考虑未知输入的异构集群系统群体智能合围跟踪控制

王林波¹, 王蒙一^{1*}, 周思全¹, 江涌², 化永朝³, 董希旺^{3,4}

1. 北京电子工程总体研究所, 北京 100854;

2. 中国长峰机电技术研究设计院, 北京 100854;

3. 北京航空航天大学人工智能研究院, 北京 100191;

4. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100083

*E-mail: wmy_casic@163.com

收稿日期: 2021-08-14; 接受日期: 2021-11-04; 网络版发表日期: 2022-08-03

科技创新2030-“新一代人工智能”重大项目(编号: 2018AAA0102305)资助

摘要 集群系统合围跟踪控制是群体智能涌现在运动控制层面的实现途径之一, 在智能化战争时代具有广阔的应用前景. 本文面向未来空地群体智能作战中护卫任务的应用需求, 聚焦军品押送、重要人物护送等典型任务场景, 研究了异构集群系统考虑领导者具有未知输入的分布式编队-合围跟踪控制问题, 以实现复杂环境下空地协同智能作战. 首先引入代数图论知识, 建立具有未知输入的异构集群系统模型, 提出了一种编队构型生成系统. 之后结合自适应控制律, 利用邻居局部信息交互设计了基于边的分布式编队-合围跟踪控制器, 并证明了闭环系统的稳定性. 此外, 对异构集群系统涌现出的更复杂的群体智能特征进行了分析与总结. 最后, 通过数值仿真验证了本文所提出的方法能够实现预期的编队-合围跟踪控制, 并建立了实物等效验证系统, 对控制方法的有效性进行了验证, 为实际情况下大规模空地协同智能作战提供了有力的理论支撑.

关键词 异构集群系统, 合围跟踪控制, 未知输入, 群体智能

1 引言

近年来, 随着智能化战争时代的来临, 无人化作战概念被各大国广泛应用于军事中. 由于高隐蔽性和低成本性, 无人系统常被作为袭击武器, 这使得空地安全备受威胁. 据外媒报道, 以色列新研制的Harop反辐射无人机(图1)能够集群发射, 对防空系统的雷达采取饱和式攻击, 近日已突破叙利亚“铠甲”防空系统. 此

前, 伊朗二号人物苏莱曼尼一行在离开机场途中遭到美国无人机空袭丧命, 国内也曾多次报道武装押运车被不明无人机暗中窥探的消息, 显然, 无人系统的袭击对人力护卫提出了巨大挑战. 因此, 为了更好地在复杂环境中应对空地潜在袭击, 减少人力物力损失, 需要大力发展新型的无人护卫系统, 更加智能地侦察反击潜在的威胁.

面对高度多样性和复杂性的护卫任务需求, 以及

引用格式: 王林波, 王蒙一, 周思全, 等. 考虑未知输入的异构集群系统群体智能合围跟踪控制. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 291–306
Wang L B, Wang M Y, Zhou S Q, et al. Formation-containment tracking intelligent control for heterogeneous swarm systems under unknown input (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53: 291–306, doi: [10.1360/SST-2021-0373](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0373)

图1 以色列Harop反辐射无人机

Figure 1 Israel Harop anti-radiation drone.

复杂要素交织的作战环境,单一的无人系统显然难以适应,多种无人系统组成的集群系统成为了必然的选择.在集群系统中,通过对群体设计简单的交互规则可使群体涌现出单个个体不具备的协调、有序的群体智能行为^[1],称为群智涌现.涌现不是简单的各部分之和,概括来讲,能实现涌现的集群系统具有宏-微观效应、双向耦合、一致性、协作进化性,以及分布式控制等群体智能特征^[2].目前,无人机(unmanned aerial vehicle, UAV)-无人车(unmanned ground vehicle, UGV)空地协同技术是异构集群系统群智涌现在控制层面的重要应用,近几年受到了国内外广泛关注, UAV凭借着广阔的侦察打击能力,与具有较高负载能力的UGV协同合作,为无人护卫系统提供了一个可行的思路.通过多UAV协同编队侦察,为UGV快速确定出安全区域,UGV在进入安全区域的同时也为UAV提供导航、充电、维修等服务,由此可见,在空地协同深度耦合下,无人护卫系统能够提升速度、续航、负载、通信等各方面的能力,为未来的空地安全提供有力保障.这其中异构集群系统协同控制技术是空地协同的重要理论基础^[3],在编队控制^[4-6]、合围控制^[7,8]及编队-合围控制^[9,10]等重要分支上有许多成果.

目前,基于一致性理论的异构集群系统编队控制是一个研究热点,卢闯等人^[11]研究了异构集群系统编队的一致性,但只考虑了低阶系统,周思全等人^[12]基于一致性理论设计了分布式控制器,在编队控制的同时还对集群系统整体的轨迹有宏观的控制,即为编队跟踪控制.文献^[13-15]分别考虑了异构集群系统分组协同编队,扰动抑制及通信拓扑切换的问题,更加具有现实意义.但如果仅考虑编队这一类集群行为,

将无法满足无人车的安全需求.

当存在多个领导者时,会出现状态/输出合围控制问题.合围即要求跟随者状态/输出进入到多个领导者状态/输出形成的凸组合中,这正是护卫任务的主要需求之一. Haghshenas等人^[16]首次将输出调节框架应用于异构集群的控制问题中,并采用分布式动态反馈设计了跟随者的合围控制器. Chu等人^[17]引入了自适应调节增益,使得合围控制器不依赖于全局信息. Qin等人^[18]考虑了存在拓扑切换情况下的合围控制,并给出了实现合围控制的充分条件.

但文献^[16-18]中的多领导者之间均不存在交互协同,无法有效调整多领导者之间的相对位置关系,于是便有了编队-合围控制问题.编队-合围指的是领导者之间通过协同控制形成期望的编队,同时跟随者的状态/输出进入到领导者形成的凸组合中,是编队和合围发展起来的一个更复杂的问题. Jiang等人^[19]基于全分布式自适应观测器设计了编队-合围跟踪控制器,并提出了虚拟领导者来刻画群体宏观参考轨迹,在此基础上, Zhan等人^[20]进一步研究了双向固定时间编队-合围跟踪控制, Atrianfar^[21]提出了一种分布式采样时间合围控制器,但文献^[19-21]均假设虚拟领导者为自治系统,认为其控制输入恒为零,这会严格限制群体宏观参考轨迹的类型及适用性.

然而,由于无人护卫系统复杂多变的工作环境,对群体宏观参考轨迹的一般性和适用性提出了挑战.值得一提的是,在同构系统中有相关的解决办法, Hua等人^[22]研究了跟踪领导者具有时变控制输入情况下的集群系统的编队-合围跟踪问题,能够更加有效地生成群体宏观参考轨迹,文献^[23,24]则在此基础上分别考虑了有限时间与领导者分组情况下的编队-合围跟踪控制.所以,本文借鉴上述文献的研究思路,在异构系统实现编队-合围跟踪的基础上,对虚拟领导者增加时变控制输入,以有效调节参考轨迹,实时避开危险地带.并且针对护卫过程中可能跟踪遥控目标和非合作目标,考虑虚拟领导者的控制输入对于其他领导者和跟随者而言是未知的.此外,由于护卫过程中需要穿越不规则的地形障碍,为了让UAV更大范围的探测潜在袭击,给予UGV最大的活动空间,考虑具有时变控制输入的编队构型生成系统,增加了编队构型的类型,并能实时改变编队构型以穿越不规则障碍.

