SCIENTIA SINICA Mathematica

综述



随机 Loewner 演化介绍

韩勇1、王跃飞2,3*

- 1. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100091;
- 2. 深圳大学数学与统计学院, 深圳 518060;
- 3. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: hanyong@mail.tsinghua.edu.cn, wangyf@math.ac.cn

收稿日期: 2019-10-11; 接受日期: 2020-01-21; 网络出版日期: 2020-03-11; * 通信作者国家自然科学基金 (批准号: 11688101) 资助项目

摘要 本文对随机 Loewner 演化 (stochastic Loewner evolution, SLE) 这一新的研究方向做一个综述性的介绍. 随机 Loewner 演化是 Oded Schramm 于 2000 年前后创立的曲线上的单参数共形不变测度族理论. 它与复分析、共形几何、分形几何和随机分析有非常紧密的联系, 特别是在统计物理中有十分重要的应用.

关键词 SLE Brown 运动 Loewner 方程 容量 驱动函数 相交指数 离散模型 离散全纯函数 **MSC (2010) 主题分类** 60J67, 30C35, 28A80, 60J65, 60K35

1 引言

随机 Loewner 演化 (SLE) 是目前国际上一个新的热点研究方向, 涉及复分析、随机分析和动力系统并在统计物理中有十分重要的应用. Werner 和 Smirnov 因其在 SLE 这个领域的杰出成就分别获得了 2006 和 2010 年的菲尔兹奖.

相变是物理学中一个非常重要的概念,它刻画系统状态的变化. 例如,在温度到达 100 摄氏度时,水变成水蒸气;当温度降低到一定的温度时,超导体的电阻瞬间变为零. 这些都是急剧的变化,如何解释相变? 物理学家对不同的系统引入不同的参数来刻画相变. 例如,用密度的急剧变化来描述水由液体变成气体的变化,用电阻来描述超导体的导电性的变化. 一个系统由许多分子或者原子组成. 自然地,物理学家就采用一些格子点模型来描述这些系统. 物理上的相变现象对应在模型中可解释为存在一个临界值,使得在临界值处系统的一些宏观性质发生了不连续的变化. 因此对临界值的研究非常重要. 基于系统的大范围的尺度不变性,物理学家猜测在临界状态下其也满足局部的尺度不变性,从而满足共形不变性. 利用格子点模型描述一个系统时,自然产生了一个问题: 当格子点的尺度 (如 $\epsilon \mathbb{Z}^2$, $\epsilon > 0$) 趋于 0 时,其连续极限是否存在? 如果极限存在,是否满足共形不变性质? 这些问题在严格数学意义下知之极少;在 SLE 被引入之前,尺度极限甚至都没有一个严格的数学定义.

英文引用格式: Han Y, Wang Y F. An introduction to the stochastic Loewner evolution (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 795-828, doi: 10.1360/SSM-2019-0246

直到 21 世纪初, 数学家 Schramm 首先将复分析中的 Loewner 理论与随机分析相结合, 创立了 SLE 理论. 他首次给出了尺度极限的严格定义, 并且引入 SLE 来描述尺度极限. 他进一步证明了, 如果回路擦除随机游动 (loop erased random walk, LERW) 的尺度极限存在并且满足共形不变性质, 则其一定是 SLE(2). 在随后的十几年, SLE 作为将复分析、随机分析和统计物理联合起来的交叉领域蓬勃发展起来, 成为国际上新兴的一个热点研究方向. 许多数学家在这方面做出了非常出色的工作, 从数学上严格刻画了多个重要的统计模型, 如渗流、Ising 模型和离散 Gauss 自由场等. 其中最为著名的是 Schramm 等利用 SLE 作为工具, 证明了 Mandelbrot 关于平面 Brown 运动的外边界的 Hausdorff 维数依概率 1 为 🖟 的猜想; Smirnov 关于渗流的突破性工作等.

本文目的是对这一新研究方向做一个综述性的介绍. 主要内容包括: 介绍 SLE 的背景和发展, 给出其中的一些基本定义和概念, 讨论其中涉及的一些主要研究方法和结论; 同时介绍近年来的一些主要进展, 以及若干方面有待进一步研究的问题, 供有兴趣的读者和研究生阅读和参考; 同时也尽可能列举相关的重要文献, 以便于读者进一步查阅相关文献.

2 Loewner 理论

本节主要介绍 Loewner 理论,这是复分析中一个非常重要的理论.特别是 De Branges 在证明 Bieberbach 猜想中主要是利用了全平面与单位圆盘的 Loewner 理论,具体可参见文献 [1] 和 [2,第 17章]. 在介绍 Loewner 理论前,先引入复分析中几个重要的结论.

引理 2.1 (Schwartz 引理 [3]) 假定 f 是单位圆盘 $\mathbb D$ 上的全纯函数, 并且 $f(\mathbb D) \subseteq \mathbb D$, f(0) = 0, 则 有 $|f'(0)| \leq 1$, 等号成立当且仅当 f 是 $\mathbb D$ 上的 Möbius 变换.

引理 2.2 (Riemann 映射定理 [3]) 假定 D 是平面上的单连通域且不等于 $\mathbb{C}, z \in D$, 则存在唯一的共形映射 $f: D \to \mathbb{D}$ 满足

$$f(z) = 0, \quad f'(z) > 0.$$

引理 2.3 (广义 Riemann 映射定理^[4]) 假定 D 是平面上单连通域且不等于 \mathbb{C} , z_1 、 z_2 和 z_3 为边界 ∂D 上的 3 个不同的按逆时针排序的素端 (定义可参见文献 [4]), 则存在唯一的同胚映射 $f: \hat{D} \to \mathbb{D}$ 满足: $f \not\in D$ 到 \mathbb{D} 的共形映射, 且 $f(z_1) = -1$, $f(z_2) = -\mathrm{i}$, $f(z_3) = 1$, 其中 $\hat{D} \not\in D$ 与其边界的素端的并.

在 SLE 的研究中主要运用到了 4 个典型的单连通域上的 Loewner 理论, 这 4 个单连通区域分别 是 \mathbb{D} 、 \mathbb{H} 、 \mathbb{C} 和 S_{π} , 下面一一介绍.

2.1 上半平面的 Loewner 理论

本小节主要介绍上半平面 $\mathbb{H} := \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ 的 Loewner 理论.

定义 2.1 如果有界集合 $K \subset \mathbb{H}$ 满足 $\mathbb{H} \setminus K$ 是单连通的并且 $K = \overline{K} \cap \mathbb{H}$, 则称 K 为 \mathbb{H} 上的紧 致包 (compact hull).

引理 2.4 [5] 对任意的紧致包 $K \subset \mathbb{H}$, 存在唯一的共形映射 $g_K : \mathbb{H} \setminus K \to \mathbb{H}$ 满足

$$\lim_{z \to \infty} (g_K(z) - z) = 0.$$

由 Schwartz 对称原理知, $q_K(z)$ 可以全纯扩充到 $z = \infty$ 的邻域. 于是在 $z = \infty$ 附近有如下展开:

$$g_K(z) = z + \frac{a_1(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

称 $a_1(K)$ 为 K 的上半平面容量 (简称容量), 记为 hcap(K).

命题 2.1^[5] Ⅲ 上的紧致包的容量 hcap 满足如下性质:

- (1) $hcap(K) \ge 0$,并且 hcap(K) = 0 当且仅当 $K = \emptyset$;
- (2) $hcap(rK) = r^2 hcap(K)$ 对任意的 r > 0 成立:
- (3) hcap(K+x) = hcap(K) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立;
- (4) 如果 $K_1 \subseteq K_2$, 则有 $hcap(K_2) = hcap(K_1) + hcap(g_{K_1}(K_2 \setminus K_1))$.

假定 $\gamma([0,T])$ $(T \in (0,\infty])$ 为 \mathbb{H} 上的一条简单曲线 (如图 1 所示 1), 满足 $\gamma(0)=0$, $\gamma(0,T)\subset\mathbb{H}$, 则对任意的 $0 \leq t < T$, $K_t:=\gamma[0,t]$ 为 \mathbb{H} 上的紧致包,从而有唯一的共形映射 $g_t:\mathbb{H}\backslash K_t\to\mathbb{H}$ 满足 $\lim_{z\to\infty}q_t(z)-z=0$.

定理 **2.1** [5] 记 $a(t) = hcap(K_t)$, 则

- (1) a(t) 为 [0,T] 上的连续函数并且是严格单调增的;
- (2) 极限 $W(t) = \lim_{z \in \mathbb{H} \setminus K_t, z \to \gamma(t)} g_t(z) \in \mathbb{R}$ 存在, 并且 $t \to W(t)$ 为连续的.

由以上定理知 a(t) 为严格单调增的, 则可以采用 $u=\frac{1}{2}a(t)$ 作参数使得 $\mathrm{hcap}(K_{t(u)})=2u$. 重新参数化之后, 我们可以假定 a(t)=2t.

定理 2.2^[5] 采用以上记号,则 $g_t(z)$ 满足以下常微分方程:

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - W(t)}, \quad g_0(z) = z.$$
 (2.1)

$$\lim_{h\downarrow 0} \operatorname{diam}(g_t(K_{t+h}\backslash K_t)) = 0,$$

仍可以证明微分方程 (2.1) 成立, 具体可参见文献 [7].

反过来, 给定连续函数 W, 考虑微分方程 (2.1). 假定 $g_t(z)$ 为微分方程 (2.1) 的解, 记

$$\tau(z) := \sup \Big\{ t > 0, \min_{0 \le s \le t} |g_s(z) - W(s)| > 0 \Big\}, \tag{2.2}$$

$$K_t := \{ z \in \mathbb{H} : \tau(z) \leqslant t \}, \quad H_t := \mathbb{H} \backslash K_t. \tag{2.3}$$

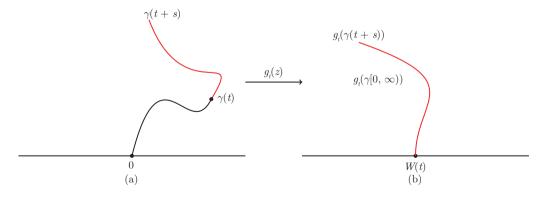


图 1 (网络版彩图) 简单曲线对应的映射

¹⁾ 由文献 [6] 可知图 1(b) 的曲线在 W(t) 处垂直于 x 轴, 并且与图 1(a) 有一定的相似性.

定理 2.3 [5] 假定 $W(t):[0,T]\to\mathbb{R}$ 为连续函数, $g_t(z)$ 为微分方程 (2.1) 的解, K_t 和 H_t 如上定义, 则

- (1) $q_t(z): H_t \to \mathbb{H}$ 为共形映射;
- (2) 对任意的 $t \in [0, T], K_t$ 为 Ⅱ 上的紧致包;
- (3) 在 $z = \infty$ 附近, $g_t(z)$ 有展开:

$$g_t(z) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right).$$

注 2.2 由定理 2.2 和 2.3 可以看出, 给定简单曲线 γ , 存在一个连续函数使得对应的共形映射满足微分方程 (2.1). 反之不一定成立, 即给定连续函数 W(t), (2.1) 的解产生的紧致包不一定由曲线生成. 关于这方面更深一步的研究参见文献 [8–10].

定义 2.2 给定连续函数 $W(t):[0,T]\to\mathbb{R}$, 考虑微分方程 (2.1) 的解所对应的紧致包 K_t . 如果存在一条曲线 $\gamma:[0,T]\to \mathbb{H}$ 使得对任意的 t, $H_t=\mathbb{H}\backslash K_t$ 为 $\mathbb{H}\backslash \gamma[0,t]$ 的无界连通分支, 则称 (2.1) 是由 γ 生成的.

2.2 单位圆盘上的 Loewner 理论

本小节主要介绍单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ 上的 Loewner 理论.

定义 2.3 如果集合 $K\subset \mathbb{D}$ 满足 $0\not\in K,\, K=\overline{K}\cap \mathbb{D}$ 且 $\mathbb{D}\backslash K$ 是单连通的, 则称 K 为单位圆盘上的紧致包.

由 Riemann 映射定理知, 存在唯一的 $g_K: \mathbb{D}\backslash K\to \mathbb{D}$ 满足 $g_K(0)=0,$ $g_K'(0)>0.$ 由 Schwartz 引理 2.1 知, $g_K'(0)\geqslant 1$ 且 $g_K'(0)=1$ 当且仅当 $K\subset\partial\mathbb{D}$. 定义 K 的单位圆盘容量 (简称容量) 为

$$\operatorname{dcap}(K) := \log q'_K(0).$$

很容易验证如下性质:

命题 2.2 假设 K 为 \mathbb{D} 上的紧致包,则其容量满足:

- (1) $dcap(K) \ge 0$,并且 dcap(K) = 0 当且仅当 $K = \emptyset$;
- (2) 如果 $K_1 \subseteq K_2$, 则 $dcap(K_2) = dcap(K_1) + dcap(g_{K_1}(K_2 \setminus K_1))$.

同样地, 如果简单曲线 $\gamma:[0,T]\to\overline{\mathbb{D}}$, 满足 $\gamma(0)=1,\gamma(0,T)\subset\mathbb{D}$ 且 $0\not\in\gamma$. 定义 $K_t:=\gamma[0,t],\ a(t)=\operatorname{dcap}(K_t),\ g_t(z):\mathbb{D}\setminus K_t\to\mathbb{D},\ g_t(0)=0,\ g_t'(0)>0.$

引理 2.5^[2] 采用以上记号,则有

- (1) a(t) 关于 t 是严格递增的非负函数;
- (2) 极限 $\lambda(t) := \lim_{z \in \mathbb{D} \setminus \gamma[0,t], z \to \gamma(t)} g_t(z) \in \partial \mathbb{D}$ 存在, 并且存在连续函数 W(t) 使得 $\lambda(t) = e^{iW(t)}$. 由于 a(t) 严格单调增, 并且 a(0) = 0, 则可以重新参数化使得 a(t) = t. 类似地, 有如下 Loewner 方程:

定理 2.4 [2] 假定 γ 、 K_t 和 $g_t(z)$ 如上,则 $g_t(z)$ 满足

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)}, \quad g_0(z) = z.$$
 (2.4)

注 2.3 类似地可以证明, 如果 \mathbb{D} 上的一族紧致包 $(K_t, t \ge 0)$ 满足

$$\lim_{h\downarrow 0} \operatorname{diam}(g_t(K_{t+h}\backslash K_t)) = 0,$$

则也有方程 (2.4) 成立.

同上半平面的情形, 我们有如下定理:

定理 2.5 给定连续函数 $W(t): [0,T] \to \mathbb{R}, T \in (0,+\infty]$. 考虑微分方程 (2.4) 的解, 记

$$\tau(z) := \sup \Big\{ t > 0 : \min_{0 \leqslant s \leqslant t} |g_s(z) - e^{iW(s)}| > 0 \Big\},$$
$$K_t := \{ z \in \mathbb{D} : \tau(z) \leqslant t \}, \quad D_t := \mathbb{D} \backslash K_t,$$

则对任意的 $t \in [0,T]$,

- (1) K_t 为 D 上的紧致包:
- (2) $g_t: D_t \to \mathbb{D}$ 是共形映射并且 $g_t(0) = 0, g'_t(0) = e^t$.

注 2.4 对给定的连续函数 W(t), 并不一定存在曲线 γ 使得 $K_t = \gamma[0,t]$. 如果存在曲线 γ 使得 对任意的 $t \ge 0$, D_t 为 $\mathbb{D}\setminus\gamma[0,t]$ 的包含 0 的连通分支, 则称微分方程 (2.4) 是由曲线 γ 生成的.

2.3 全平面的 Loewner 理论

Bieberbach 猜想的证明实际上是利用了全平面的 Loewner 理论. Loewner ^[11] 于 1923 年证明了该猜想的部分内容, De Branges ^[1] 利用 Loewner 的方法完全证明了该猜想.

定义 2.4 如果 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧集, 并且 $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ (这里 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) 为单连通的, 则称 K 为平面上的紧致包.

仍由 Riemann 映射定理 2.2 可知存在 $F_K: \mathbb{C}\setminus \mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus K$ 满足

$$\lim_{z \to \infty} \frac{F_K(z)}{z} > 0.$$

事实上, 如果 $0 \in K$, 则 $F_K(z) = \frac{1}{f_K(\frac{1}{z})}$, 其中 $f_K(z)$ 是 \mathbb{D} 到 $\{\frac{1}{z}: z \in \mathbb{C} \setminus K\}$ 的共形映射, 并且 $f_k(0) = 0$, $f'_K(0) > 0$. 记 $\operatorname{cap}(K) = -\log[f'_K(0)] = \log[\lim_{z \to \infty} \frac{F_K(z)}{z}]$, 称为 K 的容量. 很容易验证以下结论:

引理 2.6 假定 K 为全平面上的紧致包,则其容量满足

- (1) 对任意的 $r \in \mathbb{R}$, cap(rK) = log r + cap(K);
- (2) 对任意的 $z \in \mathbb{C}$, cap(K+z) = cap(K);
- (3) 如果 $K_1 \subset K_2$, 则有 $cap(K_2) = cap(K_1) + cap(\mathbb{D} \cup F_{K_1}^{-1}(K_2 \backslash K_1))$.

