高精度感应地磁场正演模拟计算及其潜在应用分析

姚鸿波¹, 任政勇^{1*}, 汤井田^{1†}, 林玉峰², 殷长春³, 胡祥云⁴, 黄清华⁵, 张可可⁶

1. 中南大学地球科学与信息物理学院, 长沙 410083;
2. 南方科技大学地球与空间科学系, 深圳 518055;
3. 吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026;
4. 中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院, 武汉 430074;
5. 北京大学地球与空间科学学院, 北京 100871;
6. 澳门科技大学月球与行星科学国家重点实验室, 澳门 999078

* 通讯作者, E-mail: renzhengyong@csu.edu.cn

† 通讯作者, E-mail: jttang@csu.edu.cn

收稿日期: 2020-09-05; 收修改稿日期: 2021-04-04; 接受日期: 2021-05-07; 网络版发表日期: 2021-07-06

国家自然科学基金项目(批准号: 72088101、41922027、41830107、41811530010)、中南大学创新驱动团队项目(编号: 2020CX0012)、湖南自然科学基金项目(编号: 2019JJ20032)、澳门基金会和中国国家航天局民用航天技术预先研究项目(编号: D020308、D020303)资助

摘要 覆盖全球的高精度地磁卫星数据促使我们研究基于全球电磁感应模型的地幔电导率反演算法, 而反演的关键在于研发高精度和高效的地球电磁感应正演求解器. 为克服现有正演求解器存在的难以处理复杂地球、求解方程病态、地表边界难处理、正演功能难扩展到后续反演研究等缺陷, 文章开发了一套基于势场方程的全新的全球尺度地球电磁感应有限元正演求解器. 首先, 利用Coulomb规范条件和电流密度连续性方程, 获得了磁矢量势和电标量势的具有椭圆性质的总场控制方程. 然后, 从磁层环形电流源产生的一次场出发, 建立用磁矢量势表示的外部场源数学模型, 从而实现外部场源的边界条件加载方法; 利用线性节点四面体有限单元, 获得有限元线性方程组, 并采用最新的代数多重网格预处理Krylov子空间FGMRES迭代法, 结合多线程并行计算技术, 实现大规模线性方程组的快速并行求解; 采用局部加密的四面体网格以及加权移动最小二乘法, 从磁场矢量势和电标量势获得高精度电磁场. 最后, 使用理论模型验证了正演求解器的正确性. 采用真实三维地球模型, 计算了450和200km高度(即将发射的澳科卫星的预计飞行高度)的高精度感应地磁场正演响应. 模型计算结果表明: (1) 在450km高度的地幔感应磁场幅度为外部一次场源幅度的10~30%, 地幔产生的感应磁场幅度可达10~30nT, 远高于卫星观测精度. 近地点200km高度的地磁场包含了更强的二次场信号. (2) 海洋产生的感应磁场在450和200km卫星飞行高度可以达到5~30nT. 海洋感应磁场具有明显的沿海岸线分布的特征, 感应磁场的大小和分布与探测周期具有明显的相关性. 因此, 解释卫星感应磁场数据, 需要仔细考虑海洋的影响. (3) 文章研发的正演求解器具有模拟真实复杂三维地球、计算速度快、精度高等优点, 该求解器为后续的卫星地磁感应数据反演提供了核心引擎.

中文引用格式: 姚鸿波, 任政勇, 汤井田, 林玉峰, 殷长春, 胡祥云, 黄清华, 张可可. 2021. 高精度感应地磁场正演模拟计算及其潜在应用分析. 中国科学: 地球科学, 51(10): 1796–1812, doi: 10.1360/SSTe-2020-0234

英文引用格式: Yao H, Ren Z, Tang J, Lin Y, Yin C, Hu X, Huang Q, Zhang K. 2021. 3D finite-element modeling of Earth induced electromagnetic field and its potential applications for geomagnetic satellites. Science China Earth Sciences, 64(10): 1798–1812, <https://doi.org/10.1007/s11430-020-9786-9>

关键词 全球电磁模型, 地磁卫星, 澳科一号, 有限元, 地幔电导率

1 引言

当前, 世界主要国家相继发射了数颗地球电磁卫星(例如Oersted、CHAMP、Swarm、张衡一号等). 2022年, 澳门特别行政区政府与国家航天局将联合发射世界上第一颗低纬度地磁探测卫星——澳科一号. 地球电磁卫星可用于研究地球内部结构、地球外部电流体系以及太阳射线等重大科学问题, 地球卫星电磁数据的研究与解释逐渐成为地球科学的新热点.

卫星观测的地球磁场数据来源于多种类型的电磁现象, 主要分为静磁场以及变化场. 静磁场包括由地核产生的随时间变化极其缓慢的地球主磁场和静态的岩石圈磁场. 变化场则包括地球磁层和电离层电流体系产生的一次磁场以及它们在地球内部(导电海水、地壳和地幔)产生的二次感应磁场、海洋运动感应电流产生的一次磁场及其在异常体中产生的二次感应磁场等. 反演这些随时间变化的感应磁场数据, 可获得地球内部的电导率结构. 其中磁层电流及其地球内部感应电流产生的磁场可达50~500nT(Olsen, 2007), 变化周期为几小时到几个月, 感应电流源区深度范围为地幔转换带及下地幔400~1600km. 电离层Sq电流及其地球内部感应电流产生的磁场可达20~50nT(Olsen, 2007), 变化周期为几小时到一天, 感应电流源区深度范围为上地幔100~400km. 海洋潮汐运动感应磁场以太阴半日潮M2为主要成分, 周期约为12.42h, 其幅值为几个nT, 可用于约束海洋岩石圈及软流圈电性结构(Grayver等, 2016; Zhang等, 2019). 与天然地震数据(Romanowicz, 2003)、重力数据(Greff-Lefftz等, 2016)等相比, 卫星磁场数据提供的电导率信息与地球深部水含量和温度分布直接相关, 直接指示地球内部结构和物理化学性质. 因此, 覆盖全球的高精度地磁卫星数据的反演和解释可用于探讨地幔结构、地幔对流、板块构造及大陆漂移、造山运动和火山喷发等重大地球科学问题(徐光晶等, 2015; 郑永飞等, 2015).

地球电导率反演成像涉及外部电流源、地球电导率模型及观测数据等三个研究对象. 卫星电磁感应的物理机理为: 外部电流源产生的一次入射场在地球内

部导体中产生感应电流源, 感应电流激发二次场, 卫星观测包含一次场和二次场的总场数据. 利用总场数据和地球电导率模型的非线性关系, 反演获得地球电导率. 反演难点在于外部电流源的几何位置及空间形态和地球电导率结构均未知. 幸运的是, 利用已有的空间探测项目(例如Oersted、CHAMP)的研究结果, 可以建立近似的外部电流源数学模型(例如磁层环形电流源, 由距离地球3~10倍地球半径的赤道平面向西漂移的带状电荷粒子形成, 变化周期主要为几小时到几个月). 因此, 卫星感应磁场数据的反演可利用外部电流源的近似数学模型(但后续更精细的反演研究需要考虑更复杂的外部电流源, 甚至需要同时反演外部未知电流源), 致力于研发高精度快速地反算观测数据和地球电导率非线性关系的反演算法.