综上,如何扩展异构集群系统时变编队的可行域

和适用范围,有效补偿领导者未知输入的影响,是本文待解决的问题.得益于以上研究的启发,本文面向未来空地群体智能作战中护卫任务的应用需求,基于一致性理论,提出了一种结合自适应控制律的异构集群系统分布式编队-合围跟踪控制的方法,并建立了实物等效验证系统,解决了上述问题,主要创新点包括以下三个方面.

(1) 对异构集群系统引入了具有时变未知输入的虚拟领导者,可以实时调整集群系统的参考轨迹,避开危险区域,之后结合自适应控制律设计了基于边的分布式观测器以及控制器,能够应对未知输入的影响;

(2) 与现有的异构集群系统编队-合围跟踪研究相比,本文提出了一种编队构型生成系统,并给出了编队可行性条件.该系统含有时变输入,不依赖于虚拟领导者的动力学模型,能够生成更一般的编队构型,可以有效扩展编队可行域,实时变换编队以穿越障碍;

(3) 针对本文所提出的基于异构集群系统分布式编队-合围跟踪控制的护卫方法,建立了实物等效实验验证系统,对本文设计的编队-合围跟踪控制器的有效性进行了验证.

2 数学基础和问题描述

2.1 数学基础

集群系统中的通信关系可以用拓扑图表示,假定一个有向拓扑图 $G(v, o, A)$ 具有 N 个节点,其中 $v = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 代表拓扑图的节点集, $o \subseteq \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in v, i \neq j\}$ 代表拓扑图存在的边集, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示邻接矩阵,令 $g_{ij} = (v_i, v_j)$,则当且仅当 $g_{ji} \in o$ 时, $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0$.定义拓扑图的Deg矩阵 $D = \text{diag}\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\}$,定义Laplacian矩阵 $L = D - A$.定义 $N_i = \{v_j \in v : (v_i, v_j) \in o\}$ 表示节点 v_i 的邻居集.

2.2 问题描述

根据任务需求,考虑由 $M+1$ 个智能体组成的异构集群系统,如图2所示,将其分为虚拟领导者,护卫领导者以及跟随者.假设 $i=0$ 指代虚拟领导者,用以生成群体运动的参考轨迹; $i = 1, 2, \dots, N (N < M)$ 指代护卫

图2 异构集群系统编队-合围跟踪示意图

Figure 2 Formation-containment tracking control schematic of heterogeneous swarm system.

领导者,在形成预期编队构型的同时跟踪参考轨迹; $i = N+1, N+2, \dots, M$ 指代跟随者,预期能够收敛到护卫领导者的凸组合内部.为了减少通信,虚拟领导者没有邻居,护卫领导者的邻居只有领导者,跟随者的邻居包含护卫领导者和其他跟随者.

将生成群体宏观参考轨迹的虚拟领导者动力学模型表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= A_0 x_0(t) + B_0 f_0(t), \\ y_0(t) &= C_0 x_0(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_0 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ 为常数矩阵, $x_0(t) \in \mathbb{R}^n$, $r_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $y_0(t) \in \mathbb{R}^l$ 分别为虚拟领导者的状态、输入和输出.考虑如下的护卫领导者和跟随者的动力学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \\ y_i(t) &= C_i x_i(t), \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l_i \times n_i}$ 为常数矩阵, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$, $y_i(t) \in \mathbb{R}^{l_i}$ 分别为护卫领导者和跟随者的状态、输入和输出.定义护卫领导者和跟随者的下标集合分别为 $E = \{1, 2, \dots, N\}$ 和 $F = \{N+1, N+2, \dots, M\}$.

对于护卫领导者,定义其预期编队构型为 $h_y(t) = [h_{y1}^T(t), h_{y2}^T(t), \dots, h_{yN}^T(t)]^T$,由以下编队构型生成系统生成:

$$\begin{aligned} \dot{h}_i(t) &= Hh_i(t) + Rr_i(t), \\ h_{yi}(t) &= Yh_i(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $i \in E$, 编队向量 $h(t) = [h_1^T(t), h_2^T(t), \dots, h_N^T(t)]^T$, $h_i(t) \in \mathbb{R}^{h_i}$, $r_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$, $h_{yi}(t) \in \mathbb{R}^p$, H 和 Y 满足以下编队调节器方程:

$$\begin{aligned} X_{hi}H &= A_iX_{hi} + B_iU_{hi}, \\ 0 &= C_iX_{hi} - Y. \end{aligned}$$

当编队构型设计好之后, 方程有解 (X_{hi}, U_{hi}) . 上述系统(3)可通过有界外部输入 $r_i(t)$ 来产生更一般的时变可控的编队构型.

假设1: 假设系统(1)与(3)的控制输入 $r_0(t)$ 与 $r_i(t)$ 是有界量, 满足 $\|r_0(t)\|_\infty \leq R$, $\max_{i \in E} \|r_i(t)\|_\infty \leq \theta$. R, θ 为足够大的正数.

注释1: 实际情况下, 所有物理系统的控制输入都是有界的, 假设1是合理的.

假设2: 对可能存在的作用拓扑 G , 领导者之间具有以虚拟领导者为根节点的生成树, 对每一个跟随者, 至少存在一个护卫领导者有指向它的路径. 虚拟领导者对护卫领导者是有向的, 护卫领导者对跟随者是有向的, 护卫领导者之间、跟随者之间是连通的.

如果假设2成立, 由式(1)和(2)定义的异构集群系统的Laplacian矩阵可以写为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times N} & 0_{(1+N) \times (M-N)} \\ L_{12} & L_{11} & \\ L_2 & L_3 & L_4 \end{bmatrix},$$

其中, $L_{12} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $L_{11} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $L_2 \in \mathbb{R}^{(M-N) \times 1}$, $L_3 \in \mathbb{R}^{(M-N) \times N}$, $L_4 \in \mathbb{R}^{(M-N) \times (M-N)}$.

此外, 假设2成立的情况下, 有如下引理.

引理1^[25,26]: L_{11}, L_4 为正定阵.

引理2^[27]: 存在正定对角阵 $S \triangleq (\text{diag}\{\bar{s}\})$ 使得 $0 = SL_4 + L_4S > 0$, 其中

$$\bar{s} = [s_{N+1}, s_{N+2}, \dots, s_M]^T = L_4^{-1}1_{M-N}.$$

引理3^[28]: $-L_4^{-1}L_3$ 中每一项都是非负的, 且行和为1, 可将 $-L_4^{-1}L_3$ 重新写为

$$-L_4^{-1}L_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{N+1,1} & \cdots & \alpha_{N+1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{M,1} & \cdots & \alpha_{M,N} \end{bmatrix}.$$

可知, $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} = 1 (i \in F)$.

定义1: 定义如下多元非线性矩阵函数:

$$f(X, Y(t), Z(t)) = \begin{cases} \frac{X^T(Y(t) - Z(t))}{\|X^T(Y(t) - Z(t))\|}, & \text{others,} \\ 0, & \|X^T(Y(t) - Z(t))\| = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中, X 为参数矩阵, $Y(t), Z(t)$ 可能是时变向量, 也可能是时变矩阵, 三者需保持维度一致.