同样, 给定简单曲线 $\gamma: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}$, 满足 $\gamma(-\infty) = 0$, $\gamma(+\infty) = \infty$. 定义 $K_t := \gamma[-\infty, t]$, 则 K_t 为全平面上的紧致包.

令 $a(t) = \operatorname{cap}(K_t), g_t = F_{K_t}^{-1} : \mathbb{C} \setminus K_t \to \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$ 其中 $\lim_{z \to \infty} \frac{g_t(z)}{z} > 0$. 于是可以类似于单位圆盘中的证明一样得到如下结论:

引理 2.7[2] 采用以上记号,则有

- (1) a(t) 关于 t 连续, 严格单调增, 并且 $a(-\infty) = 0$, $a(+\infty) = +\infty$;
- (2) 极限 $\lambda(t) := \lim_{z \to \gamma(t), z \in \mathbb{C} \setminus K_t} g_t(z)$ 存在, 并存在连续函数 W(t) 使得 $\lambda(t) = \exp\{iW(t)\}$;
- (3) 如果 a(t) = t, 则 $g_t(z)$ 满足如下微分方程:

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{\lambda(t) + g_t(z)}{\lambda(t) - g_t(z)}, \\ \lim_{t \to -\infty} e^t g_t(z) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$
(2.5)

注 2.5 如果 \mathbb{C} 上的一族递增紧致包 $\{K_t, t \in \mathbb{R}\}$ 满足 $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} K_t = \{0\}$,

$$\lim_{h\downarrow 0} \operatorname{diam}(g_t(K_{t+h}\backslash K_t)) = 0,$$

并且 $cap(K_t) = t$, 同样有以上微分方程成立.

反之, 假定 W(t) 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 则下面的定理成立.

定理 2.6 [5] 存在唯一的一族共形映射 $g_t(z): \mathbb{C}\backslash K_t \to \mathbb{C}\backslash \overline{\mathbb{D}}$ 满足微分方程 (2.5). 特别地, K_t 为全平面的紧致包, 并且 $\operatorname{cap}(K_t) = t$.

2.4 带型区域上的 Loewner 理论

记 $S_{\pi} := \{x + \mathrm{i}y : x \in \mathbb{R}, 0 < y < \pi\}, \mathbb{R}_{\pi} := \{x + \mathrm{i}\pi : x \in \mathbb{R}\}.$ 本小节主要介绍 S_{π} 上的 Loewner 方程. 相关内容可参见 Zhan [12] 的博士论文.

定义 2.5 如果有界集 $K \subset S_{\pi}$ 满足 $S_{\pi} \setminus K$ 是单连通的, $\overline{K} \cap \mathbb{R}_{\pi} = \emptyset$ 并且 $K = \overline{K} \cap S_{\pi}$, 则称 $K \to S_{\pi}$ 上的紧致包.

引理 2.8 [12] 设 K 为 S_{π} 上的紧致包,则存在唯一的共形映射 $q_K: S_{\pi} \setminus K \to S_{\pi}$ 满足

$$\lim_{z \to \pm \infty} g_K(z) - z = \pm C(K),$$

其中 $C(K) \ge 0$ 称为 K 的 S_{π} - 容量, 记为 $\operatorname{scap}(K)$.

假定 $\gamma(t):[0,T]\to \overline{S_\pi}$ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma(0)=0,\ \gamma(0,T)\subset S_\pi$. 令 $K_t:=\gamma[0,t],\ 则\ K_t$ 为 S_π 上的紧致包. 记 $a(t)=\mathrm{scap}(K_t),\ 同样可以证明如下定理:$

定理 2.7 [12] 采用如上记号,则有

- (1) a(t) 关于 t 是严格增的连续函数;
- (2) $W(t) := \lim_{z \in S_{\pi} \setminus \gamma[0,t], z \to \gamma(t)} g_t(z)$ 存在并且关于 t 连续;
- (3) 若重新参数化 γ 使得 a(t) = t, 则 $g_t(z)$ 满足如下微分方程:

$$\partial_t g_t(z) = \coth \frac{g_t(z) - W(t)}{2}, \quad g_0(z) = z.$$
 (2.6)

反之, 当给定连续函数 W(t) 时, 同样通过分析方程 (2.6) 有如下结论:

定理 2.8 [12] 给定连续函数 $W(t): [0,T] \to \mathbb{R}, W(0)=0$, 考虑方程 (2.6), 则有

- (1) K_t 为 S_{π} 上的紧致包:
- (2) $g_t(z): S_{\pi} \backslash K_t \to S_{\pi}$ 为共形映射:
- (3) $\lim_{z\to+\infty}(g_t(z)-z)=t$, $\lim_{z\to-\infty}(g_t(z)-z)=-t$, 其中

$$\tau(z) := \sup \Big\{ t > 0, \inf_{0 \le s \le t} |g_s(z) - W(s)| > 0 \Big\}, \quad K_t = \{ z \in S_\pi : \tau(z) \le t \}.$$

3 SLE 定义及其性质

SLE 是 Schramm 首先在文献 [13] 中定义的. 他的目的是为了刻画离散模型的尺度极限, 基于物理学家给出的尺度极限的共形不变性和 Markov 性质, Schramm 定义了 SLE, 并且证明了回路擦除随机游动的尺度极限如果存在, 则一定为射线型 SLE(2). 本节主要介绍 4 种 SLE 及其性质.

3.1 SLE 的定义

按照 Schramm 的思路, 我们从渗流来介绍其是如何引进 SLE 的. 假定 $(\varepsilon T, \varepsilon > 0)$ 是平面上的正三角形剖分, 如图 2: 假定 0 恰好位于某个三角形的一条边的中心. 将正实轴上的顶点染成黑色, 将负

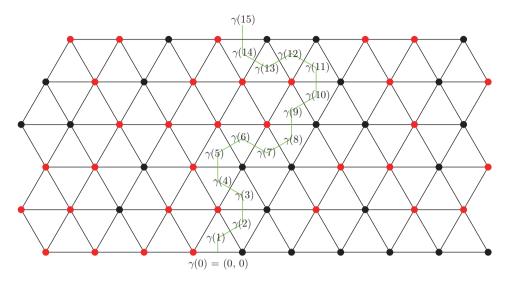


图 2 (网络版彩图) 渗流模型的探索曲线. 图中 γ 即为探索曲线, 其左侧的相邻的点被染成红色, 右侧相邻的点被染成黑色

实轴上的顶点染成红色. 而 $\mathbb{H} \cap \varepsilon \mathcal{T}$ 中的点独立地依 $\frac{1}{2}$ 的概率染成黑色或者红色. 那么对每一种染色方案, 存在唯一的一条从 0 到 ∞ 的折线 γ^{ε} 满足

$$\gamma^{\varepsilon}(0) = 0, \quad \gamma^{\varepsilon}(k) \in \varepsilon(\mathcal{T})^*,$$

并且 $\gamma^{\varepsilon}(k)$ 与 $\gamma^{\varepsilon}(k+1)$ 之间用线段相连, γ^{ε} 左侧相邻的点是红色, 右侧相邻的点是黑色, 这里 $(\mathcal{T})^*$ 为 \mathcal{T} 的对偶图. 称 γ^{ε} 为从 0 到 ∞ 的探索曲线. 物理学家猜测当 $\varepsilon \to 0$ 时, γ^{ε} 收敛到一条随机曲线 γ (当然这个收敛需要定义, 参见文献 [13] 或者后续小节) 并且 γ 的分布满足共形不变性质和 Markov 性质.

下面从离散模型的角度解释 Markov 性质. 如果已经知道 $\{\gamma^{\varepsilon}(k): 0 \leq k \leq N\}$, 那么 $\{\gamma^{\varepsilon}(N+m): m=0, m=1, m=2,\ldots\}$ 即为 $(\mathbb{H}\backslash\gamma[0,N])\cap\varepsilon\mathcal{T}$ 中的从 $\gamma(N)$ 到 ∞ 的探索曲线. 设 $\gamma^{\varepsilon}[0,N]$ 收敛到 $\gamma[0,t]$, 共形不变性粗略地可描述为: 如果存在共形映射 $g_t: \mathbb{H}\backslash\gamma[0,t] \to \mathbb{H}$, 并且 $g_t(\gamma(t))=0$, $g_t(\infty)=\infty$, 那么 $g_t(\gamma[t,\infty))$ 恰与 γ 有着相同的分布.

假定 $\gamma[0,\infty)\to \mathbb{H}$ 为简单的随机曲线,

$$\gamma(0) = 0$$
, $\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = \infty$, $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$,

并且参数化 $\gamma(t)$ 使得 $hcap(\gamma[0,t]) = 2t$. 令 $g_t := g_{\gamma[0,t]}$. 对任意的 $s \ge 0$, 定义

$$\bar{\gamma}(t) := g_s(\gamma(t+s)) - g_s(\gamma(s)).$$

那么在已知 $\gamma[0,s]$ 的条件下 $\bar{\gamma}[0,\infty)$ 的分布与 $\gamma[0,\infty)$ 的分布相同. 假定存在连续函数 W(t) 使得 $g_t(z)$ 满足微分方程 (2.1), 则作为紧致包 $\bar{\gamma}[0,t]$ 对应的共形映射为 $\bar{g}_t(z) = g_{t+s} \circ g_s^{-1}(z+W(s)) - W(s)$, 则 所假设的条件可转化为

- (1) $\bar{q}_t(z)$ 与 $q_t(z)$ 同分布, 从而不依赖于 s.
- (2) $\bar{q}_t(z)$ 与 $q_r(z)$ $(0 \le r \le s)$ 独立. 转化到 W(t) 上应为
- (i) W(t+s) W(s) 与 W(t) 同分布, 并且不依赖于 s:

(ii) W(t+s) - W(s) 与 W(r) $(0 \leqslant r \leqslant s)$ 独立.

再结合 W(t) 是连续的,由随机分析的知识(参见文献 [14])知 W(t) 一定可以表示为 $W(t) = \mu t + \sqrt{\kappa} B_t$,其中 B_t 是标准的一维 Brown 运动, $\kappa \ge 0$. 如果假定 γ 关于 y 轴对称,则 W(t) 与 -W(t) 同分布,从而 $\mu = 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa} B_t$.

定义 3.1 [7] 假定 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, 其中 B_t 为标准的一维 Brown 运动. 称满足随机微分方程 (2.1) 的一族共形映射为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 有时我们也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t: t \geq 0\}$ 为弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$.

由 Brown 运动的性质可以导出弦 $SLE(\kappa)$ 的许多性质.

命题 3.1 [15] 假定 { $g_t(z): t \ge 0$ } 与 { $K_t: t \ge 0$ } 为 ℍ 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(κ), 则

- (1) (尺度不变性) 对任意的 r > 0, $\hat{g}_t(z) := r^{-\frac{1}{2}} g_{rt}(\sqrt{r}z)$ 与 $g_t(z)$ 作为以 (t,z) 为指标的随机过程有着相同的分布. 特别地, $(K_t)_{t\geq 0}$ 与 $(r^{-\frac{1}{2}}K_{rt})_{t\geq 0}$ 作为随机紧致包也有相同的分布.
- (2) (Markov 性) 假定 τ 是关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时, 则 $\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_{\tau}^{-1}(z+W_{\tau}) W_{\tau}$ 与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ 独立.

类似地, 利用单位圆盘上的 Loewner 微分方程 (2.4) 可定义单位圆盘中的 SLE.

定义 3.2 [7,16] 令 $\kappa > 0$, $\lambda(t) = \exp\{i\sqrt{\kappa}B_t\}$, 其中 B_t 为标准的一维 Brown 运动. 称满足随机微分方程 (2.4) 的一族共形映射为 D 上从 1 到 0 的射线 $SLE(\kappa)$. 有时我们也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t: t \geq 0\}$ 为射线型 $SLE(\kappa)$.

射线型 SLE 不满足尺度不变性, 但是仍满足 Markov 性质.

命题 3.2^[7] 假定 τ 是关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时, 则 $\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_{\tau}^{-1}(zW_{\tau})/W_{\tau}$ 与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t: 0 \le t \le \tau\}$ 独立.

定义 3.3 假定 $\kappa \ge 0$, $\lambda(t) = \exp\{i\sqrt{\kappa}B_t\}$, 其中 B_t 为标准的一维 Brown 运动. 称满足随机微分方程 (2.5) 的一族共形映射为 $\mathbb C$ 上从 0 到 ∞ 的全平面 $\mathrm{SLE}(\kappa)$.

命题 3.3 假定 $(g_t, K_t : t \in \mathbb{R})$ 为全平面 $SLE(\kappa)$. 如果 $r \in \mathbb{R}$, 那么 $g_{t+r}(e^r z)$ 也是全平面 $SLE(\kappa)$. 于是根据尺度不变性可以通过共形映射定义平面上任意两点间的全平面 SLE. 同样可定义带型 区域 S_{π} 上的 $SLE(\kappa)$.

定义 3.4 [12] 假定 $\kappa \geq 0$, $W(t) = \sqrt{\kappa} B_t$, 其中 B_t 为标准的一维 Brown 运动. 称满足随机微分方程 (2.6) 的一族共形映射为 S_{π} 上从 0 到 \mathbb{R}_{π} 的带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 有时我们也称此微分方程对应的紧致包 $\{K_t: t \geq 0\}$ 为带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 类似于弦 SLE , 可证明对关于 W_t 生成的 σ 代数流的有界停时 τ ,

$$\tilde{g}_t(z) := g_{t+\tau} \circ g_{\tau}^{-1}(z + W_{\tau}) - W_{\tau}$$

与 $g_t(z)$ 同分布并且与 $\{g_t: 0 \leq t \leq \tau\}$ 独立.

3.2 几种 SLE 的等价性

通过共形映射, 我们可以定义任一单连通区域上的 $SLE(\kappa)$.

定义 3.5 假定 D 为任一单连通区域, 并且 $a \in D$, $b \setminus c$ 和 e 为 ∂D 上的 3 个不同的点 (素端).

(1) 给定 $f_1: \mathbb{H} \to D$ 为共形映射, 并且 f(0) = b, $f(\infty) = c$. $\{K_t: t \ge 0\}$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$. 定义 $\{f_1(K_t): t \ge 0\}$ 为 D 上从 b 到 c 的弦 $SLE(\kappa)$, 或者可定义为一族满足如下微分方程的 共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \quad g_0(z) = f_1^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D\setminus f_1(K_t)$ 共形映为 \mathbb{H} , 并且 $g_t(b)=0$, $g_t(c)=\infty$.

(2) 如果 $f_2: \mathbb{D} \to D$ 为共形映射, 并且 $f_2(0) = a$, $f_2(1) = b$, $\{K_t: t \ge 0\}$ 为 \mathbb{D} 上从 1 到 0 的射线型 $SLE(\kappa)$, 则定义 $\{f_2(K_t): t \ge 0\}$ 为 D 上从 a 到 b 的射线型 $SLE(\kappa)$, 或者可定义为一族满足如下微分方程的共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = g_t(z) \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + g_t(z)}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - g_t(z)}, \quad g_0(z) = f_2^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D \setminus f_2(K_t)$ 共形映为 \mathbb{D} , 并且 $g_t(a) = 0$, $g_t'(a) = e^t$.

(3) 如果 $f_3: S_\pi \to D$ 为共形映射, 并且满足 $f_3(0) = b$, $f_3(+\infty) = c$, $f_3(-\infty) = e$, $\{K_t: t \ge 0\}$ 为 S_π 上从 0 到 \mathbb{R}_π 的带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 则定义 $\{f_3(K_t): t \ge 0\}$ 为 D 上从 b 到弧 ec 的带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 或者可定义为一族满足如下微分方程的共形映射 $g_t(z)$:

$$\partial_t g_t(z) = \coth \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}{2}, \quad g_0(z) = f_3^{-1}(z).$$

注意到此微分方程的解 $g_t(z)$ 将 $D \setminus f_3(K_t)$ 共形映为 S_{π} 并且 $g_t(b) = 0$, $g_t(c) = +\infty$, $g_t(e) = -\infty$.

经过以上的定义, 我们将 3 种 SLE 的定义推广到了任一单连通区域上. 事实上, 三者在某种意义上是等价的.

定理 3.1 [16] 假定 $(K_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb D$ 上从 -1 到 1 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. $(\tilde{K}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb D$ 上从 -1 到 0 的射线 型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 令

$$\tau := \sup\{t > 0 : 0 \notin K_t\}, \quad \tilde{\tau} := \sup\{t > 0 : 1 \notin \tilde{K}_t\},$$

则当 $\kappa = 6$ 时, $\{K_t : 0 \le t < \tau\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \le t < \tilde{\tau}\}$ 同分布; 当 $\kappa \ne 6$ 时, 存在停时序列 $(T_n, n \ge 1)$ 与 $(\tilde{T}_n, n \ge 1)$ 满足: $T_n \uparrow T$, $\tilde{T}_n \uparrow \tilde{T}$, 并且 $\{K_t : 0 \le t < T_n\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \le t < \tilde{T}_n\}$ 的分布彼此绝对连续.

