^{p'}(B(e, R))} \\ &\lesssim d(x, e)^{\alpha-Q} R^{Q-\alpha} (\omega^q(B(e, R)))^{-1/q} \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})}. \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_\alpha(bf)\omega\|_{L^q(\mathcal{G} \setminus B(e, tR))} &\lesssim \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})} \frac{R^{Q-\alpha}}{(\omega^q(B(e, R)))^{1/q}} \\ &\quad \times \left(\sum_{k=\lfloor \log_2 t \rfloor}^{+\infty} \|K_\alpha(\cdot, e)\omega\|_{L^q(2^{k+1}B(e, R) \setminus 2^k B(e, R))}^q \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})} \frac{R^{Q-\alpha}}{(\omega^q(B(e, R)))^{1/q}} \left(\sum_{k=\lfloor \log_2 t \rfloor}^{+\infty} \frac{\omega^q(2^{k+1}B(e, R))}{(2^k R)^{q(Q-\alpha)}} \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})} \left(\sum_{k=\lfloor \log_2 t \rfloor}^{+\infty} \frac{1}{2^{qk(Q-\alpha)}} \frac{\omega^q(2^{k+1}B(e, R))}{\omega^q(B(e, R))} \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

而对于权函数 ω^q , 由引理 2.1 知, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\omega^q \in A_{q(Q-\alpha)/Q-\delta}$, 即有

$$\omega^q(2^{k+1}B(e, R)) \lesssim 2^{(k+1)q(Q-\alpha)-(k+1)Q\delta} [\omega^q]_{A_{q(Q-\alpha)/Q-\delta}} \omega^q(B(e, R)).$$

于是, 由 (3.7) 得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_\alpha(bf)\omega\|_{L^q(\mathcal{G}\setminus B(e,tR))} &\lesssim \|f\|_{L^p_{\omega^p}(\mathcal{G})} \left(\sum_{k=\lfloor \log_2 t \rfloor}^{+\infty} 2^{q(Q-\alpha)-(k+1)Q\delta} \right)^{1/q} \\ &\lesssim \|f\|_{L^p_{\omega^p}(\mathcal{G})} \left(\frac{2^{q(Q-\alpha)-Q\delta}}{1-2^{-Q\delta}} \right)^{1/q} t^{-Q\delta/q} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

即引理 3.2(ii) 成立.

接下来只需要证明 $[b, \mathcal{I}_\alpha]E$ 满足引理 3.2(iii). 由于

$$[b, \mathcal{I}_\alpha](f)(x) - ([b, \mathcal{I}_\alpha](f))_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(e,r)|} \int_{B(e,r)} ([b, \mathcal{I}_\alpha](f)(x) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f)(y \circ x)) dy,$$

于是只需估计 $[b, \mathcal{I}_\alpha](f)(x) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f)(y \circ x)$. 对于任意 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, $r > 0$ 和 $y \in B(e, r)$, 当 $x \in \mathcal{G}$ 时, 有

$$\begin{aligned}&[b, \mathcal{I}_\alpha](f)(x) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f)(y \circ x) \\ &= \int_{\mathcal{G}} K_\alpha(x, z)(b(x) - b(z))f(z)dz - \int_{\mathcal{G}} K_\alpha(y \circ x, z)(b(y \circ x) - b(z))f(z)dz \\ &= \int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} K_\alpha(x, z)(b(x) - b(y \circ x))f(z)dz \\ &\quad + \int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} (K_\alpha(x, z) - K_\alpha(y \circ x, z))(b(y \circ x) - b(z))f(z)dz \\ &\quad + \int_{d(x,z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e)} K_\alpha(x, z)(b(x) - b(z))f(z)dz \\ &\quad - \int_{d(x,z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e)} K_\alpha(y \circ x, z)(b(y \circ x) - b(z))f(z)dz \\ &=: L_1 + L_2 + L_3 - L_4.\end{aligned}$$