目前, 已经存在一些地磁台站数据反演研究. 已有反演算法可归纳为非线性共轭梯度算法(Kelbert等, 2008; Kelbert等, 2009; Sun等, 2015)和拟牛顿算法(Kuvshinov和Semenov, 2012; Semenov和Kuvshinov, 2012; Koyama等, 2014; 李世文等, 2019; Zhang等, 2020). 不同的研究机构获得的反演结果存在较大差异, 主要原因是地面台站数据分布稀疏、采用不同的数据集、对复杂地球的不同程度简化、正演精度难保证、反演非唯一性等(Kelbert等, 2014). 卫星观测的感应磁场数据具有独特的优势, 与地面数据相比, 具有分布广、数据点均匀、覆盖海洋等优点. 因此, 反演卫星感应磁场数据可获得更精细的地球电导率结构.

反演过程中最耗时的步骤为正演计算(殷长春等, 2020), 反演的效果也严重依赖于正演精度. 因此, 反演卫星感应磁场数据和地面电磁感应数据的关键工作为研发最大程度地近似复杂地球和提供高精度感应电磁场空间分布的正演求解器. 目前的正演求解器一般采用解析法、积分方程法(Kuvshinov, 2008; Kuvshinov和Semenov, 2012; Koyama等, 2014; Chen等, 2020)、有限差分法(Uyeshima和Schultz, 2000; Kelbert等, 2008; 李建平等, 2018; Zhang等, 2019; 罗威等, 2019; 韩骑等, 2020)、谱方法(Martinec, 1999)、时域球谐有限元法(Velinský和Martinec, 2005)及有限元法(Everett

和Schultz, 1996; Weiss和Everett, 1998; Yoshimura和Oshiman, 2002; Ribaud等, 2012). 解析法只适合于简化模型, 例如, Everett和Schultz(1995)推导了单个偏心嵌套球体的解析解. Martinec(1998)推导和验证了多个偏心嵌套球体的半解析解. Sun和Egbert(2012)推导了一维圈层上覆表面不均匀电导模型的薄板公式等. 积分方程法基于圈层结构的张量格林函数, 对于几何形态较为简单, 规模较小的异常体, 形成的稠密线性方程组较小, 求解速度快, 但是, 积分方程法难以处理复杂模型. 交错网格有限差分法使用结构化的矩形块网格, 对于弯曲电导率界面的模拟不够灵活, 网格在南北极常常具有几何奇异性(值得单独说明的是, Weiss(2010)提出了一种具有同心嵌套三角球壳单元剖分的有限差分法, 该方法可避免两极附近的网格几何奇异性). 谱方法用全局光滑的球谐函数展开来表达场, 对于电导率变化较小的模型计算速度快且内存消耗较小, 但是球谐展开不能很好的处理较大的横向电导率不连续问题(如海洋和大陆界面), 在电导率不连续界面附近产生较大的振荡(Kelbert等, 2014). 时域球谐有限元法可以较为容易地模拟卫星磁场数据的时空变化, 但具有和频率域谱方法类似的缺点.

有限元法具备模拟真实地球的能力. 借助于非结构四面体离散化技术(Geuzaine和Remacle, 2009), 有限元法可以很好地进行球体剖分, 进而减少几何离散误差和提高电磁场的数值解精度. 有限元法一般采用如下两种策略: 场方程法和势方程法. 场方程法的偏微分方程含有双旋度算子, 双旋度算子包含了大量的空解, 导致系统严重病态、具有非常大的条件数. 卫星电磁感应问题的频率非常低(周期常为几小时到几个月), 极低的频率加剧了方程系统的病态性, 导致计算出的电磁场空间分布不准确, 经常需要复杂的预处理器(Hiptmair和Xu, 2007; Grayver等, 2019). 势方程法可避免双旋度算子带来的病态性. Everett和Schultz(1996)、Weiss和Everett(1998)开发了基于势方程的电磁感应有限元正演求解器, 在地球内部采用磁矢势和电标势, 在空气层采用磁标势, 这种空气地球分开的处理思路可以有效减少空气中的未知数, 但是增加了地表处边界条件处理的复杂性. Yoshimura和Oshiman(2002)开发了基于磁矢势双旋度方程的有限元正演求解器, 但该方法仍然保留了双旋度算子导致的病态性. Ribaud等(2012)利用商业软件FlexPDE开发了基于二

次磁矢势和电标势的有限元求解器, 该方法减小了开发难度, 但是使用不了最新的高性能计算技术(如多重网格法等新技术), 更严重的是无法进一步与反演代码集成, 难以开发反演成像算法.

为克服现有有限元求解器存在的双旋度算子导致的病态性、地表边界处理复杂、功能难以扩展、难以开发反演程序等缺陷, 本文开发了一套全新的基于势方程的地球电磁感应有限元正演求解器. 首先, 从磁场矢量势和电场标量势出发, 结合Coulomb规范条件和电流密度连续性方程, 获得了磁场矢量势和电场标量势的具有椭圆性质的微分控制方程. 然后, 从磁层环形电流源产生的一次磁场出发, 建立了用磁矢势场表示的外部场源的数学模型, 利用总场表示法实现了利用边界条件加载外部场源. 再则, 利用线性节点四面体有限单元, 获得了有限元线性方程组, 采用最新的代数多重网格预处理Krylov子空间迭代法并结合多线程并行计算技术, 实现了大规模有限元线性方程组的快速并行求解. 采用局部加密的四面体网格以及加权移动最小二乘法, 从磁场矢量势和电场标量势获得高精度电磁场. 最后, 我们采用理论模型验证开发的正演求解器的正确性, 并采用三维真实地球模型, 以澳科卫星飞行高度为例, 进行了全球感应地磁场的高精度正演模拟计算.

2 理论

2.1 地球电磁感应边值问题

由于磁层环形电流结构较为简单, 并且是全球电磁正演基准测试所采用的电流源(Kelbert等, 2014), 因此为了方便验证我们的正演算法, 本文目前只讨论磁层环形电流及其地球内部感应电流产生的磁场. 全球尺度电磁感应问题的几何模型如图1所示, 计算区域包含了地球及地球外部的空气层, 空气层的半径通常为地球半径的3~10倍, 磁层环形电流位于求解区域之外(即空气层外部). 全球电磁感应问题的物理过程可归纳为: 外部磁层环形电流产生的一次入射场在地球内部产生感应电流, 进一步激发出二次场; 然后, 地面台站或卫星上搭载的磁场感应器记录下包含了一次场和二次场之和的总磁场.