定义2: 由式(1)和(2)定义的异构集群系统对任意给定的有界初始状态, 有下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_i(t) - h_{yi}(t) - y_0(t)) = 0, (i \in E). \quad (5)$$

则称其实现了时变输出编队跟踪控制.

定义3: 对于任意 $k \in F$, 存在非负常数 $\alpha_{kj} (j \in E)$ 满足 $\sum_{j=1}^N \alpha_{kj} = 1$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y_k(t) - \sum_{j=1}^N \alpha_{kj} y_j(t) \right) = 0 \quad (6)$$

成立, 那么称由式(1)和(2)定义的异构集群系统实现了时变输出合围控制.

定义4: 如果针对由式(1)和(2)定义的异构集群系统, 对于任意初始有界状态的护卫领导者 $i (i \in E)$ 和跟随者 $k (k \in F)$, 有式(6)和(7)同时成立, 那么认为异构集群系统实现了预期的编队-合围跟踪控制.

现有的异构集群系统编队-合围^[16-21]不能有效控制集群系统的整体轨迹和编队构型. 本文考虑领导者具有未知输入以及编队构型生成系统具有时变输入的情况, 结合自适应控制律进一步研究了异构集群系统的编队-合围跟踪问题. 显然整个系统是时变的, 之后对各变量省略 t , 即 $x(t) = x$.

3 编队-合围跟踪控制器设计及群智涌现

本节将编队-合围跟踪控制器分为编队跟踪和合围控制两个方面, 分别设计了基于边的观测器及控制器, 并利用Lyapunov第二方法证明了闭环系统的稳定性. 最后, 对本文异构集群系统涌现出的更复杂的群体智能特征进行了分析总结.

3.1 时变编队跟踪控制

输出时变编队跟踪的含义为: 通过设计合适的控制器, 使得集群中所有护卫领导者的输出在对应空间内保持一致的相对位置关系, 与此同时, 使该群体能跟踪指定的参考轨迹, 即实际轨迹与参考轨迹达成一致.

由 $y_i - h_{yi} - y_0 = y_i - h_{yi} - C_0 x_0 (i \in E)$ 可知, 每个护卫领导者都需要虚拟领导者的状态信息, 由此需要设计观测器来估计 x_0 , 设分布式估计值为 $\hat{v}_i$, 有 $\hat{v}_0 = x_0$. 可将自适应观测器设计为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_i &= A_0 \hat{v}_i - \sum_{j=0}^N \hat{\rho}_{ij} a_{ij} \eta_{ij}, \\ \dot{\hat{\rho}}_{ij} &= (\hat{v}_i - \hat{v}_j)^T \eta_{ij} (i, j \in E), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\hat{\rho}_{ij}$ 表示基于边的自适应增益, a_{ij} 表示拓扑相关的权重, $\eta_{ij} = (\hat{v}_i - \hat{v}_j) + B_0 f(B_0, \hat{v}_i, \hat{v}_j)$.

定理1: 如果假设1和2成立, 基于边的自适应增益初值 $\hat{\rho}_{ij}(0) \geq 0$, 且有 $\hat{\rho}_{ij}(0) = \hat{\rho}_{ji}(0) (i, j \in E)$, 则所设计的观测器(7)误差 $\tilde{v}_i = \hat{v}_i - x_0$ 趋于零.

证明: 对误差 $\tilde{v}_i$ 求导有

$$\dot{\tilde{v}}_i = A_0 \tilde{v}_i - \sum_{j=1}^N \hat{\rho}_{ij} a_{ij} \eta_{ij} - \hat{\rho}_{i0} a_{i0} \eta_{i0} - B_0 r_0,$$

其中, $\eta_{ij} = (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) + B_0 f(B_0, \tilde{v}_i, \tilde{v}_j)$. 考虑如下Lyapunov函数:

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T \tilde{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{\rho}_{ij} - \rho)^2 + 2(\hat{\rho}_{i0} - \rho)^2 \right), \quad (8)$$

其中, $\rho > 0$ 为待确定的参数. 沿 $\dot{V}_1$ 对式(8)求导为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T (A_0 + A_0^T) \tilde{v}_i - 2 \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T \sum_{j=1}^N \hat{\rho}_{ij} a_{ij} \eta_{ij} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^N \hat{\rho}_{i0} a_{i0} \tilde{v}_i^T \eta_{i0} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\hat{\rho}_{ij} - \rho) (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)^T \eta_{ij} \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T B_0 r_0 + 2 \sum_{i=1}^N (\hat{\rho}_{i0} - \rho) \tilde{v}_i^T \eta_{i0}. \end{aligned} \quad (9)$$

注意到, $a_{ij} = a_{ji}$, $\hat{\rho}_{ij} = \hat{\rho}_{ji}$, $\eta_{ij} = -\eta_{ji}$, 可以得到:

$$-2 \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T \sum_{j=1}^N \hat{\rho}_{ij} a_{ij} \eta_{ij} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)^T \hat{\rho}_{ij} a_{ij} \eta_{ij}. \quad (10)$$

且可得 $\eta_{i0} = \tilde{v}_i + B_0 f(B_0, \tilde{v}_i, 0)$. 将式(4)和(10)代入式(9),

并令 $\tilde{v} = [\tilde{v}_1^T, \tilde{v}_2^T, \dots, \tilde{v}_N^T]^T$, 可得:

$$\dot{V}_1 = \tilde{v}^T (I_N \otimes (A_0 + A_0^T)) \tilde{v} - 2\rho \tilde{v}^T (L_{11} \otimes I_n) \tilde{v} + \Delta V_1, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= -\rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \|B_0^T (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)\| - 2 \sum_{i=1}^N \rho a_{i0} \|B_0^T \tilde{v}_i\| \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T B_0 r_0. \end{aligned} \quad (12)$$

对于时刻 t , 假设第 i 个护卫领导者取得 $\|B_0^T \tilde{v}_i\|$ 最大,

即 $\|B_0^T \tilde{v}_i\| = \max_{i \in E} \|B_0^T \tilde{v}_i\|$, 则存在两种情况.

(1) 第 i 个护卫领导者能接收到虚拟领导者信息, 即 $a_{i0} > 0$, 由于 $\|r_0(t)\|_\infty \leq R$, 选取充分大的参数 $\rho \geq \frac{RN}{a_{i0}}$,

式(12)可变为

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\leq -2 \sum_{i=1}^N \rho a_{i0} \|B_0^T \tilde{v}_i\| - 2 \sum_{i=1}^N \tilde{v}_i^T B_0 r_0 \\ &\leq -2\rho a_{i0} \|B_0^T \tilde{v}_i\| + 2RN \|B_0^T \tilde{v}_i\| \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

(2) 第 i 个护卫领导者不能接收到虚拟领导者信息, 则至少存在一个直接接收虚拟领导者信息的护卫领导者 $\tilde{i}_k$ 有到 i 的路径. 将其对应的路径设为 $(i, \tilde{i}_1), (\tilde{i}_1, \tilde{i}_2), \dots, (\tilde{i}_{k-1}, \tilde{i}_k)$, 可知 $a_{i\tilde{i}_1} = a_{\tilde{i}_1 i} > 0, \dots, a_{\tilde{i}_{k-1} \tilde{i}_k} = a_{\tilde{i}_k \tilde{i}_{k-1}} > 0$.