事实上, 带型 $SLE(\kappa)$ 与弦 $SLE(\kappa)$ 在某种意义上也等价.

定理 3.2 [12] 假定 $(K_t)_{t\geqslant 0}$ 为 S_{π} 上从 0 到 \mathbb{R}_{π} 的带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. $(\tilde{K}_t)_{t\geqslant 0}$ 为 S_{π} 上从 0 到 $+\infty$ 的 弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 令

$$\tau := \inf\{t > 0 : K_t \cap \mathbb{R}_{\pi} \neq \emptyset\}, \quad \tilde{\tau} := \inf\{t > 0 : \tilde{K}_t \cap \mathbb{R}_{\pi} \neq \emptyset\},$$

则当 $\kappa = 6$ 时, $\{K_t : 0 \le t < \tau\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \le t < \tilde{\tau}\}$ 同分布; 当 $\kappa \ne 6$ 时, 存在停时序列 $(T_n, n \ge 1) \uparrow \tau$ 与 $(\tilde{T}_n, n \ge 1) \uparrow \tilde{\tau}$ 满足 $\{K_t : 0 \le t < T_n\}$ 与 $\{\tilde{K}_t : 0 \le t < \tilde{T}_n\}$ 的分布彼此绝对连续.

同样, 全平面 SLE 与射线型 SLE 有着紧密的联系.

定理 3.3 假定 $(g_t, K_t : t \in \mathbb{R})$ 为全平面 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 固定 $t_0 \in \mathbb{R}$, 则在已知 $(K_t, t \leq t_0)$ 的条件下, $(K_t : t \geq t_0)$ 为 $\mathbb{C} \setminus K_{t_0}$ 中从其边界某个点到 ∞ 的射线型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$.

3.3 SLE 的曲线性质

由 Loewner 理论知, 任意的连续函数 W(t), 4 种类型的微分方程 (2.1)、(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 并不一定由一条连续曲线生成. 但是对于 $SLE(\kappa)$, 依概率 1, 其对应的紧致包是由一条曲线生成的.

定理 3.4 [15] 假定 $\{g_t(z): t \ge 0\}$ 和 $\{K_t: t \ge 0\}$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 则依概率 1 存在一条连续曲线 $\gamma: [0,\infty) \to \overline{\mathbb{H}}$ 使得 $\mathbb{H} \setminus K_t$ 为 $\mathbb{H} \setminus \gamma[0,t]$ 的无界连通分支.

注 3.1 Schramm 和 Rohde [15] 在 $\kappa \neq 8$ 的情形下给出了此命题的直接证明. 而他们的方法不适用于 $\kappa = 8$ 的情形. $\kappa = 8$ 时, 此定理可作为弦 SLE(8) 为均匀生成树的探索曲线的尺度极限从而由曲

线生成的推论而得到 (参见文献 [17]). 至今都没有一个直接的证明, Alvisio 和 Lawler [18] 对技术上的困难做出了说明.

有时称上述定理中的随机曲线 γ 为 \square 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$. 根据上一节可知, 射线型 $SLE(\kappa)$ 与全平面 $SLE(\kappa)$ 以及带型 $SLE(\kappa)$ 也是由一条曲线生成的.

作为一条随机曲线, γ 的性质依赖于 κ .

定理 $3.5^{[15]}$ 设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$, 则

- (1) 当 $0 \le \kappa \le 4$ 时, 依概率 1 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0,\infty) \subset \mathbb{H} \cup \{0\}$;
- (2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1 对任意的 $z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$, 并且 $\bigcup_{t>0} K_t = \overline{\mathbb{H}}$;
- (3) 当 $\kappa \geq 8$ 时, 依概率 1 有 $\gamma[0,\infty) = \overline{\mathbb{H}}$, 即 γ 铺满整个上半平面;
- (4) 对任意的 $\kappa \geq 0$, 都有 $\lim_{t\to\infty} |\gamma(t)| = \infty$.

此定理的证明涉及比较精细的分析, 具体可参见文献 [15]. Lawler $^{[5,19]}$ 给出了简化的证明.

对于射线型 $SLE(\kappa)$, 由等价性也有对应的性质.

定理 3.6 [16] 设 γ 为 D 上从 1 到 0 的射线型 $SLE(\kappa)$, 则

- (1) 当 $0 \le \kappa \le 4$ 时, 依概率 1 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0,\infty) \subset \mathbb{D} \cup \{1\}$;
- (2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1 对任意的 $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$, 并且 $\bigcup_{t>0} K_t = \overline{\mathbb{D}}$;
- (3) 当 $\kappa \geqslant 8$ 时, 依概率 1 有 $\gamma[0,\infty)=\overline{\mathbb{D}}$, 即 γ 铺满整个闭的单位圆盘.

此外 Lawler 还证明了如下性质.

定理 3.7 [20] 设 γ 为 D 上从 1 到 0 的射线型 $SLE(\kappa)$, 则依概率 1 有

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = 0.$$

相比射线型 $SLE(\kappa)$ 和弦 $SLE(\kappa)$,带型 $SLE(\kappa)$ 也有类似的性质, 但是稍有不同.

定理 3.8 [12] 设 γ 为 S_{π} 上从 0 到 \mathbb{R}_{π} 带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 则

- (1) 当 $0 \le \kappa \le 4$ 时, 依概率 1 曲线 γ 为一条简单曲线, 并且 $\gamma[0,\infty) \subset S_{\pi} \cup \{0\}$;
- (2) 当 $4 < \kappa < 8$ 时, 依概率 1 对任意的 $z \in \bar{\mathbb{S}}_{\pi} \setminus \{0\}$, 有 $z \notin \gamma[0, \infty)$;
- (3) 当 $\kappa \ge 8$ 时,则依概率 1 有 $\gamma[0,\infty)$ 的 Hausdorff 维数为 2, 即 γ 铺满整个其所围绕的区域.

定理 3.9 [12] 设 γ 为 S_{π} 上从 0 到 \mathbb{R}_{π} 的带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 则

- (1) 依概率 1 极限 $m := \lim_{t \to \infty} \gamma(t)$ 存在;
- (2) 依概率 $1, m \in \mathbb{R}_{\pi}$, 如果记 $m = X + i\pi$, 则随机变量 X 有密度函数 $\rho(x) = (\cosh(\frac{x}{2}))^{-\frac{4}{\kappa}}/c_{\kappa}$, 其中 $c_{\kappa} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cosh(\frac{x}{2}))^{-\frac{4}{\kappa}} dx$.

注 3.2 由此定理可知, 设 $(K_t)_{t\geqslant 0}$ 为带型 $\mathrm{SLE}(\kappa)$ 对应的紧致包序列, 记 $K_{\infty}=\bigcup_{t\geqslant 0}K_t$, 则 K_{∞} 是有界的. 而 Zhan [12] 正是先证明 K_{∞} 为有界的来证明上面的定理的.

注 3.3 对于全平面 SLE, 由定理 3.3 同样可得到其由一条曲线生成, 以及对应的性质.

当 $\kappa \ge 8$ 时, 由以上的定理可知 3 种 SLE 的 Hausdorff 维数依概率 1 为 2. 而其他情形, Rohde 和 Schramm [15] 给出了上界估计. 最终, Beffara 采用两点估计的方法确定了 SLE 的 Hausdorff 维数, 而 Lawler [19] 给出了简化证明.

定理 3.10 [21] 设 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$, 则依概率 1 有

$$\dim(\gamma) = \min\left\{2, 1 + \frac{\kappa}{8}\right\}.$$

注 3.4 由 4 种 SLE 的等价性可知其他类型的 SLE 的维数与弦 SLE 相同.

3.4 局部性与限制性

由于一些离散模型满足一些特殊的性质, 与之对应的 $SLE(\kappa)$ 也应该满足一些特别的性质. 本小节主要介绍 SLE(6) 的局部性和 $SLE(\frac{8}{2})$ 的限制性.

定理 3.11 $^{[5,7,16]}$ 设 K 为 \mathbb{H} 上的紧致包, 并且 $0 \notin K$. $\gamma(t)$ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(6). 记 $T = \inf\{t > 0 : \gamma(t) \cap K \neq \emptyset\}$. 设 $\tilde{\gamma}(t)$ 为 $\mathbb{H} \setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 SLE(6), 记 $S = \inf\{t > 0 : \tilde{\gamma}(t) \cap K \neq \emptyset\}$, 则 $\{\gamma(t) : 0 \leqslant t < T\}$ 与 $\{\tilde{\gamma}(t) : 0 \leqslant t < S\}$ 在相差一个时间变换的条件下有相同的分布.

注 3.5 从以上定理可以看出从 0 出发到 ∞ 的弦 SLE(6) 在未碰到 K 时, 我们是分辨不出其到底是 \mathbb{H} 上的 SLE(6) 还是 $\mathbb{H}\backslash K$ 上的 SLE(6). 这就是 "局部性"的由来. 由 3 种 SLE 的等价性可以证明其他类型的 SLE(6) 也满足局部性.

除了 SLE(6) 满足一定的特殊性质外, $SLE(\frac{8}{3})$ 也满足一种特殊性质: 限制性.

引理 3.1 [5,22] 假定 $\gamma(t)$ 为 \square 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\frac{8}{3})$. 对 \square 上的任意的紧致包 K $(0 \not\in K)$,设 Φ_K 为从 $\square \setminus K$ 到 \square 的共形映射,满足 $\Phi_K(0) = 0$, $\lim_{z \to \infty} \frac{\Phi_K(z)}{z} = 1$,则

$$P[\gamma \cap K = \emptyset] = \Phi_K^{\prime \frac{5}{8}}(0). \tag{3.1}$$

由以上引理可得以下的定理.

定理 3.12 [5] 假定 γ 是上半平面 \square 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\frac{8}{3})$, K 为 \square 上的任意的紧致包, 满足 $0 \notin K$, 则在已知 $\gamma \cap K = \emptyset$ 的条件下, γ 的分布与 $\square \setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\frac{8}{3})$ 的分布一样.

注 3.6 定理 3.12 可解释为, 如果将 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\frac{8}{3})$ 限制在与 K 不交的集合上, 则得到 $\mathbb{H}\setminus K$ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\frac{8}{3})$. 这也是 "限制性" 的直观解释.

注 3.7 对于任意的 $\kappa \in (0,8) \setminus \{8/3\}$, 我们一般给不出类似于 (3.1) 的公式, 但是对于由某种限制测度生成的随机的紧致包, 我们可给出类似于 (3.1) 的显示公式, 参见文献 [23].

注 3.8 当然, 我们还应说明 $\{\{K \cap \gamma = \emptyset\} : K$ 取遍所有的紧致包 $\}$ 完全刻画了 γ 的分布, 具体可参见文献 [22].

对射线型 $SLE(\frac{8}{3})$, 情形有点不太一样. 设 K 为 \mathbb{D} 上的紧致包, 则有唯一的共形映射 $\Phi_K(z): \mathbb{D}\backslash K$ $\to \mathbb{D}$ 满足 $\Phi'_K(0)>0$, $\Phi_K(0)=0$.

定理 3.13 $^{[5,24]}$ 设 $\gamma(t)$ 为 D 上从 1 到 0 的射线型 $\mathrm{SLE}(\frac{8}{3})$, 则对 D 上的紧致包 K, 记 Φ_K 为如 上定义的共形映射. 如果 $1 \not\in K$, 则有

$$P[\gamma \cap K = \emptyset] = \Phi_K'^{\frac{5}{48}}(0)|\Phi_K'(1)|^{\frac{5}{8}}.$$

从而在已知 $\gamma \cap K = \emptyset$ 的条件下, γ 的分布与 $\mathbb{D}\backslash K$ 上的从 1 到 0 的射线型 $\mathrm{SLE}(\frac{8}{3})$ 的分布一样.

注 3.9 作为对弦 $SLE(\frac{8}{3})$ 和射线型 $SLE(\frac{8}{3})$ 的限制性的推广, 可以研究一类具有限制性和共形不变性的测度, 具体可参见文献 [22,24,25].

3.5 对偶性与自反性

在渗流模型中的离散探索曲线, 如果从 ∞ 出发, 得到的是同一条探索曲线, 只是方向发生了变化. 因此其尺度极限应该也应该满足这样的性质.

Rohde 和 Schramm [15] 猜测弦 $SLE(\kappa)$ 应该满足自反性. 最终由 Zhan 通过构造耦合 (coupling) 的方法证明了 $\kappa \in (0,4]$ 的情形; 而 Miller 和 Sheffield 利用 Gauss 自由场与 SLE 的关系证明了 $\kappa \in (4,8)$ 的情形.

定理 **3.14** [26, 27] 设 γ 为 \square 上从 0 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$, 其中 $0 < \kappa \le 8$, $\phi(z) = -\frac{1}{z}$. 记 $\beta := \phi(\gamma)$, 则 $\gamma[0,\infty)$ 和 $\beta[0,\infty)$ 作为随机曲线有相同的分布.

注 3.10 由于射线型 SLE 和带型 SLE 的端点不具备某种对称性, 因此其分布不满足自反性, 并且当 $\kappa > 8$ 时, 本定理不成立, 具体参见文献 [26,28].

除了自反性, 弦 SLE 还满足对偶性. Duplianter 和 Kwon^[29] 利用物理的方法猜测, 当 $4 < \kappa$ 时, 弦 SLE(κ) 的边界应为弦 SLE($\frac{16}{2}$). 这里还要涉及 SLE(κ ; ρ) 的定义, 就不详细叙述, 具体参见文献 [28].

4 有关 SLE 的一些计算

SLE 作为一个强大的工具解决了许多以前未解决的问题, 特别是关于平面 Brown 运动的边界的 Hausdorff 维数的确定. 这主要利用了 SLE 可以做出许多具体的计算这一特点. 本节主要介绍涉及 SLE 的一些计算.

4.1 Cardy 公式

假定 $\gamma(t)$ 是上半平面 Ξ 上的从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$. 由定理 3.5 知, 当 $\kappa > 4$ 时, $\gamma(t)$ 不是一条简单曲线, 并且 $\bigcup_{t \geq 0} K_t = \Xi$.

对任意的 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 定义 $T_x := \inf\{t \ge 0 : x \in K_t\}$, 则依概率 1 有 $T_x < \infty$. 显然, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或者 $0 < x_2 < x_1$ 时, 有 $T_{x_2} \le T_{x_1}$. 自然的有问题: 当 -x < 0 < y 时, $T_{-x} \le T_y$ 的概率是多少?

首先由于弦 $SLE(\kappa)$ 满足尺度不变性以及关于 y 轴对称, 因此可以得到

$$P(T_{-x} \leqslant T_y) = P(T_x \leqslant T_{-y}) = P(T_{-\frac{x}{x}} \leqslant T_1) = P(T_{-1} \leqslant T_{\frac{y}{x}}).$$

于是只需处理 $T_{-x} \leq T_1$ 的情形. 我们有如下定理:

定理 4.1 [5,7] 采用以上定义,则

$$P(T_{-x} > T_1) = \frac{\Gamma(2-4a)}{\Gamma(2-2a)\Gamma(1-2a)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1-2a} {}_{2}F_{1}\left(2a, 1-2a, 2-2a; \frac{x}{1+x}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(2-4a)}{(\Gamma(1-2a))^{2}} \int_{0}^{\frac{x}{1+x}} \frac{dy}{y^{2a}(1-y)^{2a}},$$

其中 $a = \frac{2}{\kappa}$, $_2F_1$ 为超几何函数.

令 $T := \inf\{t : \gamma(t) \in [1,\infty)\}$, 则当 $0 \le \kappa \le 4$ 时, 依概率 1 有 $T = \infty$; 当 $\kappa \ge 8$ 时, 依概率 1 有 $\gamma(T) = 1$. 而在 $4 < \kappa < 8$ 时, $\gamma(T)$ 有一个分布:

定理 **4.2** [5,15] 设 γ 是上半平面的从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$ 并且 $4<\kappa<8$, T 的定义如上. 令 $a=\frac{2}{\kappa}$, 则对任意的 $x\geqslant 0$, 有

$$P(\gamma(T) \le 1 + x) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(4a - 1)\Gamma(2a - 1)} \int_0^{\frac{x}{1+x}} \frac{dy}{y^{2-4a}(1-y)^{2a}}.$$

由定理 4.1 和 4.2 可以得到如下定理.