我们仅考虑磁层环形电流激发的单频场(取时谐因子为 $e^{i\omega t}$), 其微分控制方程满足频率域Maxwell方

图 1 球坐标系(a)及地球电导率模型(b)示意图

(a) 原点 O 为球心, xy 为赤道平面, z 轴指向地理北极, r 、 θ 、 ϕ 分别为任意一点的径向半径、余纬度以及经度坐标分量, B_r 、 B_θ 、 B_ϕ 分别为任意一点处的磁场矢量径向分量、余纬度分量以及经度分量. (b) 地球内部电导率由考虑地表海洋和大陆电性结构的不均匀电导 $S(\theta, \phi)$ 、地壳及地幔三维电导率, 以及高导地核等构成

程组

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{E}$ 为电场强度, $\mathbf{B}$ 为磁感应强度, μ_0 为自由空间中的磁导率, σ 为电导率, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, $\omega = 2\pi f$ 为角频率, f 为频率($f = 1/T$, 周期 T 大于2h). 对式(1)取旋度并用式(2)消去磁感应强度 $\mathbf{B}$, 得到电场 $\mathbf{E}$ 满足的双旋度方程为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

式中, 双旋度结构包含了非平凡的零空间(即梯度场), 低频情况下, 式(5)表示不了电场的梯度场部分. 为了消除双旋度算子的零解空间, 精确恢复梯度电场分量, 可以利用磁场矢量势 $\mathbf{A}$ 和电场标量势 Φ 来表示磁场和电场:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = -i\omega(\mathbf{A} - \nabla \Phi). \quad (7)$$

将式(6)和(7)代入式(5), 应用Coulomb规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 和电流密度散度条件(4), 得到:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + i\omega \mu_0 \sigma (\mathbf{A} - \nabla \Phi) = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot [i\omega \mu_0 \sigma (\mathbf{A} - \nabla \Phi)] = 0. \quad (9)$$

当空气层外边界足够远时, 我们可以假设由地球内部感应电流产生的二次场在空气层外边界衰减为零. 在空气层外边界上, 我们可以采用由外部场源产生的一次场作为有效的边界条件, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0, \quad (10)$$

$$\Phi = \Phi_0, \quad (11)$$

式中, $\mathbf{A}_0$ 为外部场源产生的磁矢势一次场值, Φ_0 为外部场源产生的电标势一次场值, 一般取为0, 即 $\Phi_0 = 0$. 一般来说, 取空气层外边界的半径为3~10倍的地球半径(Uyeshima和Schultz, 2000; Weiss, 2010).

2.2 空气层外边界上 $\mathbf{A}_0$ 的表达式

空气层中电导率接近于0, 式(2)变为

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

磁感应强度 $\mathbf{B}$ 可用磁标势 V 的负梯度表示, 即

$$\mathbf{B} = -\nabla V. \quad (13)$$

由(3)式可知, 磁感应强度是无散场, 磁标势 V 满足如下Laplace方程

$$\nabla^2 V = 0, \quad (14)$$

球坐标下磁标势 V 的球谐函数求和形式解为(Backus等, 1996)

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n + l_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] Y_n^m(\theta, \phi), \quad (15)$$

其中, $a = 6371 \text{ km}$ 为地球平均半径, $Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}$, $P_n^{|m|}(\cos\theta)$ 为 n 次 $|m|$ 阶连带勒让德多项式, ε_n^m 项为电流源外部施感系数, l_n^m 为电流源地球内部感应系数. 式(13)和(14)为磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的 Gauss 表示(Kuvshinov和Semenov, 2012). 为了构建磁矢势 $\mathbf{A}$ 的表达式, 利用 Mie 表示方法(Backus等, 1996), 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 用极向磁标势 p 表示如下:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}p, \quad (16)$$

$$\nabla^2 p = 0, \quad (17)$$

其中, 算符 $\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \nabla$, $\mathbf{r}$ 为三维空间中的位置矢量. 联合式(13)、(15)、(16)和(17), 极向磁标势 p 可以用磁标势 V 表示为(见Backus等(1996)式5.3.13)

$$p = -\nabla_s^{-2}(r\partial_r V), \quad (18)$$

其中, ∇_s 为球面梯度算子, $\nabla_s^{-2} Y_n^m(\theta, \phi) = -\frac{1}{n(n+1)} Y_n^m(\theta, \phi)$. 由于

$$r\partial_r V = r \frac{\partial V}{\partial r} = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[n \varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n - (n+1) l_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] Y_n^m(\theta, \phi), \quad (19)$$

我们可以得到

$$p = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[n \varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n - (n+1) l_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] \frac{1}{n(n+1)} Y_n^m(\theta, \phi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{1}{n+1} \varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n - \frac{1}{n} l_n^m \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] Y_n^m(\theta, \phi). \quad (20)$$

由式(6)和(16), 磁矢势 $\mathbf{A}$ 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \nabla p. \quad (21)$$

当空气层外边界到地心的距离取3~10倍地球半径的时候, 地球内部感应场的影响在空气层外边界可以忽略不计(Uyeshima和Schultz, 2000; Weiss, 2010), 因此, 我们可以将外边界上的 $\mathbf{A}_0$ 设置为磁矢势 $\mathbf{A}$ 的外部源分量 $\mathbf{A}^{\text{ext}}$:

$$\mathbf{A}_0 \approx \mathbf{A}^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \nabla p^{\text{ext}}, \quad (22)$$

$$p^{\text{ext}} = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n+1} \varepsilon_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n Y_n^m(\theta, \phi).$$

高阶球谐项主要用来表示复杂的电离层 Sq 电流源, 而低阶球谐项主要用来表示简单的磁层环形电流源. 为了方便与前人的结果对比, 本文只考虑磁层环形电流源, 即取 $n=1$, $m=0$ ($P_1^0 = \cos\theta$ 近似, Banks, 1969). 由此, 公式(22)变为

$$p^{\text{ext}} = \frac{\varepsilon_1^0}{2} r \cos\theta = \frac{\varepsilon_1^0}{2} z, \quad (23)$$

从而有

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\varepsilon_1^0}{2} (y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}). \quad (24)$$

公式(24)为外空气层边界上 $\mathbf{A}_0$ 的表达式. ε_n^m 的强度取为 $\varepsilon_n^m = 100 \text{ nT}$ (Kelbert等, 2014), 我们将外空气层边界上 $\mathbf{A}_0$ 表达式的空间分布绘制如图2(以 180°E 为中心).