下面分别估计 L_1 、 L_2 、 L_3 和 L_4 . 对于 L_2 , 因为

$$\begin{aligned}\int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha+1}} dz &\leq \sum_{[\log_2 \varepsilon^{-1}]}^{+\infty} \int_{2^k d(y,e) \leq d(x,z) < 2^{k+1} d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha+1}} dz \\ &\leq \sum_{[\log_2 \varepsilon^{-1}]}^{+\infty} \frac{1}{(2^k d(y,e))^{Q-\alpha+1}} \int_{2^{k+1} d(y,e) > d(x,z)} |f(z)| dz \\ &\lesssim \sum_{[\log_2 \varepsilon^{-1}]}^{+\infty} \frac{1}{2^k} M_\alpha(f)(x),\end{aligned}$$

其中

$$M_\alpha(f)(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{t^{Q-\alpha}} \int_{d(x,z) < t} |f(z)| dz,$$

所以由 $b \in C_0^\infty(\mathcal{G})$ 和 (2.4) 得

$$\begin{aligned}|L_2| &\leq \int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} |K_\alpha(x, z) - K_\alpha(y \circ x, z)| |b(y \circ x) - b(z)| |f(z)| dz \\ &\lesssim d(y, e) \int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha+1}} dz \lesssim \varepsilon d(y, e) M_\alpha(f)(x).\end{aligned}$$

对于 L_3 , 由于

$$\begin{aligned} \int_{d(x,z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha-1}} dz &\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k \varepsilon^{-1}d(y,e) < d(x,z) \leq 2^{k+1} \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha-1}} dz \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^k \varepsilon^{-1}d(y,e))^{Q-\alpha-1}} \int_{d(x,z) \leq 2^{k+1} \varepsilon^{-1}d(y,e)} |f(z)| dz \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k \varepsilon^{-1}d(y,e) M_\alpha(f)(x), \end{aligned}$$

利用 (2.3), 并对 $b(x) - b(z)$ 应用微分中值定理得

$$|L_3| \lesssim \int_{d(x,z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(x,z)^{Q-\alpha-1}} dz \lesssim \varepsilon^{-1}d(y,e) M_\alpha(f)(x).$$

同理,

$$\begin{aligned} |L_4| &\lesssim \int_{d(x,z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(y \circ x, z)^{Q-\alpha-1}} dz \\ &\lesssim \int_{d(y \circ x, z) \leq \varepsilon^{-1}d(y,e) + d(y,e)} \frac{|f(z)|}{d(y \circ x, z)^{Q-\alpha-1}} dz \\ &\lesssim (\varepsilon^{-1}d(y,e) + d(y,e)) M_\alpha(f)(x). \end{aligned}$$

最后来处理 L_1 . 因为

$$\int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} |K_\alpha(x,z)f(z)| dz \lesssim I_\alpha(|f|)(x),$$

其中

$$I_\alpha(f)(x) = \int_G \frac{f(y)}{d(x,y)^{Q-\alpha}} dy,$$

故有

$$|L_1| \leq |b(x) - b(y \circ x)| \int_{d(x,z) > \varepsilon^{-1}d(y,e)} |K_\alpha(x,z)f(z)| dz \lesssim d(y,e) I_\alpha(|f|)(x).$$

综合上述 L_1 – L_4 的估计以及 M_α 和 I_α 的 $L_{\omega^p}^p$ – $L_{\omega^q}^q$ 有界性 (参见文献 [19]) 得

$$\begin{aligned} &\| [b, \mathcal{I}_\alpha](f)(\cdot) - ([b, \mathcal{I}_\alpha](f))_{B(\cdot, r)} \|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} \\ &\leq \left\| \left(\frac{1}{|B(e, r)|} \int_{B(e, r)} (|L_1| + |L_2| + |L_3| + |L_4|) dy \right) \omega \right\|_{L^q(\mathcal{G})} \\ &\lesssim r \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})} + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}r) \|f\|_{L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})}. \end{aligned}$$

因此, 取 $r < \varepsilon^2$, 则

$$\| [b, \mathcal{I}_\alpha](f) - ([b, \mathcal{I}_\alpha](f))_{B(\cdot, r)} \|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} \lesssim \varepsilon,$$

即引理 3.2(iii) 成立. 必要性得证.

充分性 采用反证法证明. 假设 b 不属于 $\text{CMO}(\mathcal{G})$, 即引理 3.3 中条件 (i)–(iii) 至少有一条不成立. 下面分别针对条件 (i)–(iii) 之一不成立导出矛盾.