定理 $4.3^{[5]}$ 假定 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(6). 定义随机变量

$$Y := \sup\{x : T_x \leqslant T_{-1}\} = \sup\{x : x \in \partial K_{T_{-1}}\},\$$

$$Z := \sup\{x : T_x = T_1\} - 1,$$

则对任意的 $y \ge 0$, 有

$$P[Y \leqslant y] = P[Z \leqslant y] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} \int_0^{\frac{y}{1+y}} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du.$$

考虑共形映射

$$f(z) := \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^z w^{-\frac{2}{3}} (1 - w)^{-\frac{2}{3}} dw.$$

此映射将上半平面 Π 共形映到以 A = 0、B = 1、 $C = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 为顶点的正三角形 ^[3], 其中 f(0) = 0, f(1) = 1, $f(\infty) = e^{i\frac{\pi}{3}}$, 并且分支的选取如下:

$$\begin{split} f(-x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{\pi}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du, \quad \stackrel{\underline{\omega}}{=} 0 < x < \infty \ \mathrm{ff}, \\ f(x) &= \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^x u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du, \quad \stackrel{\underline{\omega}}{=} 0 < x < 1 \ \mathrm{ff}, \\ f(-x) &= 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{2\pi}{3}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du, \quad \stackrel{\underline{\omega}}{=} x > 1 \ \mathrm{ff}. \end{split}$$

设 γ 为 $\mathbb H$ 上从 0 到 ∞ 的弦 SLE(6), 根据定义可知, $\eta:=f(\gamma)$ 为 $\triangle ABC$ 上从 A 到 C 的弦 SLE(6). 由于

$$P[T_1 \leqslant T_{-y}] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})^2} \int_0^{\frac{y}{1+y}} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du,$$

令 D := f(-y), 则可以得到

$$P[\gamma$$
 先于 $(-\infty, -y]$ 碰到 $[1, +\infty)] = P[\eta$ 先于 DC 碰到 $BC] = |AD|$,

其中 |AD| 表示 AD 的长度. 以上称为 Cardy 公式. 正是 Cardy 公式促使了 Smirnov 和 Werner $^{[30]}$ 关于渗流的研究, 这也是 Smirnov 获得菲尔兹奖的重要工作之一. 又因为

$$P[\gamma(T_1) \leqslant 1 + x] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}} (1 - u)^{-\frac{2}{3}} du,$$

从而,

$$P[\eta(T_{BC}) \in BE] = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})^2} \int_0^{\frac{x}{1+x}} u^{-\frac{2}{3}} (1-u)^{-\frac{2}{3}} du = |BE|,$$

其中 T_{BC} 表示 η 第一次碰到线段 BC 的时刻, E = f(1+x) 为 BC 上的任一点. 从而得到 $\eta(T_{BC})$ 为 BC 上的均匀分布.

设 L>0, 记矩形 $\mathcal{R}_L:=[0,L]\times[0,\pi\mathrm{i}]$ 的四个项点为 A=0, B=L, $C=L+\mathrm{i}\pi$, $D=\mathrm{i}\pi$, 则存在唯一的共形映射 $\phi(z):\mathcal{R}_L\to \mathbb{H}$, 满足

$$f(C) = 0$$
, $f(A) = 1$, $f(B) = \infty$, $f(D) = \xi \in (0, 1)$.

由极值距离 (定义可参见文献 [4]) 的共形不变性, 可得到 $[\xi,1]$ 与 $[-\infty,0]$ 在 $\mathbb H$ 中的 π - 极值距离为 L. 而由椭圆函数与超几何函数的性质可得到, 当 $L \to \infty$ 时有

$$1 - \xi = e^{-L + O(1)}$$
.

存在唯一的 x > 0 满足存在唯一的共形映射 $f(z): \mathbb{H} \to \mathcal{R}_L$ 并且使得

$$f(0) = D$$
, $f(-1) = C$, $f(\infty) = L$, $f(x) = 0$.

我们有如下定理:

定理 $\mathbf{4.4}^{[7]}$ 设 $\kappa > 4$, 假定 γ 为 \mathbb{H} 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$, 则根据定义可知, $\eta = f(\gamma)$ 为 \mathcal{R} 上从 $D = i\pi$ 到 B = L 的弦 $SLE(\kappa)$. 设

$$\tau = \inf\{t > 0: \eta[0,t] \cap [B,C] \neq \emptyset\},$$

则当 $L \to \infty$ 时有

$$P[\gamma[0,\tau] \cap [0,L] = \emptyset] \simeq e^{-(1-\frac{4}{\kappa})}$$
.

事实上, 上述定理有更为一般的形式, 当 $\eta[0,\tau]\cap[0,L]=\emptyset$ (记为事件 E) 时, 可以考虑 $\mathcal{R}_Lackslash K_{\tau}$ 中 $[0,i\pi]$ 到 $[L,L+i\pi]$ 的 π - 极值距离 \mathcal{L} .

定理 **4.5** [7] 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 对任意的 $b \ge 0$, 有

$$\mathrm{E}[1_E \mathrm{e}^{-b\mathcal{L}}] \asymp \mathrm{e}^{-u(\kappa,b)L}$$

其中 $u(\kappa,b) = b + \frac{\kappa - 4 + \sqrt{(\kappa - 4)^2 + 16\kappa b}}{2\kappa}$

注 **4.1** 当 b = 0 时, $u(\kappa, 0) = 1 - \frac{4}{\kappa}$.

考虑共形映射 $f(z): \mathcal{R}_L \to \mathbb{H}$, 满足

$$f(C) = 0$$
, $f(A) = 1$, $f(B) = \infty$, $f(D) = x \in (0, 1)$.

设 $\gamma(t)$ 和 K_t 为 \mathbb{H} 上从 x 到 ∞ 的弦 $SLE(\kappa)$. 记

$$T_0 := \inf\{t > 0 : 0 \in K_t\}, \quad T_1 := \{t > 0 : 1 \in K_t\},$$

 $T = \min\{T_0, T_1\}.$

我们的目标是在 $T=T_0$ 的情形下, 计算 $\mathbb{H}\backslash K_T$ 中 [x,1] 到 $[-\infty,0]$ 的 π - 极值距离. 当 t< T 时, 定义

$$f_t(z) := \frac{g_t(z) - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)},$$

则有 $f_t(0) = 0$, $f_t(1) = 1$. 记 $M_T = \sup\{K_T \cap \mathbb{R}\}$, $N_T = f_T(M_T)$, 于是,

$$\mathcal{L} = (-\infty, 0]$$
 与 $[N_T, 1]$ 在 田 中的 π - 极值距离 = $\log(1 - N_T) + O(1)$.

因此需要需要估计 $\mathrm{E}(1-N_t)^{\lambda}$. 而 $(1-N_t) \asymp (1-x)f_T'(1)$, 从而只需估计 $\mathrm{E}[1_E f_T'^{\lambda}(1)]$.

令 $Z_t(z) := \frac{W_t - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)}$, 定义 $\Lambda(1 - x, b) = \mathbf{E}^x[1_{T_0 < T_1} f_T^{\prime b}(1)]$, 其中 \mathbf{E}^x 表示是从 x 出发的 SLE.

引理 4.1 [7] 采用如上定义,则

$$\Lambda(x,b) = C(b,\kappa) x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_{\kappa}} {}_{2}F_{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_{\kappa}, -\frac{1}{2} + \frac{6}{\kappa} + \hat{b}_{\kappa}, 1 + 2\hat{b}_{\kappa}; x\right), \tag{4.1}$$

其中

$$C(b,\kappa) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{6}{\kappa} + \hat{b}_{\kappa})\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{2}{\kappa} + \hat{b}_{\kappa})}{\Gamma(1 - \frac{4}{\kappa})\Gamma(1 + 2\hat{b}_{\kappa})}, \quad \hat{b}_{\kappa} = \frac{\sqrt{(\kappa - 4)^2 + 16b\kappa}}{2\kappa}.$$
 (4.2)

定理 4.6 [7] 设 $t \ge 0$, 采用同上述定理中的记号. 记

$$\Theta(x,b) = \mathrm{E}^{1-x} [1_{\{T_0 < T_1\}} (1 - N_T)^b],$$

则有

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^b\Lambda(x,b)\leqslant\Theta(x,b)\leqslant x^b\Lambda(x,b).$$

注 4.2 对于射线型 $SLE(\kappa)$, 由于其不具备尺度不变性. 因此, 对于 $z_1, z_2 \in \partial \mathbb{D} \setminus \{1\}$, 一般不能 将 $P(T_{z_1} < T_{z_2})$ 转化为只有一个参量的的微分方程来计算, 因此就比较复杂. 而对带型 SLE, 有一些 结果可参见文献 [12].

4.2 射线 SLE 的分支估计

对于射线型的 SLE(κ) 也有类似弦 SLE(κ) 的估计. 设 $(g_t(z), K_t)_{t \geq 0}$ 为 \mathbb{D} 上的从 1 到 0 的射线型 SLE(κ). 如果 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $e^{ix} \in \partial \mathbb{D} \setminus \{1\}$. $T_x := \inf\{t > 0 : e^{ix} \in K_t\}$. 对 $t < T_x$, 定义 $h_t(x)$ 满足 $g_t(e^{ix}) = e^{ih_t(x)}$ 并且 $h_t(x)$ 连续. 于是,

$$\partial_t g_t(e^{ix}) = g_t(e^{ix}) \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + g_t(e^{ix})}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - g_t(e^{ix})} = e^{ih_t(x)} \frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} + e^{ih_t(x)}}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t} - e^{ih_t(x)}}$$
$$= ie^{ih_t(x)} \cot \frac{h_t(x) - \sqrt{\kappa}B_t}{2} = e^{ih_t(x)} i\partial_t h_t(x).$$

从而有

$$\partial_t h_t(x) = \cot \frac{h_t(x) - \sqrt{\kappa} B_t}{2},$$

并且

$$T_x = \inf\{t > 0 : h_t(x) - \sqrt{\kappa}B_t \in \{0, 2\pi\}\}.$$

令 $f_t(x) = h_{t/\kappa}(x)$, 则有

$$\partial_t f_t(x) = \frac{1}{\kappa} \cot \frac{f_t(x) - \tilde{B}_t}{2},$$

其中 \tilde{B}_t 为标准的一维 Brown 运动. 定义 $a=\frac{2}{\kappa}$, $Y_t:=f_t(x)-B_t$, 则

$$dY_t = \frac{a}{2}\cot\frac{Y_t}{2}dt - dB_t, \quad Y_0 = x.$$

这是一个类 Bessel 过程, 其性质可参见文献 [5, 第 1.10 小节].

定理 **4.7** [5,16] 设 $(g_t, K_t)_{t\geqslant 0}$ 为 \mathbb{D} 中从 1 到 0 的射线型 $SLE(\kappa)$. 记 $A_t = \partial \mathbb{D} \backslash K_t$, 则 A_t 等于 \emptyset 或者为 $\partial \mathbb{D}$ 上的一段圆弧. 对任意的 $b \geqslant 1$, $r \in (0,1)$, 仍记

$$\sigma_r = \inf\{t > 0 : K_t \cap \{|z| = r\} \neq \emptyset\}.$$

设 $\mathcal{L}(r)$ 为 $\mathbb{D}\backslash K_{\sigma_r}$ 中从|z|=r到|z|=1的 π -极值距离. 当 $A_{\sigma_r}=\emptyset$ 时,记 $\mathcal{L}(r)=+\infty$,则当 $r\to 0$ 时有

$$E[e^{-b\mathcal{L}(r)}] \simeq r^{\kappa\lambda},$$

其中 $\lambda = \lambda(\kappa, b) = \frac{1}{16}(8b + \kappa - 4 + \sqrt{(\kappa - 4)^2 + 16b\kappa}).$

4.3 点与 SLE 曲线的关系

由于当 $0 \le \kappa < 8$ 时, \square 上从 0 到 ∞ 的弦 $\mathrm{SLE}(\kappa)$ 是一条从 0 到 ∞ 的曲线, 并且对任意的 $z \in \square \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(z \in \gamma) = 0$, 因此可以考虑点 z 位于曲线 γ 的左侧的概率. 当 γ 为简单曲线时, 赋予 γ 从 0 到 ∞ 的定向. 那么对 $z \notin \gamma$, 如果 z 位于 $\square \setminus \gamma$ 的左连通分支, 则称 z 位于 γ 的左侧. 当 γ 不是简单曲线时, 存在 $t_1 < t_2$ 满足 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, $\gamma[t_1, t_2]$ 为一个简单环路, 并且 z 位于环路将平面分成的有界的连通部分. 此时如果沿着 $\gamma(t_1)$ 到 $\gamma(t_2)$ 的方向, z 位于左侧, 则称 z 位于 γ 的左侧.

定理 4.8 [31] 对任意的 $0 < \kappa < 8$ 和 $z = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$,有

$$P[z 位于 \gamma 的左侧] = C \int_{\frac{x_0}{y_0}}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{4}{\kappa}}} dy,$$

其中

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{4}{\kappa}}} dy}.$$

注 4.3 当 $\kappa = 4$ 时, 以上概率为

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_0}{y_0} \right) = \frac{\arg(z)}{\pi}.$$

注 4.4 由于射线型 $SLE(\kappa)$ 是从 $\mathbb D$ 的边界点到内部点, 因此不能定义位于左边还是右边的概念. 而对带型 $SLE(\kappa)$ 则可以定义和计算 (参见文献 [12]).

5 平面 Brown 运动的相交指数

本节主要介绍平面 Brown 运动的相交指数的定义以及如何利用 SLE(6) 得到平面 Brown 运动的相交指数的具体值.

5.1 平面 Brown 运动的相交指数的定义

有许多方法可以用来定义平面 Brown 运动的相交指数 (参见文献 [32]), 对这里采用如下方法. 对任意的整数 $k \ge 2$, 以及正整数 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, 记 $K = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$. 任意的 $j \in \{1, 2, 3, \ldots, K\}$, 假定 $(B_j(t): j = 1, 2, 3, \ldots, K)$ 为 K 个互相独立的 Brown 运动, 并且其初始分布 $B_j(0)$ 服从 |z| = 1 上的均匀分布. 任取 R > 1, 记 $\tau_j(R) := \inf\{t > 0: |B_j(t)| = R\}$.

令事件 E(R) 为

$$E(R) := \left\{ \left(\bigcup_{i=1}^{p_l} B_{p_{l-1}+i}[0, \tau_{p_{l-1}+i}(R)] \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p_s} B_{p_{s-1}+j}[0, \tau_{p_{s-1}+j}(R)] \right) = \emptyset, \\ \forall l \neq s \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \right\}.$$

记 f(R) = P(E(R)), 则由 Brown 运动的 Markov 性质可以得到 $f(R+T) \leq f(R)f(T)$, 由次可加性可以得到存在 $\xi = \xi(p_1, p_2, \dots, p_k) > 0$ 使得

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\log f(R)}{\log R} = -\xi(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

称 $\xi(p_1, p_2, \dots, p_k)$ 为平面 Brown 运动的全平面相交指数. 如果令 F(R) 为事件

$$F(R) := \left\{ \left(\bigcup_{i=1}^{p_l} B_{p_{l-1}+i}[0, \tau_{p_{l-1}+i}(R)] \right) \subset \mathbb{H}, \forall l \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \right\}.$$

记 $g(R) = P(E(R) \cap F(R))$, 则仍由 Markov 性质可以得到 $g(R+T) \leq g(R)g(T)$. 于是再由次可加性得到存在 $\tilde{\xi}(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k) > 0$ 使得

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\log g(R)}{\log R} = -\tilde{\xi}(p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Lawler 和 Werner [32] 将 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 的定义进行了推广, 使得对任意 $\lambda_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$, $\tilde{\xi}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)$ 均可定义; 以及对任意的 $\lambda_i \geqslant 0$ $(i=1,2,\ldots,k)$, 如果存在 $i \neq j$ 使得 $\lambda_i \geqslant 1$, 则 $\xi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)$ 可定义. 文献 [32] 还利用 Brown 溢出测度给出了相交指数的等价的定义.

定理 $5.1^{[32]}$ 相交指数 ξ 和 $\tilde{\xi}$ 满足如下性质:

- (1) $\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}, \tilde{\xi}(\lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k));$
- (2) $\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}, \tilde{\xi}(\lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k));$
- (3) 对任意的 $\{1, 2, ..., k\}$ 上的置换 σ , 有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \xi(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma(k)}),$$

$$\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \tilde{\xi}(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma(k)}).$$

定理 **5.2** [32] 存在函数 $\eta: [\tilde{\xi}(1,1),\infty) \to [\xi(1,1),\infty)$, 使得对任意的 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k \ge 0$ (满足至少两个不小于 1), 有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \eta(\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)).$$

文献 [32,33] 给出了 $\tilde{\xi}(\lambda_1,1,\lambda_2)$ 和 $\tilde{\xi}(1,\lambda)$ 的刻画. 具体如下.

如果记 \mathcal{B} 为矩阵 $\mathcal{R}_L = [0, L] \times [0, i\pi]$ 上的 Brown 溢出测度 (定义可参见文献 [5]), 记 $B[0, \tau]$ 为其样本轨道. 令事件 $E := \{B(0) \in [0, i\pi], B(\tau) \in [L, L + i\pi]\}$. 在 E 发生的条件下, 记 A_1 和 A_2 分别为 $\mathcal{R}_L \setminus B[0, \tau]$ 的以 $[i\pi, L + i\pi]$ 和 [0, L] 为边界的连通分支. 记 \mathcal{L}_+ 与 \mathcal{L}_- 分别为 A_1 和 A_2 中 $[0, i\pi]$ 和 $[L, L + i\pi]$ 的 π - 极值距离.