2.3 有限元离散

利用加权余值伽辽金有限元法(Jin, 2014), 式(8)和(9)两端同时乘以标量测试函数 t , 在整个计算区域上进行积分, 得到

$$\iiint_{\Omega} t \left[-\nabla^2 A_x + i\omega\mu_0\sigma \left(A_x - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) \right] dv = 0, \quad (25)$$

$$\iiint_{\Omega} t \left[-\nabla^2 A_y + i\omega\mu_0\sigma \left(A_y - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \right] dv = 0, \quad (26)$$

$$\iiint_{\Omega} t \left[-\nabla^2 A_z + i\omega\mu_0\sigma \left(A_z - \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right] dv = 0, \quad (27)$$

图2 外空气层边界上 $\mathbf{A}_0$ 表达式的空间分布图(距离地心5倍地球半径)

$$\iiint_{\Omega} t \nabla \cdot [i\omega\mu_0\sigma(\mathbf{A} - \nabla\Phi)]dv = 0. \quad (28)$$

将 A_x 、 A_y 、 A_z 、 Φ 用线性节点基函数(Jin, 2014)展开, 即

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{l=1}^{N_v} N_l A_{xl}, A_y = \sum_{l=1}^{N_v} N_l A_{yl}, \\ A_z &= \sum_{l=1}^{N_v} N_l A_{zl}, \Phi = \sum_{l=1}^{N_v} N_l \Phi_l, \end{aligned} \quad (29)$$

其中, N_l 为第 l 个节点上的有限元基函数, A_{xl} 、 A_{yl} 、 A_{zl} 、 Φ_l 分别为第 l 个节点上的 A_x 、 A_y 、 A_z 、 Φ 分量未知数, N_v 为总节点数。

对式(25)~(28)进行分部积分, 并将式(29)代入, 得到如下对称的稀疏复系数线性方程组:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{x\Phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{y\Phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{z\Phi} \\ \mathbf{K}_{\Phi x} & \mathbf{K}_{\Phi y} & \mathbf{K}_{\Phi z} & \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_x \\ \tilde{\mathbf{A}}_y \\ \tilde{\mathbf{A}}_z \\ \tilde{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

对上式在外空气层边界加载边界条件(10)和(11), 其矩阵形式变为

$$\mathbf{KU} = \mathbf{S}, \quad (31)$$

其中, $\mathbf{K}$ 为系统矩阵, $\mathbf{U}$ 为分布在网格节点上的磁矢势和电标势未知数的向量集合, $\mathbf{S}$ 表示空气层外边界上的场源影响($\mathbf{S}$ 向量内的元素值仅在边界上为非0, 非0元素的值由边界条件式(10)决定). $\mathbf{K}$ 的具体表达式为

$$\begin{aligned} K_{xx}^{kl} &= K_{yy}^{kl} = K_{zz}^{kl} \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla N_k \cdot \nabla N_l + i\omega\mu_0\sigma N_k N_l dv, \end{aligned} \quad (32)$$

$$K_{\Phi\Phi}^{kl} = \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma \nabla N_k \cdot \nabla N_l dv, \quad (33)$$

$$K_{x\Phi}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma N_k \frac{\partial N_l}{\partial x} dv, \quad (34)$$

$$K_{y\Phi}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma N_k \frac{\partial N_l}{\partial y} dv, \quad (35)$$

$$K_{z\Phi}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma N_k \frac{\partial N_l}{\partial z} dv, \quad (36)$$

$$K_{\Phi x}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma \frac{\partial N_k}{\partial x} N_l dv, \quad (37)$$

$$K_{\Phi y}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma \frac{\partial N_k}{\partial y} N_l dv, \quad (38)$$

$$K_{\Phi z}^{kl} = - \iiint_{\Omega} i\omega\mu_0\sigma \frac{\partial N_k}{\partial z} N_l dv, \quad (39)$$

其中, 上标 $k, l=1, \dots, N_v$, 系统矩阵 $\mathbf{K}$ 中的元素采用高斯数值积分进行计算(Keast, 1986).

求解线性方程组(31), 便获得了磁场矢量势 $\mathbf{A}$ 和电场标量势 Φ . 根据式(6)从磁矢势 $\mathbf{A}$ 恢复磁感应强度 $\mathbf{B}$, 本文采用简单有效的加权移动最小二乘后处理技术(Tabbara等, 1994; Badea等, 2001; 蔡红柱等, 2015).

2.4 代数多重网格预处理FGMRES迭代法

公式(31)为稀疏复系数线性方程组. 对于中小规模方程组, 可以采用MUMPS(Aместой等, 2001)和PARDISO(Schenk和Gärtner, 2004)等具有很强健壮性的直接求解器. 对于大规模方程组(未知数常常为上千万甚至上亿), 由于需要大量的计算机内存, 直接求解器难以求解, 需要采用迭代求解器.

已有的全球电磁感应有限元求解器采用传统的ILU迭代法(Everett和Schultz, 1996)、共轭梯度法(Yoshimura和Oshiman, 2002)以及改进的牛顿-拉夫逊算法(Ribaudo等, 2012). 本文采用最新发展起来的适用于求解大规模线性方程组的灵活的广义最小残差算法(Flexible GMRES, FGMRES)(Saad, 2003). 该算法已被成功应用于求解大规模地球电磁感应问题, 并表现出很好地稳定性和收敛性(Grayver和Bürg, 2014; Bin Zubair Syed等, 2020). 相对于传统的保持预条件矩阵 $\mathbf{M}$ 不变的GMRES算法, FGMRES算法可以在迭代过程中使用不同的预条件矩阵 $\mathbf{M}$, 从而可以提高迭代效率. 预条件处理后, 式(31)变为

$$\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{S}, \mathbf{X} = \mathbf{MU}. \quad (40)$$

FGMRES算法求解式(40)的具体过程可参考Saad(2003), 而其终止准则为

$$\frac{\|\mathbf{KU} - \mathbf{S}\|}{\|\mathbf{S}\|} \leq \text{tol}. \quad (41)$$

若无特殊说明, FGMRES算法的收敛相对残差tol设置为 10^{-6} .

FGMRES算法中最为重要的一步为计算预条件矩阵 $\mathbf{M}$ 的逆与残差向量 $\mathbf{v}$ 的乘积, 即获取预条件向量

$\mathbf{z}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{v}$ (Saad, 2003). 构建一个高效的预条件矩阵 $\mathbf{M}$ 并求解它的逆通常并不容易. 然而, 由于 $\mathbf{KM}^{-1}\approx\mathbf{I}$, 我们可以通过求解以下线性方程组来获取近似预条件向量 $\mathbf{z}$, 即

$$\mathbf{K}\mathbf{z}=\mathbf{v}. \quad (42)$$

求解式(42)只是为了近似预条件向量 $\mathbf{z}$, 收敛相对残差可以给一个较大的值, 例如 10^{-2} . 由于矩阵 $\mathbf{K}$ 具有良好的椭圆性质, 我们采用式(42)对应的最优化代数多重网格(AMG)求解算法(Henson和Yang, 2002; Tang等, 2010; Koldan等, 2014), 来快速获得预处理方程(42)的解向量 $\mathbf{z}$. 具体实现过程中, 仅采用一次AMG循环来获取预条件向量 $\mathbf{z}$, 既可得到较好的 $\mathbf{z}$ 的近似, 又能够获得较高的计算效率. 得到预条件向量 $\mathbf{z}$ 后, 可继续FGMRES迭代.

3 求解器精度验证

本文利用C++程序设计语言, 研发了一套新的基于磁场矢量势和电场标量势的全球尺度电磁感应有限元正演求解代码. 该软件包使用了Gmsh四面体网格生成器(Geuzaine和Remacle, 2009), 通过开源库PETSc(Balay等, 2019)实现了代数多重网格预处理FGMRES迭代法.