由三角不等式, 有:

$$\begin{aligned} \|B_0^T \tilde{v}_i\| &= \|B_0^T (\tilde{v}_i - \tilde{v}_{\tilde{i}_1} + \tilde{v}_{\tilde{i}_1} - \tilde{v}_{\tilde{i}_2} + \dots - \tilde{v}_{\tilde{i}_k} + \tilde{v}_{\tilde{i}_k})\| \\ &\leq \|B_0^T (\tilde{v}_i - \tilde{v}_{\tilde{i}_1})\| + \|B_0^T (\tilde{v}_{\tilde{i}_1} - \tilde{v}_{\tilde{i}_2})\| + \dots + \|B_0^T \tilde{v}_{\tilde{i}_k}\|. \end{aligned}$$

选取充分大的参数 $\rho \geq \max \left\{ \frac{RN}{a_{ij}} \right\} (i, j \in E)$, 代入三角不等式, 有:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\leq -\rho \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \|B_0^T (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)\| + 2RN \|B_0^T \tilde{v}_i\| \\ &\leq -2\rho (a_{i\tilde{i}_1} \|B_0^T (\tilde{v}_i - \tilde{v}_{\tilde{i}_1})\| + a_{\tilde{i}_1 \tilde{i}_2} \|B_0^T (\tilde{v}_{\tilde{i}_1} - \tilde{v}_{\tilde{i}_2})\| \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{\tilde{i}_{k-1} \tilde{i}_k} \|B_0^T \tilde{v}_{\tilde{i}_k}\|) + 2RN \|B_0^T \tilde{v}_i\| \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

综上, 如果选取充分大的参数 $\rho \geq \max \left\{ \frac{RN}{a_{i0}}, \frac{RN}{a_{ij}} \right\}$

$(i, j \in E)$, 就有 $\Delta V_1 \leq 0$. 由此, 代入到式(11)可得:

$$\dot{V}_1 \leq \tilde{v}^T (I_N \otimes (A_0 + A_0^T)) \tilde{v} - 2\rho \tilde{v}^T (L_{11} \otimes I_n) \tilde{v}. \quad (15)$$

由引理 1, L_{11} 为正定矩阵, 则存在正交阵 $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 使得 $U^T L_{11} U = \Omega = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, 令 $\zeta = [\zeta_1^T, \zeta_2^T, \dots, \zeta_N^T]^T = (U^T \otimes I_n) \tilde{v}$, 上式变为

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N \zeta_i^T (A_0 + A_0^T - 2\rho \lambda_i I_q) \zeta_i. \quad (16)$$

选取 $\rho > \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(A_0 + A_0^T)}{2\lambda_i} \right\} (i \in E)$, 则有 $\dot{V}_1 \leq 0$,

这表明 ρ_{ij} , $\tilde{v}$ 是有界的. 由 ρ_{ij} 单调增, 可知其收敛到有限常数, 而 $\dot{V}_1 \equiv 0$ 表示 $\tilde{v} = 0$, 所以根据 LaSalle 不变性原理, 显然 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}(t) = 0, (i \in E)$, 定理 1 得证.

观测到虚拟领导者的状态信息后, 将进一步设计编队跟踪控制器.

假设 3: 以下调节器方程

$$\begin{aligned} X_i A_0 &= A_i X_i + B_i U_i \\ 0 &= C_i X_i - C_0 \end{aligned}$$

对 $(i \in E)$ 有解 (X_i, U_i) .

可将分布式编队跟踪控制器设计为

$$u_i = K_{1i} x_i + K_{2i} \hat{v}_i + K_{hi} h_i - \varepsilon I f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0) + \tau_i, \quad (17)$$

其中, $i \in E$, 设计增益矩阵 K_{1i} 使得 $A_i + B_i K_{1i}$ 为 Hurwitz 的, 设计 $K_{2i} = U_i - K_{1i} X_i$, $K_{hi} = U_{hi} - K_{1i} X_{hi}$, 设计参数 $\varepsilon \geq R$, 选取 Γ_i 满足 $B_i \Gamma_i = X_i B_0$, $\hat{\varsigma}_i = x_i - X_i \hat{v}_i - X_{hi} h_i$. P_i 为正定阵, 满足如下 Lyapunov 方程:

$$P_i (A_i + B_i K_{1i}) + (A_i + B_i K_{1i})^T P_i = -I_n.$$

τ_i 是编队跟踪补偿输入, 满足如下编队可行性条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (B_i \tau_i(t) - X_{hi} R r_i(t)) = 0.$$

定理 2: 如果假设 1, 2 和 3 成立, 所生成的编队构型满足编队可行性条件, 则由式(1)和(2)定义的虚拟领导者存在未知输入的异构集群系统在所设计的控制器(17)的作用下, 可实现由式(5)定义的编队跟踪控制.

证明: 令 $\varsigma_i = x_i - X_i x_0 - X_{hi} h_i$, 求导有

$$\dot{\varsigma}_i = (A_i + B_i K_{1i}) \varsigma_i - \varepsilon B_i \Gamma_i f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0) - B_i \Gamma_i r_0 + \tilde{\chi}_i, \quad (18)$$

其中, $\tilde{\chi}_i = B_i \tau_i - X_{hi} R r_i + B_i K_{2i} \tilde{v}_i$.

由定理 1 可知观测器稳定, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{v}_i(t) = 0$, 由编队可行性条件可得 $\tilde{\chi}_i = B_i \tau_i - X_{hi} R r_i + B_i K_{2i} \tilde{v}_i \rightarrow 0$, 考虑 Lyapunov 函数 $V_{2i} = \varsigma_i^T P_i \varsigma_i$, 沿式(18)对其求导为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} &= \varsigma_i^T (P_i (A_i + B_i K_{1i}) + (A_i + B_i K_{1i})^T P_i) \varsigma_i \\ &\quad - 2\varepsilon \varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0) - 2\varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i r_0 + 2\varsigma_i^T P_i \tilde{\chi}_i. \end{aligned} \quad (19)$$

根据杨氏不等式^[26], 则有:

$$2\varsigma_i^T P_i \tilde{\chi}_i \leq \frac{1}{2} \varsigma_i^T \varsigma_i + 2\|P_i \tilde{\chi}_i\|^2. \quad (20)$$

令 $\tilde{\varsigma}_i = \hat{\varsigma}_i - \varsigma_i$, 则 $\tilde{\varsigma}_i = -X_i \tilde{v}_i \rightarrow 0$, 此时将式(4)代入可知:

$$\begin{aligned} &\varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0) \\ &\leq \|\varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0)\| \\ &\leq \|\hat{\varsigma}_i^T P_i B_i \Gamma_i\| \|f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0)\| \\ &\leq \|\hat{\varsigma}_i^T P_i B_i \Gamma_i\|. \end{aligned}$$