情形 1 若 b 不满足条件 (i), 则存在 $\delta > 0$ 和一个半径 r_j 趋于 0 的球列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty := \{B(x_i, r_j)\}_{j=1}^\infty$, 当 j 趋于 ∞ 时, 有 $M(f, B_j) > \delta$.

选取 β_1 、 β_2 和 β_3 如引理 3.1 所述, 且取待定的 $\gamma_1 > \beta_1 > 0$. 再选取 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ 的一个无穷子列 $\{B_{j_i}^{(1)}\}$ 使其满足 $\gamma_1^Q |B_{j_{i+1}}^{(1)}| \leq |B_{j_i}^{(1)}|$. 对于每个 $i \in \mathbb{N}$, 令

$$U_{j_i} := \gamma_1 B_{j_i}^{(1)} \setminus \beta_1 B_{j_i}^{(1)}, \quad U_{j_i}^{(1)} := U_{j_i} \setminus \gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(1)}, \quad U_{j_i}^{(2)} := \mathcal{G} \setminus \gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(1)}.$$

易知, $U_{j_i}^{(1)} \subset \gamma_1 B_{j_i}^{(1)} \cap U_{j_i}^{(2)}$ 和 $U_{j_i}^{(1)} = U_{j_i} \setminus (U_{j_i} \setminus U_{j_i}^{(2)})$. 从而

$$\begin{aligned} \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i}) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}})\|_{L_{\omega_q}^q(\mathcal{G})} &\geq \|([b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i}) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}}))\omega\|_{L^q(U_{j_i}^{(1)})} \\ &\geq \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i})\omega\|_{L^q(U_{j_i}^{(1)})} - \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}})\omega\|_{L^q(U_{j_i}^{(2)})} \\ &=: I_1 - I_2. \end{aligned}$$

首先讨论 I_1 的下界. 记 $T_{j_i} := U_{j_i} \setminus U_{j_i}^{(2)}$. 若 T_{j_i} 非空, 则由 $T_{j_i} \subset \gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(1)}$ 得 $|T_{j_i}| \leq |\gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(1)}| \leq |B_{j_i}^{(1)}|$. 对于每个 $k \geq [\log_2 \gamma_1]$, 有 $|2^{k+1} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^k B_{j_i}^{(1)}| > |2^k B_{j_i}^{(1)}| > |T_{j_i}|$. 进而存在 k_0 , 可以找到至多两个环 $2^{k_0+2} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^{k_0+1} B_{j_i}^{(1)}$ 和 $2^{k_0+1} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^{k_0} B_{j_i}^{(1)}$ 满足

$$T_{j_i} \subset (2^{k_0+2} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^{k_0+1} B_{j_i}^{(1)}) \cup (2^{k_0+1} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^{k_0} B_{j_i}^{(1)}).$$

从而由 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i})\omega\|_{L^q(U_{j_i} \setminus (U_{j_i} \setminus U_{j_i}^{(2)}))} \\ &\geq \left(\sum_{k=[\log_2 \beta_1]+1, k \neq k_0, k_0+1}^{[\log_2 \gamma_1]-1} \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i})\omega\|_{L^q((2^{k+1} B_{j_i}^{(1)} \setminus 2^k B_{j_i}^{(1)}) \cap \mathcal{G}_{x_i})}^q \right)^{1/q} \\ &\geq \beta_2 \delta \left(\sum_{k=[\log_2 \beta_1]+1, k \neq k_0, k_0+1}^{[\log_2 \gamma_1]-1} \frac{1}{2^{(k+1)q(Q-\alpha)+1}} \left(\frac{\omega^q(B_{j_i}^{(1)})}{|B_{j_i}^{(1)}|} \right) \left(\frac{\omega^p(B_{j_i}^{(1)})}{|B_{j_i}^{(1)}|} \right)^{-q/p} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

而由 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$ 易知

$$\left(\frac{\omega^q(B_{j_i}^{(1)})}{|B_{j_i}^{(1)}|} \right)^{1/q} \left(\frac{\omega^p(B_{j_i}^{(1)})}{|B_{j_i}^{(1)}|} \right)^{-1/p} \gtrsim 1. \quad (3.8)$$