计算区域包含地球及空气层, 空气层的外边界到地心的距离为5倍地球半径, 空气层电导率设为 10^{-8}S m^{-1} . 外部源假设为 P_1^0 近似磁层环形电流源, 源的强度取为 $\varepsilon_n^m=100\text{nT}$ (Kelbert等, 2014). 测试计算平台为Intel Xeon(R) Platinum 8270 CPU及256GB内存的服务器.

3.1 和解析解对比

首先采用Martinec(1998)提出的镶嵌球体解析解模型, 验证所开发的有限元正演算法的正确性, 模型见图3. 大球 K_1 模拟地球, 半径为6371km, 电导率为 1S m^{-1} . 小球 K_2 为异常体, 半径为3500km, 电导率为 10S m^{-1} . 异常体球心 O_2 距离地心 O_1 的距离为 $d_1=2700\text{km}$, O_2 的经纬度位置为: 余纬度 $\theta_1=40^\circ$, 经度 $\phi=35^\circ$.

计算周期 $T=2.094\times 10^7\text{s}$ (约为242天). 计算区域使用Gmsh离散为563309个四面体单元和92583个节点, 总的未知数为370332. 测线坐标为余纬度 $\theta=13^\circ$, 经度 $\phi=0^\circ$, 测线上的128个测点以50km为间隔从地心到地

表沿径向分布, 测点附近进行局部加密生成高质量的四面体单元, 以提高有限元数值求解精度(图4). 迭代误差下降曲线见图5, 纵坐标为根据式(41)计算的相对残差, 横坐标为迭代次数. 对于维数为37万的线性方程组来说, 迭代50次便可收敛到 8.15×10^{-7} , 线性方程组求解时间仅为58s. 由此可见代数多重网格预处理器的独特效果以及FGMRES算法的快速收敛性质.

图6展示了本文开发的有限元算法和解析公式的磁场三分量对比结果, 其中 dB_r 、 dB_θ 、 dB_ϕ 表示有限元解与解析解结果之差. B_r 的最大残差为0.72nT, B_θ 的最大残差为0.43nT, 而 B_ϕ 的最大残差为0.37nT, 可见径向分量误差在1nT以内, 水平分量的残差在0.5nT以内. 随着网格的加密, 有限元计算的磁场三分量与解析解的误差呈现减小的趋势(限于篇幅原因, 这些计算结果未展示). 因此, 从图6中的曲线重合程度, 以及误差随网

图3 镶嵌球体解析解模型
据Martinec(1998)

图4 镶嵌球体解析解模型四面体网格离散

(a) 包含空气层网格; (b) 不包含空气层网格. 区域1代表背景模型, 电导率为 1S m^{-1} , 区域2代表异常体, 电导率为 10S m^{-1} , 区域3代表空气层, 电导率为 10^{-8}S m^{-1}

图5 镶嵌球体解析解模型迭代误差下降曲线

格加密减小的趋势, 可以说明本文研发的有限元算法的正确性.

3.2 和其他数值方法对比

然后, 采用Kelbert等(2014)推荐的基准测试模型3, 与积分方程法(Kuvshinov, 2008)、交错网格有限差分法(Kelbert等, 2008)以及基于商业软件FlexPDE开发的

有限元法(Ribaud等, 2012)进行对比. 该模型与图3所示的模型类似, 不同的是镶嵌球体的大小、位置以及电导率存在差别(图7). 大球 K_1 模拟地球, 半径为6371km, 电导率为 0.01 S m^{-1} . 小球为异常体, 半径为1200km, 电导率为 1 S m^{-1} . 异常体球心 O_2 距离地心 O_1 的距离为 $d_1=4921 \text{ km}$, O_2 的经纬度位置为: 余纬度 $\theta_1=40^\circ$, 经度 $\phi=35^\circ$.

计算周期为1天. 计算区域离散为5449663个四面体单元和874416个节点, 总的未知数为3497664. 该模型的四面体网格剖分及两条测线的局部加密示意图8. 迭代误差下降曲线见图9. 由图9可知, 相对于前面的例子, 虽然求解未知数大大增加, 但是迭代次数没有明显增加(55次), 总的求解时间约为18.5min. 代数多重网格预处理FGMRES迭代法的计算效率高于Ribaud等(2012)有限元程序所采用的牛顿-拉夫逊线性求解器(124207个节点, 计算时长为17.9h, 参见文献Kelbert等(2014)中的表13).

图10展示了地表 0° 经线以及 45° 纬线两条测线上不同方法计算结果的对比分析. 由图可见, 本文计算结果与前人的积分方程和有限差分计算结果吻合很好. 当所计算分量的幅值接近于0时(见 B_ϕ), Ribaud等(2012)的有限元结果表现出较大的振荡. 这是由于四

图6 本文有限元算法与解析解计算的磁感应强度对比图

解析解据Martinec(1998)

图7 基准测试模型示意图
据Kelbert等(2014)

面体网格上的磁场后处理计算不如结构化网格上的积分和差分后处理光滑所致。由于具备局部网格加密的特征, 本文有限元程序可以在测点处进行有效加密, 从而能够有效减小传统有限元方法的数值振荡现象。另外, 使用高阶有限元形函数也可以避免该振荡现象。

为了进一步对比, 我们在地表设置了16200个 $2^\circ \times 2^\circ$ 的测点, 计算了水平经度分量 B_ϕ 、水平纬度分量 B_θ 以及径向分量 B_r 。不同算法计算结果的对比见图11~13。本文的有限元计算结果与前人结果均吻合得很好。对于 P_1^0 磁层环形电流源, 水平经度分量 B_ϕ 在一维圈层结构下理论响应为0, 因此 B_ϕ 主要由小球产生。图11中, B_ϕ 很明显地反映出欧洲大陆的异常场响应。图12中的水平纬度分量 B_θ 以及图13中的径向分量 B_r 对于异常体也有反映, 但异常不明显, B_r 异常比 B_θ 更明显。

4 卫星高度的感应地磁场正演模拟计算

4.1 地球三维电导率模型

为了获得接近实际的卫星高度感应磁场分布, 有必要考虑接近真实地球的三维电导率模型。本文采用和Kelbert等(2014)相同的“地表不均匀电导+1D”的电导率结构。地表不均匀电导模型由Everett等(2003)构建, 该模型充分考虑了海洋和大陆的不同的电导率结构。对于海洋电导率, 考虑了海水盐度、温度和压力等信息; 对于大陆电导率, 考虑了沉积物厚度等信息。地表不均匀电导模型见图14, 从电导模型线性表示可以看到海洋电导具有较大的横向变化, 从电导模型对数表示也可以看到大陆电导的横向变化。地表不均匀电导模型延伸到地表50km以下。厚度为50km的地表不均匀电导模型代替了真实复杂的地形和海底起伏。一般来说, 该模型的有效性依赖于感应电磁场的周期, 当感应电磁场周期大于2h的时候, 该等效地表圈层才有效。海洋会产生两种类型的感应电磁场, 第一种由静止海水中的感应电流产生, 第二种由运动的海水切割地球主磁场产生(例如潮汐, 洋流)。本文只讨论静止的海水产生的电磁感应场。