因此, 简写 $f(P_i B_i \Gamma_i, \hat{\varsigma}_i, 0)$ 为 $f(\hat{\varsigma}_i)$, 根据上述条件有:

$$\begin{aligned} &-2\varepsilon \varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i f(\hat{\varsigma}_i) - 2\varsigma_i^T P_i B_i \Gamma_i r_0 \\ &= -2\varepsilon (\hat{\varsigma}_i^T - \varsigma_i^T) P_i B_i \Gamma_i f(\hat{\varsigma}_i) - 2(\hat{\varsigma}_i^T - \varsigma_i^T) P_i B_i \Gamma_i r_0 \\ &\leq -2(\varepsilon - R) \|(P_i B_i \Gamma_i)^T \hat{\varsigma}_i\| + 2(\varepsilon + R) \|(P_i B_i \Gamma_i)^T \varsigma_i\| \\ &\leq 2(\varepsilon + R) \|(P_i B_i \Gamma_i)^T \varsigma_i\|. \end{aligned} \quad (21)$$

综上, 代入不等式(20)和(21)及 Lyapunov 方程到式(19)有:

$$\dot{V}_{2i} \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}(P_i)} V_{2i} + 2\|P_i \tilde{\chi}_i\|^2 + 2(\varepsilon + R) \|(P_i B_i \Gamma_i)^T \varsigma_i\|. \quad (22)$$

由于 $\tilde{\chi}_i$ 以及 $\hat{\varsigma}_i$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_i(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\varsigma}_i(t) = 0$, 根据文献[27]中的引理 2.19, 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} V_{2i}(t) = 0$, 故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varsigma_i(t) = 0$.

令编队跟踪误差为 $e_i = y_i - h_{yi} - C_0 x_0 = C_i \varsigma_i$, 易知

$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$, 即实现了预期的编队跟踪控制. 定理 2 得证.

3.2 时变输出合围控制

输出合围控制指的是通过设计合适的控制器, 使所有跟随者的输出进入到领导者的输出所形成的凸组合内部. 因此, 对于跟随者而言, 进入凸组合的第一步就是估计出凸组合, 根据文献[19], 可将凸组合定义为

$$(-L_4^{-1}L_3 \otimes I_n)y_L, y_L = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_N^T]^T.$$

由定理2中编队跟踪误差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$ 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_L = (I \otimes Y)h + (I \otimes C_0)(1 \otimes x_0)$. 因此对于跟随者而言, 有必要估计出 $(-L_4^{-1}L_3 \otimes I_n)(1 \otimes x_0)$ 以及 $(-L_4^{-1}L_3 \otimes I_n)h$. 所以分别设计分布式观测器来估计出它们的值. 由引理2, 可将 $(-L_4^{-1}L_3 \otimes I_n)(1 \otimes x_0)$ 分开写为 $\sum_{j=1}^N a_{ij}x_0$, 对其设计分布式观测器为

$$\dot{\hat{\xi}}_i = A_0 \hat{\xi}_i - \gamma \Lambda \delta_i - \sum_{j=N+1}^M a_{ij} \beta s_i^{-1} B_0 f(PB_0, \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j), \quad (23)$$

其中, $\hat{\xi}_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第*i*个跟随者对 $\sum_{j=1}^N a_{ij}x_0$ 的分布式估计值, $\gamma, \beta > 0$ 为待定参数. Λ 为待设计的增益矩阵, 可设计 $\Lambda = P^{-1}C_0^T$, P 为式(24)的解,

$$\begin{aligned} \delta_i &= \left(\sum_{j=N+1}^M a_{ij}(\hat{y}_i - \hat{y}_j) + \sum_{k=1}^N a_{ik}(\hat{y}_i - y_k) \right), \\ \hat{y}_i &= C_0 \hat{\xi}_i, y_k = C_0 x_0. \\ PA_0 + A_0^T P - C_0^T C_0 + \alpha P &< 0, \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\alpha > 0$ 为给定的参数.

定理3: 令观测器(23)的误差为 $\tilde{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}x_0$, 如

果假设1和2成立, 观测器参数选取为 $\gamma \geq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(O)} \right\}$, $\beta \geq \max_{i,j \in F} \left\{ \frac{s_{\max} R(M-N)}{a_{ij}} \right\}$, 则所设计的分布式观测器(23)的误差趋于零.

证明: 令

$$F(PB_0, \hat{\xi}_F) = \left[\sum_{j=N+1}^M a_{N+1j} s_{N+1}^{-1} B_0 f(PB_0, \hat{\xi}_{N+1}, \hat{\xi}_j) \right]^T, \dots$$

$$\left[\sum_{j=N+1}^M a_{Mj} s_M^{-1} B_0 f(PB_0, \hat{\xi}_M, \hat{\xi}_j) \right]^T, \dots$$

$\hat{\xi}_F = [\hat{\xi}_{N+1}^T, \hat{\xi}_{N+2}^T, \dots, \hat{\xi}_M^T]^T$, 则观测器可以重新写为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_F &= (I_{N-M} \otimes A_0) \hat{\xi}_F - \gamma (L_4 \otimes P^{-1} C_0^T C_0) \hat{\xi}_F \\ &\quad - \gamma (L_3 \otimes P^{-1} C_0^T C_0) (1 \otimes x_0) - \beta F(PB_0, \hat{\xi}_F). \end{aligned}$$

对观测器误差求导有:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_F &= (I_{N-M} \otimes A_0 - \gamma (L_4 \otimes P^{-1} C_0^T C_0)) \hat{\xi}_F \\ &\quad - \beta F(PB_0, \hat{\xi}_F, 0) - (-L_4^{-1} L_3 \otimes I_n) (1 \otimes B_0 r_0), \end{aligned} \quad (25)$$

其中, 由引理3可得 $(-L_4^{-1} L_3 \otimes I_n) (1 \otimes B_0 r_0) = 1 \otimes B_0 r_0$.

考虑如下Lyapunov函数:

$$V_3 = \hat{\xi}_F^T (S \otimes P) \hat{\xi}_F. \quad (26)$$

沿轨迹(25)对式(26)求导并代入各变量化简可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \hat{\xi}_F^T (S \otimes (PA_0 + A_0^T P)) \hat{\xi}_F \\ &\quad - \gamma \hat{\xi}_F^T (O \otimes C_0^T C_0) \hat{\xi}_F + \Delta V_3, \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta V_3 &= -2\beta \hat{\xi}_F^T (S \otimes P) F(PB_0, \hat{\xi}_F) \\ &\quad - 2\hat{\xi}_F^T (S \otimes P) (1 \otimes B_0 r_0). \end{aligned}$$

可将 ΔV_3 重新写为

$$\begin{aligned} \Delta V_3 &= -2\beta \sum_{i=N+1}^M \hat{\xi}_i^T \sum_{j=N+1}^M a_{ij} PB_0 f(PB_0, \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j) \\ &\quad - 2 \sum_{i=N+1}^M s_i \hat{\xi}_i^T PB_0 r_0. \end{aligned} \quad (28)$$

假设 $s_{\max} = \max_{i \in F} \{s_i\} > 0$, 由式(10)及假设1中虚拟领导者的控制输入 r_0 是有界的, 分别可得:

$$\begin{aligned} &-2\beta \sum_{i=N+1}^M \hat{\xi}_i^T \sum_{j=N+1}^M a_{ij} PB_0 f(PB_0, \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j) \\ &= -2\beta \sum_{i=N+1}^M \sum_{j=N+1}^M a_{ij} \|(PB_0)^T (\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_j)\|, \\ &-2 \sum_{i=N+1}^M s_i \hat{\xi}_i^T PB_0 r_0 \leq 2s_{\max} R(M-N) \max_{i \in F} \|(PB_0)^T \hat{\xi}_i\|. \end{aligned}$$