定理 5.3 [32,33] 当 $L \to \infty$ 时,有

$$\begin{split} & \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\mathcal{L}_{+}}\mathbf{1}_{E}] \asymp \mathrm{e}^{-L\tilde{\xi}(1,\lambda)}, \\ & \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\lambda_{1}\mathcal{L}_{+}-\lambda_{2}\mathcal{L}_{-}}\mathbf{1}_{E}] \asymp \mathrm{e}^{-L\tilde{\xi}(\lambda_{1},1,\lambda_{2})}. \end{split}$$

同样地, 文献 [32,33] 也给出了 $\xi(1,\lambda)$ 和 $\xi(\lambda_1,1,\lambda_2,1)$ 的刻画. 对 0 < r < 1, 考虑环 $A_r := \{z : r < |z| < 1\}$. 对任意的曲线 $\gamma : [0,T] \to \overline{\mathbb{D}}$, 满足 $|\gamma(0)| = |\gamma(T)| = 1$ 并且 $\gamma(0,T) \subset \mathbb{D}$. 记 $T(r) := \inf\{t > 0 : |\gamma(t)| = r\}$. 令 $\phi(\gamma) := \{\gamma(t) : 0 \le t \le T(r)\}$. 于是, ϕ 将 \mathbb{D} 上的 Brown 溢出测度映为 A_r 上的曲线空间上的测度, 称为环 A_r 上的 Brown 溢出测度.

记 \mathcal{B} 为 A_r 上的 Brown 溢出测度, $B[0,\tau]$ 为其样本轨道. 事件 $E = \{|B(0)| = 1, |B(\tau)| = r\}$, 事件 $F := E \cap \{B[0,\tau]$ 没有将 0 和 ∞ 分离}. 在 F 发生的条件下, 记 O 为 $A_r \setminus B[0,\tau]$ 的与 |z| = 1 和 |z| = r 相交的唯一的连通分支, \mathcal{L} 为 O 中 |z| = 1 与 |z| = r 的 π - 极值距离.

定理 5.4 [32,33] 当 $r \to 0$ 时有

$$E[1_F e^{-\lambda \mathcal{L}}] \simeq r^{\xi(\lambda,1)}.$$

设 $B_1[0,\tau_1]$ 和 $B_2[0,\tau_2]$ 为 A_r 上的两个相互独立的 Brown 溢出测度的样本轨道. 记

$$G := \{B[0, \tau_1] \cap B[0, \tau_2] = \emptyset, |B_1(0)| = |B_2(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = |B_2(\tau_2)| = r\}.$$

在 G 发生的条件下, 存在 $A_r \setminus (B_1[0, \tau_1] \cup B_2[0, \tau_2])$ 的与 |z| = 1 和 |z| = r 相交的连通分支 O_1 和 O_2 . 记 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 为 O_1 和 O_2 中 |z| = 1 与 |z| = r 的 π - 极值距离, 则有下面的定理:

定理 **5.5** [32,33] 当 $r \to 0$ 时,则有

$$\mathrm{E}[1_G \mathrm{e}^{-\lambda_1 \mathcal{L}_1 - \lambda_2 \mathcal{L}_2}] \simeq r^{\xi(\lambda_1, 1, \lambda_2, 1)}.$$

文献 [33] 定义了一种完全共形不变测度, 其满足一定的泛性性质. 正是基于这个思想, 文献 [7,16,34] 利用 SLE(6) 和上述关于相交指数的刻画, 得到了上述相交指数的具体值; 再利用相交指数间的关系, 可以确定相交指数的所有值. 下面详细介绍 SLE 这个强大的工具在平面 Brown 运动的相交指数计算上的的应用.

5.2 上半平面相交指数

首先利用 SLE(6) 计算 $\tilde{\xi}(\frac{1}{3},\lambda)$. 假定 $(\gamma(t),K_t:t\geqslant 0)$ 为矩形 \mathcal{R}_L 上从顶点 $i\pi$ 到顶点 L 的 SLE(6), $B[0,\tau]$ 为 \mathcal{R}_L 上的 Brown 溢出. 二者定义在相同的概率空间上, 并且互相独立. 记 $T:=\inf\{t\geqslant 0:K_t\cap([0,L]\cup[L,L+i\pi])\neq\emptyset\}$, $\mathcal{S}=K_T$. 考虑如下事件:

$$E_1 = \{B(0) \in [0, i\pi], B(\tau) \in [L, L + i\pi]\},$$

$$E_2 = \{K_T \cap [0, L] = \emptyset\},$$

$$E_3 = E_1 \cap E_2 \cap \{K_T \cap B[0, \tau] = \emptyset\}.$$

在 E_1 发生的条件下,记 A_1 和 A_2 分别为 $\mathcal{R}_L \setminus B[0,\tau]$ 的以 $[i\pi, L+i\pi]$ 和 [0,L] 为边界的连通分支.记 \mathcal{L}_+ 和 \mathcal{L}_- 分别为 A_1 和 A_2 中 $[0,i\pi]$ 与 $[L,L+i\pi]$ 的 π - 极值距离,则由对称性可知 \mathcal{L}_+ 和 \mathcal{L}_- 有着相同的分布. 在 E_2 发生的条件下,记 $\mathcal{L}_{sle(6)}$ 为 $\mathcal{R}_L \setminus K_T$ 中 $[0,i\pi]$ 与 $[L,L+i\pi]$ 的 π - 极值距离. 在 E_3 发生的条件下,记 O 为 $\mathcal{R}_L \setminus K_T \cup B[0,\tau]$ 的介于 K_T 与 $B[0,\tau]$ 之间的连通分支, \mathcal{L} 为 O 中 $[0,i\pi]$ 到 $[L,L+i\pi]$ 的 π - 极值距离。下面分两种方法计算 $E[e^{-\lambda \mathcal{L}}1_{E_3}]$.记 E_B 是对 Brown 溢出求对应的期望, $E_{sle(6)}$ 是对 SLE(6) 求期望.

首先在已知 $B[0,\tau]$ 的条件下,由 SLE(6) 的局部性质可得到在 E_3 发生时, K_T 可以看作 A_1 中从 $i\pi$ 出发到 $L+i\pi$ 的 SLE(6) 在碰到 $[L,L+i\pi]$ 停止,并且与 $B[0,\tau]$ 不交. 于是根据定理 4.5 和 5.3 可以得到,当 $L\to\infty$ 时有

$$\mathbf{E}_B[\mathbf{E}_{\mathrm{sle}(6)}[\mathbf{e}^{-\lambda\mathcal{L}}]] \asymp \mathbf{E}[\mathbf{e}^{-u(6,\lambda)\mathcal{L}_+}] \asymp \mathbf{e}^{-L\tilde{\xi}(0,1,u(6,\lambda))}.$$

同时, 在已知 K_T 的条件下, 由 Brown 溢出的限制性质, 如果 E_3 发生, 则 $B[0,\tau]$ 可看作 $\mathcal{R}_L \setminus K_T$ 上的 Brown 溢出. 此时再由对称性可知 \mathcal{L} 与 \mathcal{L}_- 同分布. 于是结合定理 4.5 和 5.3 可得

$$E_{sle(6)}[E_B[e^{-\lambda \mathcal{L}}]] = E_B[E_{sle(6)}[e^{-\lambda \mathcal{L}_-}]]$$

$$= \mathcal{E}_B[e^{-\lambda \mathcal{L}_-} \mathcal{E}_{sle(6)}[1_{E_3}]] \times \mathcal{E}_B[e^{-\lambda \mathcal{L}_- - \frac{1}{3}\mathcal{L}_+}]$$
$$\approx e^{-L\tilde{\xi}(\lambda, 1, \frac{1}{3})}.$$

于是结合 $\tilde{\xi}(0,1,\lambda) = \tilde{\xi}(1,\lambda)$ 以及 $\tilde{\xi}(1,\lambda)$ 关于 λ 的严格单调性 (参见文献 [32]) 可得到 $\tilde{\xi}(\lambda,1,\frac{1}{3}) = \tilde{\xi}(1,u(6,\lambda))$. 从而,

$$\tilde{\xi}\left(\lambda, \frac{1}{3}\right) = u(6, \lambda) = \frac{6\lambda + 1 + \sqrt{1 + 24\lambda}}{6}.$$

定理 5.6 [7] 对任意的 $\lambda \ge 0$, 有

$$\tilde{\xi}\bigg(\lambda,\frac{1}{3}\bigg)=u(6,\lambda)=\frac{6\lambda+1+\sqrt{1+24\lambda}}{6}.$$

利用上述定理以及相交指数的关系 (定理 5.1) 可以得到一系列的相交指数的值. 对任意的 $p \in \mathbb{N}$, 记 $v_p = \frac{1}{6}p(p+1)$, 则有下面的定理.

定理 5.7^[7] 对任意的 $k \ge 2$, 以及非负整数 $p_1, p_2, ..., p_k$, 有

$$\tilde{\xi}(v_{p_1}, v_{p_2}, \dots, v_{p_k}) = \frac{1}{24} ((\sqrt{24v_{p_1} + 1} + \dots + \sqrt{24v_{p_k} + 1} - (k-1))^2 - 1).$$

5.3 全平面相交指数

以上利用矩形 \mathcal{R}_L 中的弦 $\mathrm{SLE}(6)$ 导出了一部分上半平面相交指数的值. 接下来利用射线型 $\mathrm{SLE}(6)$ 计算全平面相交指数的一些值.

设 $B_1[0,\tau_1]$ 和 $B_2[0,\tau_2]$ 为 A_r 上的两个相互独立的 Brown 溢出测度的样本轨道. 记

$$G(r) := \{|B_1(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = r, \$$
没有将 $|z| = 1$ 和 $|z| = r$ 分离 $\},$ $\tilde{G}(r) := \{B_1[0, \tau_1] \cap B_2[0, \tau_2] = \emptyset, |B_1(0)| = |B_2(0)| = 1, |B_1(\tau_1)| = |B_2(\tau_2)| = r\}.$

在 G(r) 发生的条件下,记 O 为 $A_r \backslash B_1[0,\tau]$ 的与 |z| = 1 和 |z| = r 相交的唯一的连通分支, \mathcal{L} 为 O 中 |z| = 1 与 |z| = r 的 π - 极值距离.记 $\Phi: O \to \mathcal{R}_L$ 满足 $\Phi((|z| = 1) \cap \overline{O}) = [0, \mathrm{i}\pi]$, $\Phi((|z| = r) \cap \overline{O}) = [L, L + \mathrm{i}\pi]$.当 $\tilde{G}(r)$ 发生的条件下,存在 $A_r \backslash (B_1[0,\tau_1] \cup B_2[0,\tau_2])$ 的与 |z| = 1 和 |z| = r 相交的连通分支 O_1 和 O_2 .记 \mathcal{L}_1 和 \mathcal{L}_2 为 O_1 和 O_2 中 |z| = 1 与 |z| = r 的 π - 极值距离.此 时对应地有共形映射 $\Phi_i: O_1 \to \mathcal{R}_L$ 满足 $\Phi_i((|z| = 1) \cap \overline{O_i}) = [0, \mathrm{i}\pi]$, $\Phi_i((|z| = r) \cap \overline{O_i}) = [L, L + \mathrm{i}\pi]$ (i = 1, 2).对任意的 $\alpha > 0$,记

$$\mathcal{H}_{\alpha} = G(r) \cap \{ i \in \overline{O}, \Phi(i) \in [i\alpha, i(\pi - \alpha)] \},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha} = \tilde{G}(r) \cap \{ i \in \overline{O}_1, \Phi_1(i) \in [i\alpha, i(\pi - \alpha)] \}.$$

引理 **5.1** [16] 对任意的 $\lambda \geq 0$, 存在序列 $x_n \downarrow 0$ 和 $y_n \downarrow 0$, 使得当 $n \to \infty$ 时有

$$\int_{\mathcal{H}_{\alpha}} e^{-\lambda \mathcal{L}} d\mu_{x_n}(B_1) \approx (x_n)^{\xi(1,\lambda)},$$

$$\int_{\tilde{\mathcal{H}}_{\alpha}} e^{-\mathcal{L}_1 - \lambda \mathcal{L}_2} d\mu_{y_n}(B_1) d\mu_{y_n}(B_2) \approx (y_n)^{\xi(1,1,1,\lambda)},$$

其中 μ_{x_n} 和 μ_{y_n} 代表 A_{x_n} 和 A_{y_n} 上的 Brown 溢出测度.

同样地利用上述引理,结合射线型 SLE(6),可得下面的定理.

定理 $5.8^{[16]}$ 全平面相交指数 $\xi(1,1)$ 的值为

$$\xi(1,1) = \frac{5}{4}.$$

利用同样的方法可以得到:

定理 5.9 [16]

$$\xi(1,1,1,\lambda) = \frac{1}{48}[(11+\sqrt{24\lambda+1})^2 - 4].$$

结合定理 5.2 及 $\tilde{\xi}(1,1)$ 和 $\tilde{\xi}(1,1,1,\lambda)$ 可得到下面的定理:

定理 5.10 [16] 对任意的 $x \ge 7$, 有

$$\eta(x) = \frac{1}{48} [(\sqrt{24x+1} - 1)^2 - 4],$$

其中 $\eta(x)$ 同定理 5.2. 特别地, 对任意的 $m \ge 2$ 以及 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \{\frac{1}{6}l(l+1): l \in \mathbb{N}\}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$, 有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{48} [(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \sqrt{24\lambda_2 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_m + 1} - m)^2 - 4],$$

其中至少有两个 λ_i 不小于 1 并且上式右端大于 $\frac{35}{12}$.

文献 [34,35] 证明了 $\xi(1,\lambda)$ 关于 λ 是解析的, 从而完全确定了平面 Brown 运动的相交指数. 结合 文献 [34,35], 我们总结为如下定理:

定理 5.11 [34] 对任意的 $k \ge 2$, 以及 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \ge 0$, 有

$$\tilde{\xi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \frac{1}{24} [(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_k + 1} - (k-1))^2 - 1].$$

定理 5.12 [34] 对任意的 $m \ge 2$, 以及 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \ge 0$, 如果至少有两个 λ_i 不小于 1, 则有

$$\xi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{48} [(\sqrt{24\lambda_1 + 1} + \sqrt{24\lambda_2 + 1} + \dots + \sqrt{24\lambda_m + 1} - m)^2 - 4].$$

5.4 平面 Brown 运动的一些集合的 Hausdorff 维数

记 B(t) 为一个标准的平面 Brown 运动,自然地,会考虑其作为一条曲线的 Haussdorff 维数. 记 $\mathbb{C}\backslash B[0,t]$ 的无界连通分支为 H_t , 则称 $D_t:=\mathbb{C}\backslash H_t$ 为 Brown 运动生成的紧致包. 称 $F_t:=\partial D_t$ 为 Brown 运动的前沿点 (frontier points). 由于 Brown 运动具有尺度不变性,因此对任意的 r>0, $rF_{\frac{t}{r^2}}$ 与 F_t 同分布,从而 F_{r^2t} 与 F_t 几乎处处有相同的 Hausdorff 维数. Mandelbrot [36] 通过模拟猜测,依概率 1, F_t 的 Hausdorff 维数是 $\frac{4}{3}$. 而利用相交指数,可以严格证明这个猜想. 对 $s\in[0,t]$, 如果 $B(s)\in F_t$,则称 B(s) 为时间 t 的先锋点(pioneer point). 记 P_t 为时间 t 的先锋点的集合,同样由尺度不变性知,几乎处处对任意的 t, P_t 的 Hausdorff 维数一样. 如果 $s\in(0,t)$ 满足 $B[0,s)\cap B(s,t]=\emptyset$,则称 s 为一个割断时间(cutting time),称 B(s) 为 Brown 运动相对于时间 t 的割点(cutting point). 记时间 t 的割点的集合为 C_t ,同样地由尺度不变性知,几乎处处对任意的 t, C_t 的 Hausdorff 维数一样.

定理 5.13 $^{[7,16]}$ 假定 B(t) 为标准的平面 Brown 运动, 对任意的 t>0, 依概率 1, F_t 、 P_t 和 C_t 的 Hausdorff 维数分别为

$$\dim(F_t) = \frac{4}{3}, \quad \dim(P_t) = \frac{7}{4}, \quad \dim(C_t) = \frac{3}{4}.$$

注 5.1 Lawler [37–39] 证明了, 依概率 1, 这 3 个集合的 Hausdorff 维数分别是 $2-\xi(2,0)$ 、 $2-\xi(1,0)$ 和 $2-\xi(1,1)$. 从而结合上一小节的相交指数的公式可以得出其具体值. 需要指出的是, $\xi(1,1)=\frac{5}{4}$ 和 $\xi(1,0)=\frac{1}{4}$ 早先已由 Duplantier 和 Kwon [29] 根据共形场论的知识猜出来, 但是没能严格证明. 所以, 数学上的一些参数可以通过物理上的理论猜出其值, 然后再严格证明.