在地表不均匀电导下方, 我们采用如表1所示的一维(1D)圈层电导率结构, 用于模拟上地幔、转换带、下地幔以及地核。

4.2 地表感应地磁场模拟验证

在计算卫星电磁感应数据之前, 我们先在地表设置64800个 $1^\circ \times 1^\circ$ 的测点, 将计算结果与积分方程法(Kuvshinov, 2008)对比。在地球外边界采用地磁偶极坐标系的势场源激发(Everett等, 2003), 即 $P_1^0 = \cos\theta_d$, θ_d

图8 基准测试模型四面体网格剖分

(a) 垂直切片; (b) 0° 经线局部加密示意; (c) 45° 纬线局部加密示意。区域1代表背景模型, 电导率为 0.01 S m^{-1} , 区域2代表异常体, 电导率为 1 S m^{-1}

图9 基准测试模型迭代误差下降曲线

为地磁余纬度. 与Kuvshinov(2008)类似, 本节我们仅展示磁场的垂直分量. 计算周期为6小时. 整个计算区域离散为10683261个四面体, 1760879个节点, 未知数为7043516. 迭代误差下降曲线见图15. 求解器迭代88次

可收敛到 9.48×10^{-7} , 线性方程组求解时间为58.6min.

本文计算结果与积分方程计算结果对比见图16, 可以看到二者吻合很好. 此外, 由图还可以看出, 由于地表不均匀电导的存在, 磁场计算结果在海岸线附近具有明显的海洋效应.

4.3 卫星高度感应地磁场模拟

2022年, 澳门特别行政区政府与国家航天局将联合发射世界上第一颗低纬度地磁探测卫星——澳科一号卫星. 该卫星的科学目标为观测南大西洋地球磁场变化的精细特征、实现地磁场变化预报、获取辐射带高能电子宽能带能谱分布信息、研究地球磁层及外部电流体系、进行地球电导率反演成像等. 澳科一号卫星包含A/B两颗地磁观测卫星, 运行倾角为 41° , 运行轨道为450km高度的圆轨道, 探测范围主要在中低纬度地区. 另外, 计划中澳科二号卫星在高纬度地区以极低的近地点200km高度飞行, 比欧洲航天局的Swarm地磁探测卫星的飞行高度更低, 更容易采集高质量的地球感应磁场数据.

图10 0° 经线测线(左)以及 45° 余纬度测线(右)的四种方法计算结果对比

图 11 周期为1天的磁场水平经度分量 B_{θ} 响应

由上到下依次为: 积分方程、有限差分、前人有限元以及本文有限元计算结果

本节, 我们采用接近真实的三维电导率模型(地表不均匀电导+一维电导率模型, 即图14和表1), 将所开发的全球电磁感应正演求解器应用于澳科卫星450和200km高度的感应磁场计算. 计算的三个周期与Everett等(2003)采用的一致, 分别为2h、12h以及2天. 正演测点以 $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ 均匀分布在450和200km高度, 总测点为32400个, 为了提高计算精度, 我们在测点附近进行了局部网格加密(图17). 表2给出周期为12h的正演网格参数及数据信息, 图18展示了对应的迭代误差下降曲线. 可以看到三维模型相对于一维模型, 迭代误差下降曲线速率有所变慢, 这是因为为了模拟地表海洋, 三维模型网格更密, 但三维模型计算仍能快速收敛到给定残差. 可见本文迭代求解算法具有很好的收敛性和稳定性.

一维电导率模型(1D, 即表1圈层模型)、三维电导率模型(3D, 即图14地表不均匀电导+下覆表1圈层模型)以及海洋感应(3D-1D)在450和200km高度的正演

图 12 周期为1天的磁场水平余纬度分量 B_{θ} 响应

由上到下依次为: 积分方程、有限差分、前人有限元以及本文有限元计算结果

表 1 地球圈层电导率模型电导率深度信息^{a)}

深度(km)	电导率($S m^{-1}$)
0~400	0.01
400~650	0.1
650~2871	2.0
2871~6371	500000

a) 据Kelbert等(2014)

模拟感应地磁场空间分布结果见图19~21. 此处一维和三维电导率模型的计算结果同时包含磁层环形电流产生的一次场及地球内部的感应场. 在3D-1D得到的残差场中, 海洋感应产生的场占了主导, 可以据此研究海洋效应及其在不同卫星高度的影响. 对比图19~21中450和200km高度的海洋感应场发现, 距离地表越近, 海洋在卫星高度产生的感应场越强, 海洋效应越明显.

图19中, 周期为2h, 电磁感应主要集中在地表不均匀电导层, 因此海洋感应异常具有明显的沿海岸线分

图 13 周期为1天的磁场径向分量 B_r 响应

由上到下依次为: 积分方程、有限差分、前人有限元以及本文有限元计算结果

布的特征, 特别是200km低轨道时更为显著. 以海洋感应异常磁场实部为例, 正异常主要分布在澳大利亚北部以及南美洲东北部, 最大幅值为27nT, 为一次场幅值的27%, 负异常主要分布在其他海陆交界, 最大幅值为34nT(为一次场幅值的34%).

图20中, 周期为12h, 电磁感应为地表不均匀电导层以及下层一维电导率结构的综合作用, 海洋感应异常除了具有沿海岸线分布的特征之外, 在海洋内部也表现出明显的感应异常. 然而, 异常以沿海岸线分布特征为主, 说明此时海洋的影响仍然占据主导. 正异常最大幅值为22nT(为一次场幅值的22%), 负异常最大幅值为27nT(为一次场幅值的27%).

图21中, 当周期变长为2天时, 电磁感应主要集中在

图 14 地表不均匀电导

上图为电导线性表示, 下图为电导对数表示

在一维电导率结构中, 三维电导率模型的感应和一维电导率模型的感应接近. 对于实分量, 450km高度最大海洋感应异常为5nT; 而对于虚分量, 450km高度最大海洋感应异常为6nT. 上面计算采用的一次场幅值为100nT, 实际的磁层环形电流源的强度在50~500nT范围变化(Olsen, 2007), 因此, 地表海洋中感应场的强度在卫星高度可以达到100nT.

综上所述, 海洋效应不仅对于地表台站数据有影响, 海洋的高电导率特征对于澳科一号卫星高度的数据在低轨道和短周期也有明显影响, 后续数据处理及反演时需要进行校正. 此外, 在接下来的工作中也需要进一步考虑海洋潮汐运动产生的电磁场(Grayver等, 2016; Zhang等, 2019).