进而,

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \beta_2' \delta \left(\sum_{k=[\log_2 \beta_1]+1, k \neq k_0, k_0+1}^{[\log_2 \gamma_1]-1} \frac{1}{2^{kq(Q-\alpha)}} \right)^{1/q} \\ &\geq \beta_2' \delta \left(\sum_{k=[\log_2 \beta_1]+3}^{[\log_2 \gamma_1]-1} \frac{1}{2^{kq(Q-\alpha)}} \right)^{1/q} \\ &\geq \beta_2' \delta 8^{Q-\alpha} \beta_1^{Q-\alpha} \\ &=: \gamma_2. \end{aligned}$$

若 $T_{j_i} = U_{j_i} \setminus U_{j_i}^{(2)} = \emptyset$, 则上面不等式自然成立.

接下来估计 I_2 的上界. 首先证明

$$\frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1}B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p} \lesssim \frac{1}{2^{kQ\varepsilon_0/p}}, \quad (3.9)$$

其中 ε_0 是一个正的常数.

注意到 $\omega \in A_{p,q}(\mathcal{G})$, 由引理 2.1 和 2.2 知, 存在 ε_0 使得 $\omega^p \in A_{p-\varepsilon_0}$. 于是有

$$\omega^p(2^{k+1}B_j) \leq 2^{(k+1)Q(p-\varepsilon_0)} [\omega^p]_{p-\varepsilon_0} \omega^p(B_j).$$

从而 $(\omega^p(B_j))^{-1/p} \lesssim 2^{kQ(1-\varepsilon_0/p)} (\omega^p(2^{k+1}B_j))^{-1/p}$. 再结合 $(\frac{\omega^q(2^{k+1}B_j)}{|2^{k+1}B_j|})^{1/q} (\frac{\omega^p(2^{k+1}B_j)}{|2^{k+1}B_j|})^{-1/p} \lesssim 1$, 可知

$$\frac{r_j^\alpha}{2^{k(Q-\alpha)}} (\omega^q(2^{k+1}B_j))^{1/q} (\omega^p(B_j))^{-1/p} \lesssim \frac{1}{2^{kQ\varepsilon_0/p}}. \quad (3.10)$$

由此和 (3.2) 得

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}}) \omega\|_{L^q(2^{k+1}B_{j_{i+1}}^{(1)} \setminus 2^k B_{j_{i+1}}^{(1)})}^q \leq \beta'_3 \frac{1}{2^{kQ\varepsilon_0/p}}.$$

故有

$$I_2 \leq \left(\sum_{k=\lceil \log_2 \gamma_1 \rceil}^{+\infty} \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}}) \omega\|_{L^q(2^{k+1}B_{j_{i+1}}^{(1)} \setminus 2^k B_{j_{i+1}}^{(1)})}^q \right)^{1/q} \leq \beta'_3 \left(\frac{\gamma_1^{-Q\varepsilon_0 q/p}}{1 - 2^{-Q\varepsilon_0 q/p}} \right)^{1/q}.$$

取 $\gamma_1 > \beta_1 + 4$ 满足

$$\gamma_2 - \beta'_3 \left(\frac{\gamma_1^{-Q\varepsilon_0 q/p}}{1 - 2^{-Q\varepsilon_0 q/p}} \right)^{1/q} \geq \frac{1}{2} \gamma_2.$$

则

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_i}) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j_{i+1}})\|_{L^q_{\omega^q}(\mathcal{G})} \geq I_1 - I_2 \geq \frac{1}{2} \gamma_2.$$

这与 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 是 $L^p_{\omega^p}(\mathcal{G})$ 到 $L^q_{\omega^q}(\mathcal{G})$ 的紧算子相矛盾. 因此 b 满足条件 (i).