注 5.2 Mandelbrot 猜想的证明彰显了 SLE 这个工具在解决涉及平面 Brown 运动的问题的强大作用,类似于这样的问题有很多,如文献 [40].

6 离散模型与 SLE

Schramm 建立 SLE 的目的就是为了刻画一些离散模型的尺度极限,本节主要对这些离散模型并对其尺度极限和 SLE 的关系做一些介绍.

定义 6.1 如果 γ_2 是 γ_1 的重新参数化, 则称曲线 $\gamma_1(t):[0,t_{\gamma_1}] \to \mathbb{C}$ 与曲线 $\gamma_2(t):[0,t_{\gamma_2}] \to \mathbb{C}$ 等价, 即存在单调增的同胚 $\theta:[0,t_{\gamma_1}] \to [0,t_{\gamma_2}]$, 使得 $\gamma_1(t)=\gamma_2(\theta(t))$.

定义 6.2 定义 C 为平面上所有等价的曲线类的集合, 即平面上不考虑参数变换的曲线的集合. 对任意的 $\gamma_1, \gamma_2 \in C$, 定义

$$d(\gamma_1,\gamma_2) := \inf_{\{\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2\}} \Big\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\hat{\gamma}_1(t) - \hat{\gamma}_2(t)| \Big\},$$

其中 inf 取遍所有的 $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$, 这里 $\hat{\gamma}_1$ 和 $\hat{\gamma}_2$ 分别是 $\hat{\gamma}_1$ 和 $\hat{\gamma}_2$ 在区间 [0,1] 上的任意参数化表示.

可以验证 d 为 \mathcal{C} 上的度量, 并且由 d 诱导的拓扑与 \mathcal{C} 作为 \mathbb{D} 上的闭集的 Hausdorff 度量下诱导的拓扑一致. 从而, 平面 Brown 运动便诱导了 \mathcal{C} 上的一个概率测度, 其 σ 代数为其 Borel 代数.

引理 **6.1** 任意的 $\kappa \geq 0$, 三种 $SLE(\kappa)$ 的生成曲线诱导了 C 上的概率测度.

这是因为由 SLE 定义的 Loewner 方程知 $B_t \to \gamma(t)$ 是可测映射, 再由 Brown 运动诱导了 $\mathcal C$ 上的概率测度可得 SLE(κ) 也诱导了 $\mathcal C$ 上的概率测度.

定义 6.3 设 (Ω, \mathcal{F}) 为一个可测空间, P 和 P_n 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的一族 Radon (概率) 测度, 如果对任意的 Ω 上的有界连续函数 f, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}fd\mathbf{P}_n=\int_{\Omega}fd\mathbf{P},$$

则称 P_n 弱收敛到 P.

注 6.1 弱收敛有许多等价刻画, 参见文献 [41].

设 G=(V,E) 为一个图, 并且没有平行边和自回路. 记 $x\in V$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 为取值于 V 中的随机点列. 如果 $X_0=x$ 并且

$$P[X_{n+1} = w \mid X_n = v, X_{n-1}, \dots, X_1] = \frac{1_{\{w \sim v\}}}{\deg(v)},$$

其中 $\deg(v)$ 表示与 v 相邻的点的个数, $v \sim w$ 表示 v 与 w 相邻, 则称 (X_n) 为从 x 出发的简单随机游动.

考虑 $G = \delta \mathbb{Z}^2$. 设 $(X_n)_{n \ge 0}$ 为 $G = \delta \mathbb{Z}^2$ 上从 0 出发的简单随机游动. 定义

$$S_n^{\delta} := \sum_{k=0}^n X_k.$$

对任意的 $t \ge 0$. 定义

$$S_t^{\delta} = \sqrt{(t - [t])}(S_{[t]+1} - S_{[t]}) + S_{[t]},$$

于是 $S_t^{\delta}:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ 诱导了 \mathcal{C} 上的概率测度, 则下面的定理成立:

定理 **6.1** (Donsker 不变原理 $^{[42]}$) 当 $\delta \to 0$ 时, $\sqrt{2} S_t^{\delta}$ 弱收敛到平面上的 Brown 运动 B_t . 这是最经典的离散模型收敛到连续极限的例子. 有时称 Brown 运动是简单随机游动的尺度极限.

6.1 临界渗流模型

记 $\mathcal{T} := \{m + n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\}$ 为平面上的三角形格子点, 其中 $v_1, v_2 \in \mathcal{T}$ 相邻当且仅当 $|v_1 - v_2| = 1$. 记 $\Lambda_n := \{k + l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} : k, l \in [-n, n] \cap \mathbb{Z}\}$. 记

$$\Omega := \{ (\omega_v)_{v \in \mathcal{T}} : \omega_v = 1 \not \boxtimes \omega_v = -1 \}.$$

如果 $\omega_{(i,j)}=1$, 称顶点 (i,j) 为黑色的; 如果 $\omega_{(i,j)}=-1$, 称顶点 (i,j) 为红色的. 定义

$$\Omega_n := \{(\omega_v)_{v \in \Lambda_n} : \omega_v = 1 \not \exists \omega_v = -1\}.$$

对任意的 $p \in [0,1]$, 独立地以概率 p 将每一个顶点 $v \in \mathcal{T}$ 染成黑色, 以概率 1-p 将其染成红色. 于是, 这在 Ω_n 上定义了一个概率测度 P_n :

$$P(\omega) = p^{b(\omega)} (1 - p)^{w(\omega)},$$

其中 $\omega \in \Omega_n$, $b(\omega)$ 和 $w(\omega)$ 分别代表 ω 中黑色顶点和红色定点的个数.

下面构造 Ω 上的 σ 代数. 任取 $\omega \in \Omega$ 和 $x \in \mathcal{T}$, 定义 $\omega_x \in \Omega$ 为

$$\omega_x(y) = \begin{cases} -\omega(y), & y = x, \\ \omega(y), & y \neq x. \end{cases}$$

定义 6.4 如果存在有限顶点集 $V \subset T$, 使得对任意的 $\omega \in E$ 和 $x \in T \setminus V$, 有 $\omega_x \in E$, 则称 $E \subset \Omega$ 为柱集, 即 E 仅由 V 中的点决定. 可以验证所有柱集的集合形成一个代数. 记 Ω 上由柱集生成的 σ 代数为 \mathfrak{F} .

对任意的柱集 E, 设 E 仅有 $V \subset \Lambda_n$ 中的点决定. 定义

$$P(E) = P_n(E|_{\Lambda_n}),$$

其中 $E|_{\Lambda_n}$ 表示 E 在 Λ_n 上的限制. 可以证明 P(E) 不依赖于 Λ_n 的选取. 于是, 由概率的唯一扩张定理知, 存在 (Ω,\mathfrak{F}) 上的唯一概率测度, 使得对任意的柱集 E, 如果 E 由 Λ_n 中的点决定, 则

$$P(E) = P_n(E|_{\Lambda_n}).$$

于是我们构造了 (Ω,\mathfrak{F}) 上的概率测度. 在渗流中, 存在临界点:

定理 6.2 [43] 存在 $p_c \in (0,1)$, 使得

- (1) 当 $p > p_c$ 时, 依概率 1 存在唯一的无穷黑色连通分支;
- (2) 当 $p \leq p_c$ 时, 依概率 1 不存在无穷的黑色连通分支.

这里的一个黑色连通分支指的是一组被染成黑色的顶点 $(v_n)_{n\geqslant 0}$, 并且对任意的 n, v_n 和 v_{n+1} 相邻.

定理 6.3 [30] 在三角形格子点的渗流模型中, $p_c = \frac{1}{2}$.

渗流在临界点的状态最难刻画, 因此以下假定 $p = p_c = \frac{1}{2}$.

定理 6.4 [44] 记 Ω 为一个 Jordan 区域, $a,b,c,d \in \partial \Omega$ 为按逆时针排列的 4 个不同的点. 对任意的 $\delta > 0$, 记 $\delta \mathcal{T} := \{\delta z : z \in \mathcal{T}\}$, $\Omega_{\delta} := \Omega \cap \delta \mathcal{T}$. 考虑 Ω_{δ} 上的临界渗流 P_{δ} , 记 $P_{\delta}(\Omega,a,b,c,d)$ 为存在一条连结弧 ab 和弧 cd 的黑色路径的概率, 即存在 Ω_{δ} 中的顶点序列 (v_0,v_1,\ldots,v_n) 满足 v_i $(0 \leq i \leq n)$ 为黑色, 并且 v_0 是距离弧 ab 最近的顶点, v_n 是距离弧 cd 最近的顶点, 则有

- (1) $\lim_{\delta\downarrow 0} P_{\delta}(\Omega, a, b, c, d)$ 存在, 记为 $f(\Omega, a, b, c, d)$;
- (2) f 是共形不变的, 即如果 $\Phi: \Omega \to \Omega'$ 为共形映射, 则有

$$f(\Omega, a, b, c, d) = f(\Omega', \Phi(a), \Phi(b), \Phi(c), \Phi(d));$$

(3) 若 Δ 为一个等边三角形, 其顶点按逆时针方向为 a、b 和 c, 则

$$f(\Delta, a, b, c, d) = \frac{|cd|}{|ab|}.$$

注 6.2 Cardy $^{[45]}$ 首先用共形场论的方法不严格给出了这个猜想, 而 Smirnov $^{[44]}$ 充分利用了 \mathcal{T} 的结构通过离散解析函数的方法给出了这个定理的证明. 正是通过这个结果, Smirnov 证明了渗流上的探索曲线收敛到 SLE(6).

记 Ω 为一个 Jordan 区域, $a,b \in \partial\Omega$, $\Omega_{\delta} = \delta T \cap \Omega$. ab 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 a 到 b 的 弧, ba 表示沿着逆时针方向在 $\partial\Omega$ 上从 b 到 a 的弧. 将与 ab 相邻的 Ω_{δ} 上的顶点染为黑色, 将与 ba 相邻的 Ω_{δ} 上的顶点染为红色, 而 Ω_{δ} 中的其他点分别独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率染成黑色和红色. 对于每一种染色结果, 存在一条曲线 γ^{δ} 连结 a 和 b, 使得 γ^{δ} 右侧的顶点为黑色, 左侧的顶点为红色. 为了使得 γ^{δ} 唯一, 可选取 γ^{δ} 是由 T 的对偶图中的边组成的折线. 称 γ^{δ} 为 Ω_{δ} 上从 a 到 b 的探索曲线. 自然地, γ^{δ} 诱导了 C 上的概率测度. 事实上, 我们有以下结论:

定理 $6.5^{[44,46]}$ 当 δ 趋于 0 时, γ^{δ} 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(6).

6.2 调和探索模型

定理 $6.6^{[47]}$ 当 δ 趋于 0 时, Ω_{δ} 上的调和探索曲线 γ^{δ} 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(4).

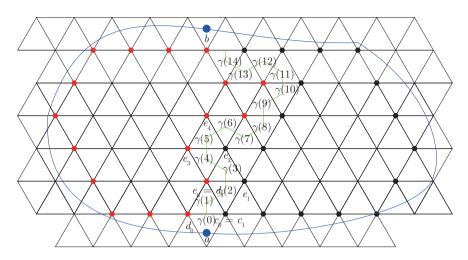


图 3 (网络版彩图) 调和探索

6.3 回路擦除随机游动

设 Ω 为一个 Jordan 区域. 对任意的 $\delta > 0$, 定义 $\Omega_{\delta} = \Omega \cap \delta \mathbb{Z}^2$ (当 δ 足够小时, Ω_{δ} 可成为一个连通图). 任取 $x \in \Omega_{\delta}$, 记 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为从 x 出发的简单随机游动,

$$\tau := \inf\{n : X_n \not\in \Omega_\delta\}.$$

定义 X_n 的回路擦除路径 LE(X) 如下: 定义 $n_0 = 0$; 当 $n < \tau$ 时,

$$n_{i+1} := \max\{n \leqslant \tau : X_n = X_{n_i}\} + 1.$$

定义 $(LE(X))_i = X_{n_i}$. 显然, LE(X) 是一条从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的简单路径, 称为 Ω_δ 上从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的 回路擦除随机游动. 如图 4, 随机游动为 (x_0,\ldots,x_{20}) , 擦除回路后路径为 $(x_0,x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20})$. 如果取 $z \in \Omega$, x 为 Ω_δ 上距离 z 最近的顶点, γ^δ 为 Ω_δ 上从 x 到 $\partial\Omega_\delta$ 的回路擦除随机游动的反向曲线, 那么有下面的定理:

定理 $6.7^{[17]}$ 当 δ 趋于 0 时, γ^{δ} 弱收敛到 Ω 上从 $\partial\Omega$ 到 z 的射线型 SLE(2).

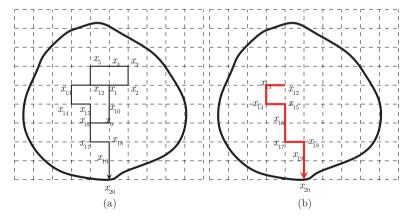


图 4 (网络版彩图) 回路擦除随机游动

6.4 均匀生成树

设 G = (V, E) 为一个连通的有限图, 如果子图 $T \subset G$ 满足: T 是连通的, T 包含 G 的所有顶点并且没有回路, 则称 T 是一个生成树. 如果 (V_{α}, E_{α}) 为 G 的一个子图, 并且是一个树, 对任意的生成树 T, 如果 T 包含 (V_{α}, E_{α}) , 则称 T 为包含 (V_{α}, E_{α}) 的生成树. 如果赋予所有的生成树相同的概率,则称所得到的概率测度为 G 上的均匀生成树. 同样可以定义 G 上包含 (V_{α}, E_{α}) 的均匀生成树.

设 Ω 为一个 Jordan 区域. 对任意的 $\delta > 0$, 定义 $\Omega_{\delta} = \Omega \cap \delta \mathbb{Z}^2$ (当 δ 足够小时, Ω_{δ} 可成为一个连通图). 设 $a,b \in \partial \Omega$. 记弧 ab 为 $\partial \Omega$ 上沿着逆时针方向的从 a 到 b 的弧. 选取 δ 足够小, 可以使与 ab 相邻的 Ω_{δ} 的顶点形成一个树 l_{ab}^{δ} , 设 T 为 Ω_{δ} 上的包含 l_{ab}^{δ} 的均匀生成树, 则有位于 $(\delta(\mathbb{Z})^2)^*$ 中的与 T 对应的对偶树 T^* . 存在唯一一条曲线 γ^{δ} 位于 $\frac{\delta}{\delta} \mathbb{Z}^2 + (\frac{\delta}{\delta}, \frac{\delta}{\delta})$, 连结 a 和 b (如图 5 所示).

定理 $6.8^{[17]}$ 采用以上记号, 当 δ 趋于 0 时, γ^{δ} 弱收敛到 Ω 上从 a 到 b 的弦 SLE(8).

注 6.3 γ^{δ} 遍历了 $\Omega \cap \left[\frac{\delta}{2}\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}\right)\right]$ 的每一个点, 因此, 直观上可以得到 SLE(8) 是填满 Ω 的. 正是由于 SLE(8) 是一列随机曲线的弱极限, Lawler 等 [17] 证明 SLE(8) 是由曲线生成的. 事实上, Lawler 等 [17] 处理的是 Ω 的边界是 C^1 的情形, 但是可以证明对 Jordan 区域也成立.

6.5 离散 Gauss 自由场

一维的 Brown 运动是以 \mathbb{R}_+ 为指标的一族正态随机变量,自然地,是否存在一族正态随机变量,使其指标集合为 2 维的,并且满足类似于 Brown 运动的性质? 2 维的 Gauss 自由场便是满足此条件的随机过程.本小节主要介绍离散的 Gauss 自由场以及其与 SLE 的关系.

给定有限连通图 G = (V, E). $V_{\alpha} \subset V$ 为一个非空的子集. 记

$$\Omega := \{ h : V \to \mathbb{R}, h \mid_{V_{\alpha} = 0} \}.$$

于是, $\Omega \cong \mathbb{R}^{\#V-\#V_{\alpha}}$. 如果记 m 为 Ω 上的 Lebesgue 测度, 赋予 Ω 上的概率测度如下:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dm}(h) \approx e^{-\frac{1}{2}\sum_{(u,v)\in E}(h(u)-h(v))^2},$$

则称服从 P 的分布的随机函数 h 为 G 上的零边值 Gauss 自由场.