表 2 澳科卫星450及200km高度对应的正演网格及迭代求解信息(以12h为例)

模型	四面体单元数	节点数	自由度总数	迭代次数	相对残差	求解时间(min)
1D	9657944	1599068	6396272	26	8.39×10^{-7}	26.8
3D	10167842	1682064	6728256	96	9.95×10^{-7}	64.6

图 15 地球三维电导率模型迭代误差下降曲线

图 16 地表磁场垂直分量

上图: 积分方程法(Kuvshinov, 2008)计算结果; 下图: 本文有限元计算结果

5 结论及潜在应用分析

本文开发了一套全新的基于势方程的地球电磁感应有限元正演求解器, 该求解器克服了现有有限元正演求解器存在的双旋度算子导致的病态性、地表边界处理复杂、功能难以扩展、难以开发反演程序等缺陷。首先, 从磁场矢量势和电场标量势出发, 结合Coulomb规范条件和电流密度连续性方程, 获得了磁场矢量势和电场标量势的具有椭圆性质的微分控制方程。然后, 从磁层环形电流源产生的一次磁场出发, 建立了用磁矢势场表示的外部场源的数学模型, 利用总场表示法实现了利用边界条件加载外部场源。再则, 利用线性节点四面体有限单元, 获得了有限元线性方程组,

图 17 澳科卫星450及200km高度感应磁场计算采用的四面体网格剖分

(a)和(b)展示了不同方向的网格切片, (c)展示了局部放大网格, 层状结构依次为地表不均匀电导层(见图14)以及下覆一维电导率模型(见表1)

图 18 澳科卫星高度感应磁场计算迭代误差下降曲线(以12h为例)

采用最新的代数多重网格预处理Krylov子空间迭代法并结合多线程并行计算技术, 实现了大规模有限元线性方程组的快速求解。采用局部加密的四面体网格以及加权移动最小二乘法, 从磁场矢量势和电场标量势

图 19 周期为2h的卫星电磁感应磁场垂直分量正演模拟分布图

图 20 周期为12h的卫星电磁感应磁场垂直分量正演模拟分布图

获得高精度电磁场. 最后, 采用理论模型, 验证了开发的正演求解器的正确性.

本文开发的有限元正演求解器具备如下特征: (1) 利用Delaunay三角化算法对球面和球体进行三角形和

四面体网格离散, 可以自然地适应球体的曲面特征以及模拟复杂地质结构, 最大程度地避免几何离散造成的误差. (2) 利用代数多重网格优良的预处理性质, 结合FGMRES迭代法构建了高效的线性迭代求解器. 该

图 21 周期为2天的卫星电磁感应磁场垂直分量正演模拟分布图

方法具有非常高效的收敛速度, 迭代次数不随单元加密显著增加, 对于千万级网格单元问题的求解时间在一小时左右, 迭代次数控制在100次之内. (3) 采用C++自主开发的源代码, 而不是采用国外的商业软件, 实现了正演计算的“自主可控”, 方便后续的反演算法研究.

地球感应场及地幔电导率成像是澳科一号卫星的主要科学目标之一, 本文利用正演模型计算, 模拟了澳科一号卫星450km高度以及计划中的澳科二号卫星近地点200km高度的感应磁场. 模型分析表明: (1) 在450km高度的地幔感应磁场幅度为外部源一次场幅度的10~30%, 地幔产生的感应磁场的幅度可达10~30nT, 远高于卫星磁场观测精度. 近地点200km高度的地磁场包含了更强的二次场信号. 因此, 反演低轨道卫星电磁感应数据可获得精细的地球地幔电导率结构. (2) 海洋产生的感应场在450和200km卫星飞行高度可以达到5~30nT. 海洋感应的电磁场具有明显的沿海岸线分布的特征, 感应场的大小及分布特征和探测周期具有明显的相关性. 因此, 解释卫星电磁感应数据, 需要考虑海洋的影响.

目前, 各国科学家均致力于构建一个被同行公认的全球三维电导率模型. 本文研发的正演求解器具有

模拟真实复杂三维地球、计算速度快和精度高等优点, 该求解器可为后续的卫星感应磁场数据反演提供技术支撑.

致谢 感谢都柏林高等地球物理研究所Zdeněk Martinec教授提供解析解及美国地质调查局Anna Kelbert研究员提供全球电磁感应基准测试结果进行对比. 感谢ETH Zurich陈超健以及中国地质调查局广州海洋地质调查局李建平博士的有益讨论. 最后, 特别感谢责任编辑及两位匿名审稿专家提出宝贵的修改意见, 大幅度提高了本文质量.

参考文献

- 蔡红柱, 熊彬, Zhdanov M. 2015. 电导率各向异性的海洋电磁三维有限单元法正演. 地球物理学报, 58: 2839–2850
- 韩骑, 胡祥云, 彭荣华. 2020. 基于非均一场源的球坐标大地电磁模拟方法. 地球物理学报, 63: 3154–3166
- 李建平, 翁爱华, 李世文, 李大俊, 李斯睿, 杨悦, 唐裕, 张艳辉. 2018. 基于球坐标系下有限差分的地磁测深三维正演. 吉林大学学报(地球科学版), 48: 411–419
- 李世文, 翁爱华, 张艳辉, 李建平, 杨悦, 唐裕, 邹宗霖, 李春成. 2019. 全球地磁感应测深数据三维反演. 地球物理学报, 62: 1908–1920
- 罗威, 王绪本, 王堃鹏, 张刚, 李德伟. 2019. 球坐标系下三维大地电