情形 2 假设 b 不满足 (ii), 则存在 $\delta > 0$ 和球列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ 满足 $M(b, B_j) > \delta$, 且当 $j \rightarrow \infty$ 时, 有 $r_j \rightarrow \infty$. 从而可取 $\{B_j\}$ 的一个子列 $\{B_{j_i}^{(2)}\}$ 满足 $\gamma_1^Q |B_{j_i}^{(2)}| \leq |B_{j_{i+1}}^{(2)}|$. 对于给定的 i , 令

$$U_{j_{i+1}} := \gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(2)} \setminus \beta_1 B_{j_{i+1}}^{(2)}, \quad U_{j_{i+1}}^{(1)} := U_{j_{i+1}} \setminus \gamma_1 B_{j_i}^{(2)}, \quad U_{j_{i+1}}^{(2)} := \mathcal{G} \setminus \gamma_1 B_{j_i}^{(2)}.$$

则有 $U_{j_{i+1}}^{(1)} \subset \gamma_1 B_{j_{i+1}}^{(2)} \cap U_{j_{i+1}}^{(2)}$ 和 $U_{j_{i+1}}^{(1)} = U_{j_{i+1}} \setminus (U_{j_{i+1}} \setminus U_{j_{i+1}}^{(2)})$. 根据引理 3.1 以及重复情形 1 的证明过程, 可以导出 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 从 $L^p_{\omega^p}(\mathcal{G})$ 到 $L^q_{\omega^q}(\mathcal{G})$ 不是紧算子. 这与已知矛盾, 从而 b 必满足条件 (ii).

情形 3 假设 b 不满足条件 (iii), 则存在 $\delta > 0$ 使得对于每个 $r > 0$, 都可找到一个可测集合 $B \subset \mathcal{G} \setminus B(e, r)$ 满足 $M(b, B) > \delta$.

首先, 对于上述 δ , 存在球列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ 使得对于每个 j 有

$$M(b, B_j) > \delta \quad (3.11)$$

和 $\gamma_1 B_j \cap \gamma_1 B_{j+1} = \emptyset$ 成立.

事实上, 假定 $C_\delta > 0$ 为待定常数. 然后取 $R_1 > C_\delta$, 则存在球 $B_1 := B(x_1, r_1) \subset \mathcal{G} \setminus B(e, R_1)$ 使得 (3.11) 成立. 同理, 对于 $j = 2, 3, \dots$, 存在球 $B_j := B(x_j, r_j) \subset \mathcal{G} \setminus B(e, R_j)$ 满足 $R_j = \rho(x_{j-1}, e) + 4\gamma_1 C_\delta$ 使得 (3.11) 成立. 重复上述步骤, 可以得到球列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ 使得对每个球 (3.11) 都成立. 此外, 由于 b

满足条件 (ii), 可知对于上述 δ , 存在常数 $\tilde{C}_\delta > 0$, 对于每个满足 $r_B > \tilde{C}_\delta$ 的球 B 有 $M(b, B) < \delta$ 成立. 再结合球 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ 的选取可知, 对于所有的 j , $r_j \leq C_\delta := \tilde{C}_\delta$ 成立. 因此, 对于所有的 j , 可以得到 $\gamma_1 r_j < \gamma_1 C_\delta < 4\gamma_1 C_\delta$. 从而,

$$\text{dist}(\gamma_1 B_j, \gamma_1 B_{j+1}) \geq R_{j+1} - (d(x_j, e) + \gamma_1 r_j) - \gamma_1 r_{j+1} \geq 4\gamma_1 C_\delta - 2\gamma_1 C_\delta = 2\gamma_1 C_\delta, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

即 (3.11) 成立.

记 $\tilde{U}_j^{(1)} := \gamma_1 B_j \setminus \beta_1 B_j$, $\tilde{U}_j^{(2)} := \mathcal{G} \setminus \gamma_1 B_{j+1}$. 易知 $\tilde{U}_j^{(1)} \subset \tilde{U}_j^{(2)}$. 而

$$\begin{aligned} \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j+1})\|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} &\geq \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j+1})\|_{L_{\omega^q}^q(\tilde{U}_j^{(1)})} \\ &\geq \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j)\omega\|_{L^q(\tilde{U}_j^{(1)})} - \|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j+1})\omega\|_{L^q(\tilde{U}_j^{(2)})} \\ &=: \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2. \end{aligned}$$

类似于情形 1 对 I_1 和 I_2 的处理, 可以得到 $\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 \gtrsim \gamma_2$, 即

$$\|[b, \mathcal{I}_\alpha](f_j) - [b, \mathcal{I}_\alpha](f_{j+1})\|_{L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})} \gtrsim \gamma_2.$$