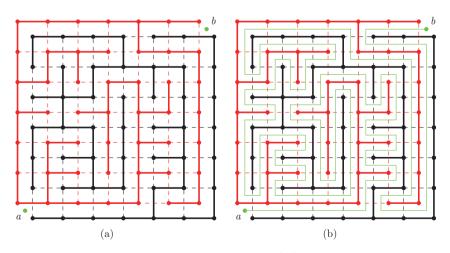


图 5 (网络版彩图) 均匀生成树

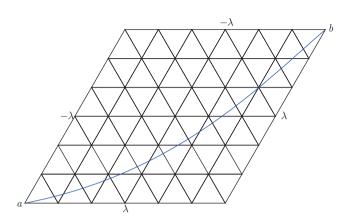


图 6 (网络版彩图) 离散 Gauss 自由场

固定 $h_{\alpha}: V_{\alpha} \to \mathbb{R}$, 可定义

$$\Omega_{h_{\alpha}} := \{ h : V \to \mathbb{R}, h |_{V_{\alpha}} = h_{\alpha} \}.$$

同样可定义 Ω_{ha} 上的概率测度 P_{ha} :

$$\frac{d\mathbf{P}_{h_{\alpha}}}{dm}(h) \asymp \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{(u,v)\in E}(h(u)-h(v))^2}.$$

服从 $P_{h_{\alpha}}$ 分布的随机函数称为 G 上以 h_{α} 为边值的 Gauss 自由场. 设 D 为一个 Jordan 区域, 并且 ∂D 由 \mathcal{T} 中的边组成. 记 $V = \bar{D} \cap \delta \mathcal{T}$, $V_{\alpha} = \partial D \cap \delta \mathcal{T}$, 则任意的 $f: V \to \mathbb{R}$ 可线性扩充为 D 上的映射, 使得在每一个三角形上为仿射变换. 记 $a,b \in \partial D$, ab (ba) 为沿着逆时针方向 ∂D 上从 a (b) 到 b (a) 的 弧. 设 $h_{\alpha}: \partial D \to \mathbb{R}$ 满足 $h_{\alpha}|_{ab} = \lambda > 0$, $h_{\alpha}|_{ba} = -\lambda < 0$. 记 h^{δ} 为 V 上的以 h_{α} 为边值的 Gauss 自由场, 则存在唯一的一条曲线 γ^{δ} 连结 a 和 b, 并且 $h^{\delta}|_{\gamma^{\delta}} = 0$ (如图 6 所示). 于是有下面的定理.

定理 6.9 [48] 采用以上记号, 取 $\lambda = \sqrt{\pi/8}$, 当 δ 趋于 0 时, γ^{δ} 弱收敛到 D 上从 a 到 b 的弦 SLE(4).

7 离散全纯函数与 SLE

Smirnov 获得菲尔兹奖的主要结果是来自他在渗流等统计物理模型方面的研究. 他巧妙地构造了离散全纯函数, 这些离散全纯函数收敛到连续的全纯函数, 从而可以得到关于离散模型的尺度极限的许多信息. 本节主要介绍离散全纯函数及其应用. 本节内容可参见文献 [49, 第 八 章] 或者 [50].

7.1 离散调和函数

考虑格子点 $\mathbb{Z}^2 := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Z}\}.$ 如果函数 $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ 满足

$$(\Delta f)(x) := \frac{1}{4} \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] = 0,$$

则称 f 在 x 处调和, 其中 $y \sim x$ 表示 y 与 x 相邻. 这是连续调和函数的均值公式的离散情形. 如果 f 在 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 中的任一点调和, 则称 f 为 D 上的调和函数. 如果 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个子图, 记

$$\partial D := \{ x \in \mathbb{Z}^2 : d(x, D) = 1 \},$$

其中 d 是 \mathbb{Z}^2 上的图距离.

定理 7.1 如果 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个连通的有限子图, $g: \partial D \to \mathbb{R}$, 则存在唯一的函数 $f: D \cup \partial D \to \mathbb{R}$ 满足

$$\Delta f(x) = 0, \quad \forall x \in D, \quad f|_{\partial D} = g.$$

注 7.1 事实上也可用简单随机游动的方法来证明. 假定 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是从 $X_0=x$ 出发的简单随机游动.

$$\tau := \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in \partial D\},\$$

则可验证 $f(x) := E[q(X_{\tau})]$ 便是所求的函数.

注 7.2 对任意的 $\delta > 0$, 同样可定义 $\delta \mathbb{Z}^2$ 上的调和函数. 可用线性插值的方法将 $\delta \mathbb{Z}^2$ 上的函数 连续扩充到整个平面上, 如无特别说明, 我们将二者等价.

定理 7.2 [49,50] 假定 D 为一个 Jordan 区域, $D_{\delta} = D \cap \delta \mathbb{Z}^2$. g 为 ∂D 的某个小邻域上的连续函数, 如果记 $g_{\delta} = g|_{\partial D_{\delta}}$, 由前一定理知存在 D_{δ} 上以 g_{δ} 为边值的调和函数 f_{δ} , 则当 $\delta \to 0$ 时, f_{δ} 在 D中内闭一致收敛到 D 上以 g 为边值的调和函数.

7.2 离散 Green 函数

假定 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为一个连通子图. 固定 $x \in D$, 则存在唯一的函数 $G_D(x,\cdot): D \cup \partial D \to \mathbb{R}$, 满足

$$\Delta G_D(x,\cdot)(y) = -\delta_x(y), \quad G_D(x,\cdot)|_{\partial D} \equiv 0,$$

这可由算子 Δ 的单射性直接得到. 称 $G_D(x,y)$ 为 D 上的离散 Green 函数.

注 7.3 假定 $(X_n)_{n\geq 0}$ 是从 $X_0 = x$ 出发的简单随机游动,

$$\tau := \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in \partial D\},\$$

则利用随机游动的 Markov 性质可证明

$$G_D(x,y) = \mathbf{E}^x \left[\sum_{n=0}^{\tau-1} 1_{\{X_n = y\}} \right].$$

引理 $7.1^{[49]}$ 若 Green 函数 G_D 定义如上,则

$$G_D(x,y) = G_D(y,x).$$

7.3 离散全纯函数

采用如下记号:

$$\begin{split} \mathbb{Z}^2 &= \{(x,y): x \in \mathbb{Z}, \, y \in \mathbb{Z}\}, \\ (\mathbb{Z}^2)^* &= \left\{(x,y): x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \, y \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right\}, \\ (\mathbb{Z}^2)^\diamond &= \left\{(x,y): x \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \, y \in \mathbb{Z} \, \, \vec{\boxtimes} \, \, x \in \mathbb{Z}, \, y \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right\}, \end{split}$$

其中上述 3 个图中的边均由 Euclid 距离最近的顶点连接而成. 可以看出 (\mathbb{Z}^2)* 是 \mathbb{Z}^2 的对偶图, 而 (\mathbb{Z}^2)° 是将 \mathbb{Z}^2 旋转 45 度再平移所得. 称这 3 个图分别为本原图、对偶图和中间图. 将本原图中顶点染为黑色, 对偶图中的顶点染为红色, 参见图 7. 如果中间图的面包含一个黑色顶点, 则将其按逆时针

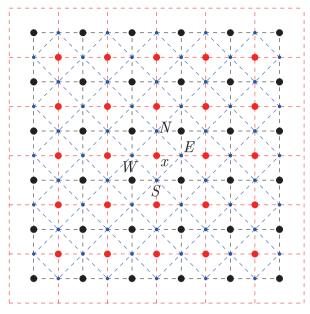


图 7 (网络版彩图) 三个格点图

定向: 如果中间图的面包含一个红色的顶点, 则将其按顺时针定向.

在复变函数中, 如果 f 为 \mathbb{C} 上的全纯函数, 则对任意的单位向量 α , 有

$$\partial_{i\alpha} f = i\partial_{\alpha} f$$
.

类似地, 对函数 $f:(\mathbb{Z}^2)^{\circ}\to\mathbb{C}$, 以及 $x\in\mathbb{Z}^2\cup(\mathbb{Z}^2)^*$, 按上北、下南、左西、右东给 x 所在的 $(\mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 中的面 4 个顶点标记为 N、S、W 和 E (参见图 7).

定义

$$\overline{\partial} f(x) := \frac{1}{2} [f(E) - f(W) + \mathrm{i}(f(N) - f(S))].$$

如果 $\overline{\partial} f(x) = 0$, 则称 f 在 x 处为离散全纯的. 如果对任意的 $x \in \mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$, $\overline{\partial} f(x) = 0$, 则称 f 为 $(\mathbb{Z}^2)^{\diamond}$ 上的离散全纯函数.

注 7.4 由于 $(\mathbb{Z}^2)^\circ$ 的图结构与 $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$ 一样, 类似可以定义 $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2)^*$ 上的离散全纯函数. 同样对任意的 $\delta > 0$. 可定义 $\delta(\mathbb{Z}^2)^\circ$ 上的离散全纯函数.

定理 7.3 [49] 如果 $f, g: (\mathbb{Z}^2)^{\diamond} \to \mathbb{C}$ 是离散全纯函数, 则

- (1) 对任意的 $a, b \in \mathbb{C}$, af + bg 为 (\mathbb{Z}^2) $^{\diamond}$ 上的离散全纯函数;
- (2) 在一种新的算子 $\tilde{\Delta}$ 下, f 为离散调和的;
- (3) 如果 \mathcal{C} 为 \mathbb{Z}^2 或者 (\mathbb{Z}^2)* 上的多边形, 对应的顶点按顺序记为 $z_0,\ldots,z_n=z_0$, 则

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right) (z_{i+1} - z_i) = 0;$$

- (4) 如果 f_{δ} 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 上的离散全纯函数, 且内闭一致收敛到 f, 则 f 为连续全纯函数.
- (1) 是显然的. 任取 $x \in \delta(\mathbb{Z}^2)^{\circ}$, 记 $nw \setminus ne \setminus se$ 和 sw 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 中与 x 相邻的 4 个顶点, 而 $n \setminus e \setminus se$ 和 w 为 $\delta(\mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 中与 x 距离为 1 的 4 个顶点 (自然方向). 于是,

$$\tilde{\Delta}f(x) := \frac{1}{4}([f(n) - f(x)] + [f(w) - f(x)] + [f(e) - f(x)] + [f(s) - f(x)])$$

$$= \frac{i}{4}([f(ne) - f(nw)] + [f(nw) - f(sw)] + [f(se) - f(ne)] + [f(sw) - f(se)])$$

$$= 0.$$

这证明了 (2). 对于 (3), 由离散全纯函数的定义可得, 在 \mathbb{Z}^2 或者 (\mathbb{Z}^2)* 上的任意一个面 $\mathcal{C} = z_0 \sim z_1 \sim z_2 \sim z_3 \sim z_4 = z_0$ 上有 $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz := \sum_{i=0}^{3} f(\frac{z_i + z_{i+1}}{2})(z_{i+1} - z_i) = 0$. 从而, 由于任意的多边形可表示为有限个面的并, 因此, (3) 对任意的面成立. 由 (3) 知, 对任意的多边形 γ , 有 $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$, 从而, 由复分析中的知识知 f 为全纯的.

除了离散全纯函数, Smirnov 还引入了旋 - 全纯函数 (spin-holomorphic function). 具体定义如下: 对中间图的任意一条边 e, 此时由于已经定向, 可将 e 看成一个复数. 记 l(e) 为经过原点和 \sqrt{e} 的直线, 以 $P_{l(e)}$ 表示直线 l(e) 上的投影映射: $P_l(x) = \alpha \Re(\bar{\alpha}x) = \frac{1}{2}(x + \alpha^2 \bar{x})$, 其中 α 为直线 l 所对应的单位向量.

定义 7.1 如果函数 $f:(\delta\mathbb{Z}^2)^{\diamond}\to\mathbb{C}$ 满足对任意的边 e=[xy] 有

$$P_{l(e)}f(x) = P_{l(e)}f(y),$$

则称 f 为旋 - 全纯函数或者 s- 全纯函数. 同样可定义 $(\delta \mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 的子图上的 s- 全纯函数.

命题 7.1 $^{[49,50]}$ 任意 $(\delta \mathbb{Z}^2)^{\circ}$ 上的 s- 全纯函数也是离散全纯的.

s- 全纯函数的引入很大程度上是因为积分 $\int^z f^2$ 有对应的离散化表示. s- 全纯函数与三类边值问题有着很大的联系,同时像离散调和函数那样,满足一定的条件下,其收敛到连续情形的边值问题. 为了直接介绍 s- 全纯函数在 SLE 中的应用,我们此处省略这部分的说明,具体可以参见文献 [49, 第 8.3 小节].

7.4 FK-Ising 模型

本小节主要介绍 FK-Ising 模型与 SLE 的关系. FK-Ising 模型是随机簇模型的一种特殊情形. 对随机簇模型的详尽描述可参见文献 [51]. 假定 Ω 是一个 Jordan 区域, $a \neq b \in \partial \Omega$, 记 ∂_{ab} 为 $\partial \Omega$ 上从 a 沿着逆时针方向到 b 的弧, ∂_{ba} 为 $\partial \Omega$ 上从 a 沿着顺时针方向到 b 的弧. 定义 $\Omega_{\delta} = (V_{\delta}, E_{\delta})$ 为 $\delta \mathbb{Z}^2$ 的如下子图: $V_{\delta} = V_{1} \cup V_{2}$, 其中 $V_{1} = \Omega \cap \delta \mathbb{Z}^2$, V_{2} 为与 ∂_{ba} 距离最近的并且不在 Ω 中的顶点, E_{δ} 为连接 V_{δ} 中的顶点的边. 记 a_{δ} 和 b_{δ} 分别为距离 a 和 b 最近的并且不在 Ω 中的 $\delta \mathbb{Z}^2$ 中的点. 当 δ 足够小时,可知 $\partial \Omega_{\delta}$ 为一条闭的简单折线,并且 $a_{\delta}, b_{\delta} \in \partial \Omega_{\delta}$. 记 ∂_{ab}^{δ} 为 $\partial \Omega_{\delta}$ 上的从 a_{δ} 按逆时针方向到 b_{δ} 的边, ∂_{ba}^{δ} 为 $\partial \Omega_{\delta}$ 上的从 a_{δ} 按顺时针方向到 b_{δ} 的边.

同样可定义对偶图 $\Omega_{\delta}^* = (V_{\delta}^*, E_{\delta}^*)$ 为 $(\delta \mathbb{Z}^2)^*$ 的如下子图: $V_{\delta}^* = V_1^* \cup V_2^*$, 其中 $V_1^* = \Omega \cap (\delta \mathbb{Z}^2)^*$, V_2^* 为与 ∂_{ab} 距离最近的并且不在 Ω 中的顶点, E_{δ}^* 为连接 V_{δ}^* 中的顶点的边. 记 a_{δ}^* 和 b_{δ}^* 分别为距离 a 和 b 最近的并且不在 Ω 中的 $(\delta \mathbb{Z}^2)^*$ 中的点. 当 δ 足够小时, 可知 $\partial \Omega_{\delta}^*$ 为一条闭的简单折线, 并且 $a_{\delta}^*, b_{\delta}^* \in \partial \Omega_{\delta}^*$. 记 $(\partial_{ab}^{\delta})^*$ 为 $\partial \Omega_{\delta}^*$ 上的从 a_{δ}^* 按逆时针方向到 b_{δ}^* 的边, $(\partial_{ba}^{\delta})^*$ 为 $\partial \Omega_{\delta}^*$ 上的从 a_{δ}^* 按顺时针方向到 b_{δ}^* 的边.

同样可定义中间图 $\Omega_{\delta}^{\circ} = (V_{\delta}^{\circ}, E_{\delta}^{\circ})$, 其中 $V_{\delta}^{\circ} = \Omega \cap (\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$, E_{δ}° 为连接 V_{δ}° 中的顶点的边. 记 a_{δ}° 和 b_{δ}° 分别为距离 a 和 b 最近的并且不在 Ω 中的 $(\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$ 中的点. 当 δ 足够小时, 可以得到存在 $(\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$ 中的边 e_{a} 指向 a_{δ}° , 并且 a_{δ} 和 a_{δ}^{*} 分别位于以 e_{a} 为边的 $(\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$ 的面中, 存在 $(\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$ 中的边 e_{b} 从 b_{δ}° 出发, 并且 b_{δ} 和 b_{δ}^{*} 分别位于以 e_{b} 为边的 $(\delta \mathbb{Z}^{2})^{\circ}$ 的面中. 以上 3 个图的构造通过图 8 可清晰看出.