类似于式(12)~(14)的分析, 选择充分大的

$\beta \geq \max_{i,j \in F} \left\{ \frac{s_{\max} R(M-N)}{a_{ij}} \right\}$, 有 $\Delta V_3 \leq 0$, 式(27)可变为

$$\dot{V}_3 \leq \hat{\xi}_F^T (S \otimes (PA_0 + A_0^T P)) \hat{\xi}_F - \gamma \hat{\xi}_F^T (O \otimes C_0^T C_0) \hat{\xi}_F. \quad (29)$$

选择充分大的 $\gamma \geq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(O)} \right\}$, 式(29)变为

$$\dot{V}_3 \leq \hat{\xi}_F^T (S \otimes (PA_0 + A_0^T P - C_0^T C_0)) \hat{\xi}_F. \quad (30)$$

代入式(25)到式(31)有:

$$\dot{V}_3 \leq -\alpha \hat{\xi}_F^T (S \otimes P) \hat{\xi}_F = -\alpha V_3.$$

根据文献[27]中的引理2.19, 可知 $\dot{V}_3 \leq 0$, 这表明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_F(t) = 0, \text{ 显然 } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\tilde{\zeta}_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_0 \right) = 0, i \in F.$$

定理3得证.

同理, 针对 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$ 设计分布式观测器为

$$\dot{\tilde{\zeta}}'_i = H \tilde{\zeta}'_i - \gamma' \Lambda' \delta'_i - \sum_{j=N+1}^M a_{ij} \beta' R_j f(P' R_i \tilde{\zeta}'_i, \tilde{\zeta}'_j), \quad (31)$$

其中, $(i \in F)$, $\tilde{\zeta}'_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个跟随者对 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$ 的分布式估计值, $\gamma', \beta' > 0$ 为待定参数. Λ' 为待设计的增益矩阵, 可设计 $\Lambda' = (P')^{-1} Y^T$, P' 为式(32)的解,

$$\delta'_i = \left(\sum_{j=N+1}^M a_{ij} (\hat{y}'_i - \hat{y}'_j) + \sum_{k=1}^N a_{ik} (\hat{y}'_i - y'_k) \right).$$

$$\hat{y}'_i = Y \tilde{\zeta}'_i, y'_k = Y h_k.$$

$$P' H + H^T P' - Y^T Y + \alpha' P' < 0. \quad (32)$$

$\alpha' > 0$ 为给定的参数.

定理4: 令观测器(31)误差为 $\tilde{\zeta}'_i = \tilde{\zeta}'_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$, 如

果假设1和2成立, 观测器参数选取为 $\gamma' \geq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(O)} \right\}$,

$$\beta' \geq \max_{i,j \in F} \left\{ \frac{s_{\max} \theta(M-N)}{a_{ij}} \right\}, \text{ 则所设计的分布式观测器}$$

(31)误差趋于零.

证明: 类似于定理3的证明, 此处省略.

观测到护卫领导者所组成的凸组合后, 将对跟随者进一步设计包围控制器.

假设4: 如下的调节器方程

$$X_{i,c} A_0 = A_i X_{i,c} + B_i U_{i,c}$$

$$0 = C_i X_{i,c} - C_0$$

有解 $(X_{i,c}, U_{i,c})$, $(i \in F)$.

假设5: 如下的调节器方程

$$X'_{i,c} H = A_i X'_{i,c} + B_i U'_{i,c}$$

$$0 = C_i X'_{i,c} - Y$$

有解 $(X'_{i,c}, U'_{i,c})$, $(i \in F)$.

设计分布式控制器为

$$\begin{aligned} u_i &= K_{3i} x_i + K_{i,c} \tilde{\zeta}_i + K'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i \\ &\quad - \mu \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \Gamma_{i,c} f(T_i B_i \Gamma_{i,c} \tilde{\zeta}_i, 0) \\ &\quad - \mu' \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \Gamma'_{i,c} f(T_i B_i \Gamma'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i, 0), \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $i \in F$, 设计增益矩阵 K_{3i} 使得 $A_i + B_i K_{3i}$ 为Hurwitz的, 设计 $K_{i,c} = U_{i,c} - K_{3i} X_{i,c}$, 设计参数 $\mu \geq R$, $\mu' \geq 9$, 选取 $\Gamma_{i,c}$ 满足 $B_i \Gamma_{i,c} = X_{i,c} B_0$, $K'_{i,c}, \Gamma'_{i,c}$ 类似方法选取. $\tilde{\zeta}_i = x_i - X_{i,c} \tilde{\zeta}_i - X'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i$, T_i 为正定阵, 满足如下Lyapunov方程:

$$T_i(A_i + B_i K_{3i}) + (A_i + B_i K_{3i})^T T_i = -I_n.$$

定理5: 如果假设1, 2, 4和5成立, 在虚拟领导者存在未知输入的条件下, 利用所设计控制器式(33), 集群系统(1)和(2)可实现式(6)定义的包围控制.

证明:

令 $\tilde{\zeta}_i = x_i - X_{i,c} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_0 - X'_{i,c} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$, $i \in F$, 求导后代

入 $K_{i,c}, \Gamma_{i,c}$ 与 $K'_{i,c}, \Gamma'_{i,c}$ 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}}_i &= (A_i + B_i K_{3i}) \tilde{\zeta}_i + B_i K_{i,c} \tilde{\zeta}_i + B_i K'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i \\ &\quad - \mu \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} B_i \Gamma_{i,c} f(T_i B_i \Gamma_{i,c} \tilde{\zeta}_i, 0) \\ &\quad - \mu' \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} B_i \Gamma'_{i,c} f(T_i B_i \Gamma'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i, 0) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} B_i \Gamma_{i,c} r_0 - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} B_i \Gamma_{i,c} r_j. \end{aligned} \quad (34)$$

令 $\tilde{\theta}_i = B_i K_{i,c} \tilde{\zeta}_i + B_i K'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i$, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}'_i(t) = 0$, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0$. 考虑Lyapunov函数 $V_{4i} = \tilde{\zeta}_i^T T_i \tilde{\zeta}_i$, 沿轨迹(34)求导有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{4i} &= \tilde{\zeta}_i^T (T_i(A_i + B_i K_{3i}) + (A_i + B_i K_{3i})^T T_i) \tilde{\zeta}_i \\ &\quad - 2 \tilde{\zeta}_i^T T_i \tilde{\theta}_i \\ &\quad - 2 \mu \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{\zeta}_i^T T_i B_i \Gamma_{i,c} f(T_i B_i \Gamma_{i,c} \tilde{\zeta}_i, 0) \\ &\quad - 2 \mu' \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{\zeta}_i^T T_i B_i \Gamma'_{i,c} f(T_i B_i \Gamma'_{i,c} \tilde{\zeta}'_i, 0) \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{\zeta}_i^T T_i B_i \Gamma_{i,c} r_0 - 2 \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \tilde{\zeta}_i^T T_i B_i \Gamma'_{i,c} r_j. \end{aligned} \quad (35)$$