这与 $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ 是 $L_{\omega^p}^p(\mathcal{G})$ 到 $L_{\omega^q}^q(\mathcal{G})$ 的紧算子性相矛盾. 因此, b 满足条件 (iii). 定理 1.1 得证. $\square$

参考文献

- 1 Uchiyama A. On the compactness of operators of Hankel type. *Tohoku Math J* (2), 1978, 30: 163–171
- 2 Wang S. Compactness of commutators of fractional integrals (in Chinese). *Chinese Ann Math Ser A*, 1987, 8: 475–482
[王世林. 分数次积分交换子的紧致性. *数学年刊 A 辑*, 1987, 8: 475–482]
- 3 Chaffee L, Torres R H. Characterization of compactness of the commutators of bilinear fractional integral operators. *Potential Anal*, 2015, 43: 481–494
- 4 Chen J, Hu G. Compact commutators of rough singular integral operators. *Canad Math Bull*, 2015, 58: 19–29
- 5 Chen Y, Ding Y, Wang X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey spaces. *Potential Anal*, 2009, 30: 301–313
- 6 Guo W, Wu H, Yang D. A revisit on the compactness of commutators. *Canad J Math*, 2021, 73: 1667–1697
- 7 Krantz S G, Li S Y. Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications, I. *J Math Anal Appl*, 2001, 258: 629–641
- 8 Krantz S G, Li S Y. Boundedness and compactness of integral operators on spaces of homogeneous type and applications, II. *J Math Anal Appl*, 2001, 258: 642–657
- 9 Wu H, Yang D. Characterizations of weighted compactness of commutators via $\text{CMO}(\mathbb{R}^n)$. *Proc Amer Math Soc*, 2018, 146: 4239–4254
- 10 Chen P, Duong X T, Li J, et al. Compactness of Riesz transform commutator on stratified Lie groups. *J Funct Anal*, 2019, 277: 1639–1676
- 11 Folland G B, Stein E M. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 12 Bonfiglioli A, Lanconelli E, Uguzzoni F. *Stratified Lie Group and Potential Theory for Their Sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2007
- 13 Varopoulos N, Saloff-Coste L, Coulhon T. *Analysis and Geometry On Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 100. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 14 Coifman R R, Weiss G. *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 242. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1971
- 15 Hytönen T, Pérez C, Rela E. Sharp reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type. *J Funct Anal*, 2012, 263: 3883–3899

- 16 Indratno S, Maldonado D, Silwal S. A visual formalism for weights satisfying reverse inequalities. *Expo Math*, 2015, 33: 1–29
- 17 Górka P, Macios A. The Riesz-Kolmogorov theorem on metric spaces. *Miskolc Math Notes*, 2014, 15: 459–465
- 18 Bernardis A, Hartzstein S, Pradolini G. Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. *J Math Anal Appl*, 2006, 322: 825–846
- 19 Genebashvili I, Gogatishvili A, Kokilashvili V, et al. *Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 92. Harlow: Addison-Wesley/Longman, 1998

Characterization of weighted compactness for commutators of Riesz potentials on stratified Lie groups

Songqing Chen, Huoxiong Wu & Fulin Yang

Abstract Let $\mathcal{G}$ be a stratified Lie group with homogenous dimension Q and $\{X_j\}_{j=1}^n$ be a basis for its left-invariant vector fields of degree one. Let $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n X_j^2$ be the sub-Laplacian on $\mathcal{G}$. The fractional integrals on $\mathcal{G}$ are defined as $\mathcal{I}_\alpha = (-\mathcal{L})^{-\alpha/2}$. The weighted compactness of the commutator $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ generated by $\mathcal{I}_\alpha$ with a local integrable function b is studied. The characterization of $\text{CMO}(\mathcal{G})$ via the weighted compactness of $[b, \mathcal{I}_\alpha]$ is established.

Keywords stratified Lie groups, Riesz potentials, commutators, weighted compactness, $\text{BMO}(\mathcal{G})$, $\text{CMO}(\mathcal{G})$

MSC(2020) 43A15, 43A17, 22E30, 42B20, 43A80

doi: 10.1360/SSM-2020-0245