采用以上记号, δ 足够小, 定义 $\Omega_{\delta} = (V_{\delta}, E_{\delta})$ 上的以 $(p,q)_{0 \leq p \leq 1, q > 0}$ 为参数的随机簇模型如下. 记

$$\mathcal{S} := \{ \omega : E_{\delta} \to \{0, 1\}, \omega \mid_{\partial_{ba}^{\delta}} = 1 \}.$$

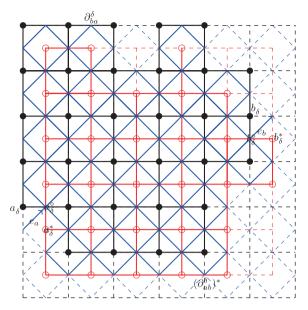


图 8 (网络版彩图) 原图和对偶图. 黑色、红色和蓝色的实线边对应的图分别为 Ω_δ 、 Ω_δ^* 和 Ω_δ°

对任意的 $\omega \in \mathcal{S}$, 记 $o(\omega) = \#\{e \in E_{\delta} : \omega(e) = 1\}$, $c(\omega) = \#\{e \in E_{\delta} : \omega(e) = 0\}$. 通常如果 $\omega(e) = 1$, 则称 e 是开的; 如果 $\omega(e) = 0$, 则称 e 是闭的. $(V_{\delta}, \{e \in E_{\delta} : \omega(e) = 1\})$ 为 Ω_{δ} 的子图, 其连通分支数记为 $k(\omega)$. 定义 \mathcal{S} 上的如下概率测度为参数为 (p,q) 的随机簇模型:

$$P(\omega) = \frac{1}{Z_{p,q}} p^{o(\omega)} (1 - p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)},$$

其中

$$Z_{p,q} = \sum_{\omega \in S} p^{o(\omega)} (1-p)^{c(\omega)} q^{k(\omega)}.$$

同样定义

$$S^* := \{ \omega : E_\delta^* \to \{0, 1\}, \omega |_{(\partial_{ab}^\delta)^*} = 1 \}.$$

在给定 $\omega \in \mathcal{S}$ 之后, 对应地可定义 $\omega^* \in \mathcal{S}^*$ 如下: 如果 $e^* \notin (\partial_{ab}^{\delta})^*$, 定义 $\omega^*(e^*) = 1 - \omega(e)$, 其中 e 是与 e^* 对偶的边; 如果 $e^* \in (\partial_{ab}^{\delta})^*$, 定义 $\omega^*(e^*) = 1$.

在给定 $\omega \in \mathcal{S}$ 后, 存在唯一的由 E_{δ}° 中的定向线段组成的折线 γ_{δ} 连接 a_{δ}° 和 b_{δ}° , 并且将 $\{V_{\delta}, \{e \in E_{\delta} : \omega(e) = 1\}\}$ 中 ∂_{ba}^{δ} 所在的连通分支和 $V_{\delta}^{*}\{e^{*} \in E_{\delta}^{*} : \omega^{*}(e^{*}) = 1\}$ 中 $(\partial_{ab}^{\delta})^{*}$ 所在的连通分支分离开, 具体参见图 9, 图中蓝色的折线即为 γ_{δ} .

定义 7.2 任取 $e \in E_{\delta}^{\diamond}$, 定义自旋函数如下:

$$F_{\delta}(e) := \mathrm{E}[1_{\{e \in \gamma_{\delta}\}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{1}{2} W_{\gamma_{\delta}}(e, e_b)}],$$

其中 E 是对随机簇模型的概率 P 求期望, $W_{\gamma_{\delta}}(e,e_b)$ 是 e 沿着 γ_{δ} 到 e_b 的环绕数 (winding number). 以下假定 $q=2, p=\frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$, 此时称对应的随机簇模型为 FK-Ising 模型. 对任意的 $v\in V_{\delta}^{\diamond}\setminus\partial\Omega_{\delta}^{\circ}$, 定义

$$F_{\delta}(v) := \frac{1}{2} \sum_{u \sim v} F_{\delta}([uv]),$$

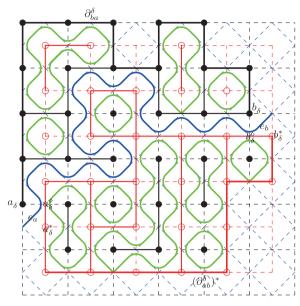


图 9 (网络版彩图) FK-Ising 模型

对任意的 $v \in \partial \Omega_{\delta}^{\diamond}$, 定义

$$F_{\delta}(v) := \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \sum_{u \in v} F_{\delta}([uv]),$$

其中 [uv] 表示以 u 和 v 为端点的边.

证明离散的模型收敛到 SLE 一般有两种方法,一种是直接证明离散的随机曲线的驱动函数收敛到 Brown 运动然后再加强为曲线的收敛, LERW 和一致生成树就是采用这种方法; 另外一种是, 先说明离散的曲线是胎紧的 (即任意的随机曲线子列都有收敛的子列), 然后证明所有的极限都是同一个 SLE, 此时只需借助一些特定的参数收敛就可证明所得到的极限即为 SLE, 临界渗流就是采用这种方法.

Smirnov 正是基于构造的自旋函数的收敛, 利用上述第二种方法证明了 FK-Ising 模型收敛到 SLE(导). 我们将结果陈述如下:

定理 7.4 [49] 采用如上记号,则有

- (1) $\frac{1}{\sqrt{e_{\delta}}}F_{\delta}$ 为 $\Omega_{\delta}^{\diamond}$ 上的 s- 全纯函数;
- (2) 当 $\delta \to 0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{e_b}}F_\delta$ 在 Ω 上内闭一致收敛到 $\sqrt{\phi}$, 其中 $\phi: \Omega \to \mathbb{R} \times (0,1), \phi(a) = -\infty$, $\phi(b) = +\infty$;
 - (3) 同上一节的弱收敛的定义一样, 当 $\delta \to 0$ 时, γ_{δ} 弱收敛到 Ω 上从 α 到 δ 的 SLE($\frac{16}{3}$).

注 7.5 Smirnov 同样在 Ising 模型中发展了同以上关于 FK-Ising 模型一样的方法, 从而证明了临界 Ising 模型的临界曲线收敛到 SLE(3), 具体可参见文献 [49].

8 研究现状和待研究问题

目前作为一个交叉领域, SLE 是一个非常热门的前沿方向, Schramm [52] 以其广阔的视野在 2006年的世界数学家大会上详细列出了与 SLE 相关的问题. 可以说, 目前有关 SLE 的研究的主要问题基本还是包含在 Schramm [52] 列出的框架下. 这里主要总结其研究现状和一些主要的与之相关的问题.

我们主要列举三类问题.

第一类问题是 Loewner 方程的研究. 由于给定驱动函数, Loewner 方程的解不一定由一条曲线生成, 能否给出一个由曲线生成的充分必要条件? 如果由曲线生成, 能否给出一个由简单曲线生成的充要条件. 这些问题目前都未解决, 难点在于对 Loewner 方程做出极其精细的估计. 驱动函数和生成曲线的性质的研究主要可参见文献 [8,53–55]. 除此之外, 基于 Loewner 方程定义的 "Loewner energy" 与复分析中的 Teichmuller 理论也有着紧密的联系, 相关结果和问题参见文献 [55–58].

第二类问题是关于 Gauss 自由场和 SLE 的关系的研究. SLE 作为 Gauss 自由场的 "flow line",可由 Gauss 自由场所确定 (参见文献 [27,59-61]),同时又可以作为 Gauss 自由场的 "level set" (参见文献 [62]),因此可借助 Gauss 自由场来研究 SLE,例如,利用 Gauss 自由场可以确定 SLE 曲线上的割点的维数 (参见文献 [63]). Miller 和 Sheffield 通过研究随机图上的随机模型定义了 QLE (quantum Loewner evolution)来描述生长模型的尺度极限,并给出了与 Brown 图 (Brownian map) 的关系. 二人与其合作者在这方面取得了许多结果和进展,同时还有许多这方面的问题有待解决,具体可参见这些作者的文献,在此不一一列出.

第三类问题是关于离散模型收敛到 SLE 的问题. 其中最著名的是自回避随机游动 (self avoiding walk, SAW) 收敛到 SLE($\frac{8}{3}$) 的问题, 具体可参见文献 [64]. 由于自回避随机游动严格依赖于整个路径, 这就造成了局部分析上的困难. 在第 6 节, 我们看到许多离散模型的尺度极限是 SLE, 但是这些模型依赖于格子点的选取, 例如, 渗流模型选取的是三角形格子点, 而 FK-Ising 模型选取的是 \mathbb{Z}^2 (更一般地, 等周图 (isoradial graph) 上), 物理上的理论和模拟显示, 这些模型的尺度极限具有"普适性", 即不依赖于格子点的选取, 但是目前数学上还没有任何一种严格的方法来证明普适性.

致谢 作者十分感谢审稿人仔细审阅并提出许多宝贵的建议.

参考文献 -

- 1 De Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math, 1985, 154: 137–152
- 2 Conway J B. Functions of One Complex Variable II. New York: Springer, 1995
- 3 Ahlfors L V. Complex Analysis. Boston: McGraw-Hill, 1979
- 4 李忠. 复分析导引. 北京: 北京大学出版社, 2006
- 5 Lawler G F. Conformally Invariant Processes in the Plane, Volume 114. Providence: Amer Math Soc, 2008
- 6 Lind J R, Rohde S. Loewner curvature. Math Ann, 2016, 364: 1517-1534
- 7 Lawler G F, Schramm O, Werner W. Values of Brownian intersection exponents, I: Half-plane exponents. In: Selected Works of Oded Schramm. New York: Springer, 2011, 859–895
- 8 Marshall D E, Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings. J Amer Math Soc, 2005, 18: 763–778
- 9 Ivanov G, Prokhorov D, Vasil'ev A. Non-slit and singular solutions to the Löwner equation. Bull Sci Math, 2012, 136: 328–341
- 10 Wu H H, Dong X H. Driving functions and traces of the Loewner equation. Sci China Math, 2014, 57: 1615-1624
- 11 Loewner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. Math Ann, 1923, 89: 103-121
- 12 Zhan D P. Random Loewner chains in Riemann surfaces. PhD Thesis. Pasadena: California Institute of Technology, 2004
- 13 Schramm O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J Math, 2000, 118: 221–288
- 14 Revuz D, Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion, Volume 293. New York: Springer, 1999
- Rohde S, Schramm O. Basic properties of SLE. In: Selected Works of Oded Schramm. New York: Springer, 2011, 989–1030
- 16 Lawler G F, Schramm O, Werner W. Values of Brownian intersection exponents, II: Plane exponents. Acta Math, 2001, 187: 275–308
- 17 Lawler G F, Schramm O, Werner W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. In: Selected Works of Oded Schramm. New York: Springer, 2011, 931–987
- 18 Alvisio M, Lawler G F. Note on the existence and modulus of continuity of the SLE(8) curve. Metrika, 2014, 77: 5-22

- 19 Lawler G F. Fractal and multifractal properties of Schramm-Loewner evolution. In: Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings, vol. 15. Providence: Amer Math Soc, 2012, 277–318
- 20 Lawler G F. Continuity of radial and two-sided radial SLE at the terminal point. In: In the Tradition of Ahlfors-Bers, VI. Contemporary Mathematics, vol. 590. Providence: Amer Math Soc, 2013, 101–124
- 21 $\,$ Beffara V. The dimension of the SLE curves. Ann Probab, 2008, 36: 1421–1452
- 22 Lawler G, Schramm O, Werner W. Conformal restriction: The chordal case. J Amer Math Soc, 2003, 16: 917-955
- 23 Han Y, Wang Y F, Zinsmeister M. SLE intersecting with random hulls. C R Math Acad Sci Paris, 2019, 357: 395–400
- 24 Wu H. Conformal restriction: The radial case. Stochastic Process Appl, 2015, 125: 552–570
- 25 Qian W. Conformal restriction: The trichordal case. Probab Theory Related Fields, 2018, 171: 709-774
- 26 Zhan D. Reversibility of chordal SLE. Ann Probab, 2008, 36: 1472-1494
- 27 Miller J, Sheffield S. Imaginary geometry III: Reversibility of SLE_{κ} for $\kappa \in (4, 8)$. Ann of Math (2), 2016, 184: 455–486
- 28 Zhan D. Duality of chordal SLE. Invent Math, 2008, 174: 309-353
- 29 Duplantier B, Kwon K H. Conformal invariance and intersections of random walks. Phys Rev Lett, 1988, 61: 2514–2517
- 30 Smirnov S, Werner W. Critical exponents for two-dimensional percolation. Math Res Lett, 2001, 8: 729-744
- 31 Schramm O. A percolation formula. Electron Commun Probab, 2001, 6: 115-120
- 32 Lawler G F, Werner W. Intersection exponents for planar Brownian motion. Ann Probab, 1999, 27: 1601–1642
- 33 Lawler G F, Werner W. Universality for conformally invariant intersection exponents. J Eur Math Soc (JEMS), 2000, 2: 291–328
- 34 Lawler G F, Schramm O, Werner W. Values of Brownian intersection exponents III: Two-sided exponents. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2002, 38: 109–123
- 35 Lawler G F, Schramm O, Werner W. Analyticity of intersection exponents for planar Brownian motion. Acta Math, 2002, 189: 179–201
- 36 Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman and Company, 1982
- 37 Lawler G F. The dimension of the Frontier of planar Brownian motion. Electron Commun Probab, 1996, 1: 29–47
- 38 Lawler G F. Hausdorff dimension of cut points for Brownian motion. Electron J Probab, 1996, 1: paper no. 2, 20 pp.
- 39 Lawler G F. Geometric and fractal properties of Brownian motion and random walk paths in two and three dimensions (Budapest, 1998). Random Walks, 1999, 9: 219–258
- 40 Han Y, Wang Y F, Zinsmeister M. On the Brownian loop measure. J Stat Phys, 2019, 175: 987-1005
- 41 Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley & Sons, 2013
- 42 Donsker M D. An invariant principle for certain probability limit theorems. Mem Amer Math Soc, 1951, 6: 1-12
- 43 Grimmett G R. Percolation. New York: Springer, 1989
- 44 Smirnov S. Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. C R Acad Sci Paris Ser I Math, 2001, 333: 239–244
- 45 Cardy J L. Critical percolation in finite geometries. J Phys A, 1992, 25: 201–206
- 46 Camia F, Newman C M. Critical percolation exploration path and SLE_6 : A proof of convergence. Probab Theory Related Fields, 2007, 139: 473–519
- 47 Schramm O, Sheffield S. Harmonic explorer and its convergence to SLE₄. Ann Probab, 2005, 33: 2127–2148
- 48 Schramm O, Sheffield S. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field. Acta Math, 2009, 202: 21–137
- 49 Duminil-Copin H. Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models. Ensaios Mat, 2013, 25: 1–371
- 50 Duminil-Copin H, Smirnov S. Conformal invariance of lattice models. In: Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions. Clay Mathematics Proceedings, vol. 15. Providence: Amer Math Soc, 2012, 213–276
- 51 Grimmett G R. The Random-Cluster Model, Volume 333. New York: Springer, 2006
- 52 Schramm O. Conformally Invariant Scaling Limits: An Overview and a Collection of Problems. New York: Springer, 2011
- 53 Lind J R. Hölder regularity of the SLE trace. Trans Amer Math Soc, 2008, 360: 3557-3578
- 54 Lind J, Marshall D E, Rohde S. Collisions and spirals of Loewner traces. Duke Math J, 2010, 154: 527–573
- 55 Rohde S, Wang Y L. The Loewner energy of loops and regularity of driving functions. Int Math Res Not IMRN, 2019, doi: 10.1093/imrn/rnz071
- Friz P K, Shekhar A. On the existence of SLE trace: Finite energy drivers and non-constant κ . Probab Theory Related Fields, 2017, 169: 353–376
- 57 Wang Y L. The energy of a deterministic Loewner chain: Reversibility and interpretation via SLE₀₊. J Eur Math Soc (JEMS), 2019, 21: 1915–1941
- 58 Wang Y L. Equivalent descriptions of the Loewner energy. Invent Math, 2019, 218: 573-621

- 59 Miller J, Sheffield S. Imaginary geometry I: Interacting SLEs. Probab Theory Related Fields, 2016, 164: 553-705
- 60 Miller J, Sheffield S. Imaginary geometry II: Reversibility of $SLE_{\kappa}(\rho_1; \rho_2)$ for $\kappa \in (0, 4)$. Ann Probab, 2016, 44: 1647–1722
- 61 Miller J, Sheffield S. Imaginary geometry IV: Interior rays, whole-plane reversibility, and space-filling trees. Probab Theory Related Fields, 2017, 169: 729–869
- 62 Wang M L, Wu H. Level lines of Gaussian free field I: Zero-boundary GFF. Stochastic Process Appl, 2017, 127: 1045–1124
- 63 Miller J, Wu H. Intersections of SLE Paths: The double and cut point dimension of SLE. Probab Theory Related Fields, 2017, 167: 45–105
- 64 Lawler G F, Schramm O, Werner W. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. Mathematics, 2002, 2: 339–364

An introduction to the stochastic Loewner evolution

Yong Han & Yuefei Wang

Abstract This expository article gives an introduction to the stochastic Loewner evolution (SLE). SLE, introduced by Oded Schramm in around 2000, is a one-parameter family of conformal invariant measures on random curves, and is closely related to complex analysis, conformal geometry, fractal geometry and stochastic analysis, etc., with particularly important applications in statistical physics.

Keywords SLE, Brownian motion, Loewner equation, capacity, driven function, intersection exponent, discrete model, discrete holomorphic function

MSC(2010) 60J67, 30C35, 28A80, 60J65, 60K35

doi: 10.1360/SSM-2019-0246