令 $\tilde{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_i - \zeta_i = -X_{i,c}\tilde{\zeta}_i - X'_{i,c}\tilde{\zeta}'_i$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0$. 类似于式(19)~(22)分析, 可以推出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{4i} \leq & -\frac{1}{2\lambda_{\max}(T_i)}V_{4i} + 2\|T_i\hat{\theta}_i\|^2 \\ & + 2(\mu + R)\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}\|(TB_i\Gamma_i)^T\tilde{\zeta}_i\| \\ & + 2(\mu' + 9)\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}\|(T_iB_i\Gamma'_i)^T\tilde{\zeta}_i\|. \end{aligned} \quad (36)$$

由于 $\tilde{\theta}_i$ 以及 $\tilde{\zeta}_i$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}_i(t) = 0$, 根据文献[27]中的引理2.19, 可证 $\lim_{t \rightarrow \infty} V_{4i}(t) = 0$, 故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t) =$

0. 由式(6)定义的合围误差为 $e_{fi} = y_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}y_j$, $i \in F$, $j \in E$, 根据假设4和5的调节器方程易知:

$$\begin{aligned} e_{fi} &= Cx_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(Yh_j + C_0x_0) \\ &= C_i \left(x_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(X'_{i,c}h_j + X_{i,c}x_0) \right) \\ &= C_i\tilde{\zeta}_i, i \in F, j \in E. \end{aligned}$$

则 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{fi}(t) = 0$, 即跟随者的输出能收敛到护卫领导者输出所形成的凸组合内部. 定理5证毕.

结合所设计的分布式观测器, 式(1)与(2)定义的存在未知输入的异构集群系统在本文所设计的控制器(17)和(33)下实现了定义4下预期的输出编队-合围跟踪, 既提高了集群系统对复杂任务的适应性, 又实现了有效控制集群系统宏观轨迹的护卫要求.

3.3 异构集群系统中的群体智能涌现

集群系统以智能体的状态变量反映系统分布的参数, 通过局部信息交互进行动态自组织演化, 是研究群体智能涌现机制的通用模型之一^[2]. 本文通过设计编队-合围跟踪控制器, 使异构集群系统实现了编队-合围跟踪三种耦合的群体智能行为, 涌现出了宏-微观效应、耦合性、一致性、协作进化性等丰富的群体智能特征.

(1) 编队-合围跟踪的耦合性分析

从宏观的角度看, 异构集群系统三层架构之间的任务要求是耦合的. 例如, 护卫领导者在形成预期编队构型使得跟随者进入其中的同时, 还需要跟踪虚拟

领导者的参考轨迹. 从微观的角度看, 虽然将编队-合围跟踪控制问题分为了两部分介绍, 但他们并不是独立的, 从3.2节对输出合围观测器的设计过程可以看出, 编队跟踪的误差对合围误差存在着耦合影响. 耦合性正是重要的群体智能特征之一, 异构集群系统在双向耦合的过程中, 历经不同程度的协作进化, 能够从孤立向合作的秩序演进.

(2) 考虑未知输入下的群体秩序提升

编队-合围跟踪控制不是简单的个体状态或输出一致性问题, 还包含了对宏观参考轨迹进行跟踪的要求. 在考虑虚拟领导者控制输入未知以及编队构型生成系统具有时变输入的情况下, 异构集群系统能够更加有效地生成参考轨迹和具有适用性的编队构型, 更能适应复杂的作战任务. 通过考虑未知输入, 集群系统在更宏观的层面涌现出一致性的群体智能特征, 从群体秩序上实现了从低级向高级演化的过程.

综上所述, 可以看出本文中集群系统的各个体紧密耦合、高效演化, 实现了更复杂的群体智能行为, 涌现出了更丰富的群体智能特征.

4 数值仿真及等效验证

4.1 数值仿真

本文聚焦军品押送与重要人物护送等场景, 针对无人护卫系统的任务需求, 将其简化为异构集群系统, 设计了编队-合围跟踪观测器及控制器. 由于UAV高度方向可以单独控制, 所以下仅对其在X-Y平面进行仿真. 考虑如图3所示的有向作用拓扑图, 其中编号0为虚拟领导者, 编号1~6为护卫-领导者, 其余为跟随者.

假设虚拟领导者动力学模型为二阶积分器, 设其时变输入 $r(t) = (0.1, 0.1\sin(0.1t))^T$, 初始状态为: $x_0(0) = [-10, 0, 0, -1]^T$. 选取六架UAV作为护卫领导者, 四架UGV作为跟随者进行仿真. 根据文献[12], 可将UAV简化为如式(2)的线性空间模型, 其中,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A_5 = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= A_4 = A_6 = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_i &= I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_i = I_2 \otimes [1 \ 0] \ (i = 1, 2, \dots, 6), \end{aligned}$$

图 3 有向作用拓扑图

Figure 3 Directed interaction topology graph.

显然 (A_i, B_i) 可控, (A_i, C_i) 可观. 根据文献[29], 可将无人车动态模型反馈线性化为式(2)所示, 其中 $A_i = 0_{2 \times 2}$, $B_i = I_2$, $C_i = I_2 (i = 7, 8, 9, 10)$. UAV的状态由位置和速度组成, 输出为位置, UGV的状态和输出都由位置组成, 两者的初始状态均为随机值.

要求UAV在 X - Y 平面形成正六边形, 并实现以虚拟领导者为中心的旋转圆形编队跟踪, 因此编队向量设计为

$$h_i = \begin{bmatrix} \cos(t + (i-1)\pi/3) \\ -\sin(t + (i-1)\pi/3) \\ \sin(t + (i-1)\pi/3) \\ \cos(t + (i-1)\pi/3) \end{bmatrix} (i = 1, 2, \dots, 6).$$

系统(3)可以设计为 $H = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 0_{4 \times 2}$, $Y =$

$I_2 \otimes [1 \ 0]$.

首先设计观测器(7)中的自适应增益初值为 $\hat{\rho}_{ij}(0) = 3 (i = 1, 2, \dots, 6, j = 0, 1, \dots, 6)$, 观测器(23)的参数选取为 $\gamma = \gamma' = 10, \beta = \beta' = 15$, 给定 $\alpha = \alpha' = 1$, 由式(24)和式(32)选取

$$P = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0.59 & -0.49 \\ -0.49 & 0.69 \end{bmatrix}, P' = I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0.54 & -0.18 \\ -0.18 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

其次, 设计编队跟踪控制器(17), 构型生成后, 编队调节器方程的解选取为 $X_{hi} = I_4 (i = 1, 2, \dots, 6)$, $U_{h1} = U_{h2} = U_{h5} = I_2 \otimes [-1 \ 0]$, $U_{h3} = U_{h4} = U_{h6} = I_2 \otimes [0 \ 1]$, 设计编队补偿输入 $\tau_i = 0$, 满足编队可行性条件. 假设3调节器方程的解选取为 $X_i = I_4 (i = 1, 2, \dots, 6)$, $U_1 = U_2 = U_5 = 0_{2 \times 4}$, $U_3 = U_4 = U_6 = I_2 \otimes [1 \ 1]$, 令 $\varepsilon = 1$, $K_{11} = K_{12} = K_{15} = I_2 \otimes [-2 \ -2]$, $K_{13} = K_{14} = K_{16} = I_2 \otimes [-1 \ -1]$, $\Gamma_i = I_2$. 最后, 设计合围控制器(34), 假设4和5的输出调节器的解选取为

$$X_{i,c} = X'_{i,c} = I_2 \otimes [1 \ 0], U_{i,c} = U'_{i,c} = I_2 \otimes [0 \ 1].$$

选取 $K_{3i} = -I_2$, $\Gamma_{i,c} = \Gamma'_{i,c} = 0_{2 \times 2}$, $(i = 7, 8, 9, 10, j = 1, 2, \dots, 6)$.