- 磁正演研究. 地球物理学报, 62: 3885–3897
- 徐光晶, 汤吉, 黄清华, 上嶋诚. 2015. 华北地区上地幔及过渡带电性结构研究. 地球物理学报, 58: 566–575
- 殷长春, 刘云鹤, 熊彬. 2020. 地球物理三维电磁反演方法研究动态. 中国科学: 地球科学, 50: 432–435
- 郑永飞, 陈伊翔, 戴立群, 赵子福. 2015. 发展板块构造理论: 从洋壳俯冲带到碰撞造山带. 中国科学: 地球科学, 45: 711–735
- Amestoy P R, Duff I S, L'Excellent J Y, Koster J. 2001. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 23: 15–41
- Backus G, Parker R, Constable C. 1996. Foundations of Geomagnetism. Cambridge: Cambridge University Press
- Badea E A, Everett M E, Newman G A, Biro O. 2001. Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials. *Geophysics*, 66: 786–799
- Balay S, Abhyankar S, Adams M F, Brown J, Brune P, Buschelman K, Dalcin L, Dener A, Eijkhout V, Gropp W D, Karpeyev D, Kaushik D, Knepley M G, May D A, McInnes L C, Mills R T, Munson T, Rupp K, Sanan P, Smith B F, Zampini S, Zhang H, Zhang H. 2019. PETSc Users Manual Version 3.12
- Banks R J. 1969. Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle. *Geophys J Int*, 17: 457–487
- Bin Zubair Syed H, Farquharson C, MacLachlan S. 2020. Block preconditioning techniques for geophysical electromagnetics. *SIAM J Sci Comput*, 42: B696–B721
- Chen C, Kruglyakov M, Kuvshinov A. 2020. A new method for accurate and efficient modeling of the local ocean induction effects. Application to long-period responses from island geomagnetic observatories. *Geophys Res Lett*, 47: e86351
- Everett M E, Constable S, Constable C G. 2003. Effects of near-surface conductance on global satellite induction responses. *Geophys J Int*, 153: 277–286
- Everett M E, Schultz A. 1995. Geomagnetic induction in eccentrically nested spheres. *Phys Earth Planet Inter*, 92: 189–198
- Everett M E, Schultz A. 1996. Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: Azimuthally symmetric test computations and the response of an undulating 660-km discontinuity. *J Geophys Res*, 101: 2765–2783
- Geuzaine C, Remacle J F. 2009. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Int J Numer Meth Engng*, 79: 1309–1331
- Grayver A V, Bürg M. 2014. Robust and scalable 3-D geoelectromagnetic modelling approach using the finite element method. *Geophys J Int*, 198: 110–125
- Grayver A V, Schnepf N R, Kuvshinov A V, Sabaka T J, Manoj C, Olsen N. 2016. Satellite tidal magnetic signals constrain oceanic lithosphere-asthenosphere boundary. *Sci Adv*, 2: e1600798
- Grayver A V, van Driel M, Kuvshinov A V. 2019. Three-dimensional magnetotelluric modelling in spherical Earth. *Geophys J Int*, 217: 532–557
- Greff-Lefftz M, Métivier L, Panet I, Caron L, Pajot-Métivier G, Bouman J. 2016. Joint analysis of GOCE gravity gradients data of gravitational potential and of gravity with seismological and geodynamic observations to infer mantle properties. *Geophys J Int*, 205: 257–283
- Henson V E, Yang U M. 2002. BoomerAMG: A parallel algebraic multigrid solver and preconditioner. *Appl Numer Math*, 41: 155–177
- Hiptmair R, Xu J. 2007. Nodal auxiliary space preconditioning in H (curl) and H(div) spaces. *SIAM J Numer Anal*, 45: 2483–2509
- Jin J M. 2014. The Finite Element Method in Electromagnetics. 3rd ed. Hoboken: Wiley-IEEE Press
- Keast P. 1986. Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 55: 339–348
- Kelbert A, Egbert G D, Schultz A. 2008. Non-linear conjugate gradient inversion for global EM induction: Resolution studies. *Geophys J Int*, 173: 365–381
- Kelbert A, Kuvshinov A, Velimsky J, Koyama T, Ribaudo J, Sun J, Martinec Z, Weiss C J. 2014. Global 3-D electromagnetic forward modelling: A benchmark study. *Geophys J Int*, 197: 785–814
- Kelbert A, Schultz A, Egbert G. 2009. Global electromagnetic induction constraints on transition-zone water content variations. *Nature*, 460: 1003–1006
- Koldan J, Puzyrev V, de la Puente J, Houzeaux G, Cela J M. 2014. Algebraic multigrid preconditioning within parallel finite-element solvers for 3-D electromagnetic modelling problems in geophysics. *Geophys J Int*, 197: 1442–1458
- Koyama T, Khan A, Kuvshinov A. 2014. Three-dimensional electrical conductivity structure beneath Australia from inversion of geomagnetic observatory data: Evidence for lateral variations in transition-zone temperature, water content and melt. *Geophys J Int*, 196: 1330–1350
- Kuvshinov A V. 2008. 3-D global induction in the oceans and solid Earth: Recent progress in modeling magnetic and electric fields from sources of magnetospheric, ionospheric and oceanic origin. *Surv Geophys*, 29: 139–186
- Kuvshinov A, Semenov A. 2012. Global 3-D imaging of mantle electrical conductivity based on inversion of observatory C-responses-I. An approach and its verification. *Geophys J Int*, 189: 1335–1352
- Martinec Z. 1998. Geomagnetic induction in multiple eccentrically nested spheres. *Geophys J Int*, 132: 96–110

- Martinec Z. 1999. Spectral-finite element approach to three-dimensional electromagnetic induction in a spherical earth. *Geophys J Int*, 136: 229–250
- Olsen N. 2007. Natural sources for electromagnetic induction studies. In: Gubbins D, Herrero-Bervera E, eds. *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Dordrecht: Springer Netherlands. 696–700
- Ribaud J T, Constable C G, Parker R L. 2012. Scripted finite element tools for global electromagnetic induction studies. *Geophys J Int*, 188: 435–446
- Romanowicz B. 2003. Global mantle tomography: Progress status in the past 10 years. *Annu Rev Earth Planet Sci*, 31: 303–328
- Saad Y. 2003. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics
- Schenk O, Gärtner K. 2004. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. *Future Generation Comput Syst*, 20: 475–487
- Semenov A, Kuvshinov A. 2012. Global 3-D imaging of mantle conductivity based on inversion of observatory C-responses-II. Data analysis and results. *Geophys J Int*, 191: 965–992
- Sun J, Egbert G D. 2012. A thin-sheet model for global electromagnetic induction. *Geophys J Int*, 189: 343–356
- Sun J, Kelbert A, Egbert G D. 2015. Ionospheric current source modeling and global geomagnetic induction using ground geomagnetic observatory data. *J Geophys Res-Solid Earth*, 120: 6771–6796
- Tabbara M, Blacker T, Belytschko T. 1994. Finite element derivative recovery by moving least square interpolants. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 117: 211–223
- Tang J, Wang F, Ren Z, Guo R. 2010. 3-D direct current resistivity forward modeling by adaptive multigrid finite element method. *J Cent South Univ Technol*, 17: 587–592
- Uyeshima M, Schultz A. 2000. Geoelectromagnetic induction in a heterogeneous sphere: a new three-dimensional forward solver using a conservative staggered-grid finite difference method. *Geophys J Int*, 140: 636–650
- Velínský J, Martinec Z. 2005. Time-domain, spherical harmonic-finite element approach to transient three-dimensional geomagnetic induction in a spherical heterogeneous earth. *Geophys J Int*, 161: 81–101
- Weiss C J. 2010. Triangulated finite difference methods for global-scale electromagnetic induction simulations of whole mantle electrical heterogeneity. *Geochem Geophys Geosyst*, 11: Q11010
- Weiss C J, Everett M E. 1998. Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: Fully three-dimensional test computations and the response of a realistic distribution of oceans and continents. *Geophys J Int*, 135: 650–662
- Yoshimura R, Oshiman N. 2002. Edge-based finite element approach to the simulation of geoelectromagnetic induction in a 3-D sphere. *Geophys Res Lett*, 29: 1039
- Zhang H, Egbert G D, Chave A D, Huang Q, Kelbert A, Erofeeva S Y. 2019. Constraints on the resistivity of the oceanic lithosphere and asthenosphere from seafloor ocean tidal electromagnetic measurements. *Geophys J Int*, 219: 464–478
- Zhang Y, Weng A, Li S, Yang Y, Tang Y, Liu Y. 2020. Electrical conductivity in the mantle transition zone beneath Eastern China derived from L1-Norm C-responses. *Geophys J Int*, 221: 1110–1124

(责任编辑: 潘永信)