图4给出了多UAV/UGV异构集群系统在 X - Y 平面内 $t=20$ s内的整体轨迹, 以及 $t=0, 10, 15, 17, 20$ s的位置截图. 图5是编队-合围跟踪效果图. 其中, 五角星表示虚拟领导者, 三角形为UGV跟随者, 其余是UAV护卫领导者, 与虚拟领导者在同一平面的是真实的护卫领导者, 与跟随者在同一平面的是护卫领导者在地的

 图 4 集群系统 X - Y 平面整体轨迹及位置截图

 Figure 4 Position trajectories within $t=20$ s and snapshots at different time instants of the swarm system in the X - Y plane.

投影. 从图4与5可以看到, UAV形成了期望的正六边形旋转圆形编队, 并且能够跟踪虚拟领导者生成的时变参考轨迹, UGV也能进入UAV在地面投影的包围中, 异构集群系统实现了预期的时变编队-合围跟踪控制.

输出编队跟踪误差定义为 $e_i = y_i - h_{yi} - y_0$, 其欧几里得范数 $\|e_i(t)\|$ 如图6所示, 可以看到输出编队跟踪误差6 s以后就收敛于零邻域内, 可以证明异构集群系统实现了预期的编队跟踪. 输出合围误差定义为 $e_f = y_i - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} y_j$, 其欧几里得范数 $\|e_f(t)\|$ 如图7所示, 受到编队跟踪误差耦合的影响, 前期出现较大波动, 但在14 s之后仍收敛于零邻域内, 可以证明异构集群系统实现了预期的输出合围控制.

图8给出了观测器误差 $\tilde{v}_i$ 的欧几里得范数变化曲线, 在第3.5 s左右收敛于零邻域内, 说明编队跟踪的观

测器迅速达到稳定状态. 图9和10分别给出了对 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_0$ 和 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$ 的观测值误差的欧几里得范数曲线, 同上文中的输出合围误差类似, 受到编队跟踪耦合的影响, 出现较大波动, 但最终在13 s左右收敛于零邻域内, 说明输出合围的观测器均能达到稳定状态.

综上所述, 在虚拟领导者具有未知输入, 以及编队构型生成系统具有时变输入的情况下, 异构集群系统的各项误差收敛于零邻域内, 系统实现了预期的编队-合围跟踪控制.

4.2 实物等效验证

在完成数值仿真后, 已经基本验证了算法的逻辑正确, 并通过多组仿真试验, 对参数选取、算法性能及被控对象的动态响应特性之间的关系有了基本了解. 为了进一步说明所提方法的工程应用价值, 本文基

图5 集群系统编队-合围跟踪控制效果图

Figure 5 Formation-containment tracking control of swarm system.

图6 各护卫领导者的时变编队跟踪误差

Figure 6 The time-varying formation tracking errors for each guard-leader.

图 7 各跟随者的输出包围误差

Figure 7 The output containment errors for each follower.

图 8 各护卫领导者的分布式自适应观测器误差

Figure 8 Estimate errors of the distributed adaptive observer for each guard-leader.

图 9 各跟随者对 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_0$ 的分布式观测器误差

Figure 9 Estimate errors of the distributed observer (23) for each follower.

图 10 各跟随者对 $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} h_j$ 的分布式观测器误差

Figure 10 Estimate errors of the distributed observer (31) for each follower.

于自主研发的UAV/UGV空地协同验证平台开展了实物等效试验验证。

该验证平台主要包括四旋翼UAV、麦克纳姆轮UGV、UWB定位系统、自组网系统等硬件系统, 协同

控制算法运行环境等软件系统以及地面站监控、数据记录、指令收发等辅助系统. 验证平台系统整体架构如图11所示.

考虑一个多UAV/UGV异构集群系统空地协同护卫场景, 四架具有较强探测能力和一定防御能力的UAV护送三辆搭载被护卫对象的弱防御能力的UGV协同穿越危险区域.

四架护卫UAV预期以边长为4 m的正方形编队构型完成对飞行区域的搜索前进, 并跟踪指定为直线的群体宏观参考轨迹, 三辆UGV不具备探测能力和防御能力, 进入四架UAV构成的凸组合内即认为进入安全区域.

针对护卫任务需求, 将第3节设计的编队-合围跟踪控制器(17)和(33)在嵌入式机载处理系统进行工程实现, 首先对各支持分系统进行联合调试, 之后开展等效实物试验完成对算法的工程应用验证研究, 飞行试验场景如图12所示. 在飞行过程中, 四架UAV形成了预期的正方形编队构型, 并能够跟踪虚拟领导者生成的参考轨迹, 三辆UGV也能进入UAV群所构成的安全区域内, 实现了预期的编队-合围跟踪控制.

在完成试验后, 对飞行日志数据进行定量分析, 图13为 $t=0$ 到 $t=50$ s的UAV飞行轨迹及UGV轨迹图. 由图

可知, 初始时刻四架UAV随机分布在起飞区域附近, UGV在UAV群外部, 在所设计的控制器作用下, UAV群构成了期望的编队构型, UGV进入到了UAV群所构成的安全区域内部, 且UAV和UGV构成的集群系统能够跟踪虚拟领导者形成的参考轨迹, 即异构集群系统实现了期望的编队-合围跟踪控制.

5 总结

本文面向未来空地协同智能无人护卫系统的应用需求, 以多UAV/UGV组成的异构集群系统为研究对象, 基于一致性理论, 结合自适应控制律设计了编队-合围跟踪控制器. 与现有研究不同的是, 本文考虑了虚拟领导者具有未知输入, 及编队构型生成系统具有时变输入的情况, 实现了有效控制集群系统编队构型及宏观轨迹的护卫任务, 提升了异构集群系统对复杂环境的适应能力, 并且本文中集群系统涌现出了更复杂的群体智能行为. 之后, 本文进行了数值仿真与实物等效验证, 进一步说明了所提方法的工程应用价值, 体现了本文提出的方法具有极强的现实意义, 能够为未来空地协同智能作战提供有力的理论支撑.

图 11 试验平台架构图

Figure 11 Test platform architecture.

图 12 飞行试验场景图

Figure 12 Realistic scene of air trial.

图 13 飞行日志

Figure 13 Flight log.

参考文献

- 1 Tarasewich P, McMullen P R. Swarm intelligence. *Commun ACM*, 2002, 45: 62–67
- 2 Xiao R, Zhang Y, Huang Z. Emergent computation of complex systems: A comprehensive review. *Int J Biol Inspir Com*, 2015, 7: 75–97
- 3 Cheng Z Y, Ren G Q, Zhang Y, et al. The status and trend of joint application of air and ground unmanned equipments (in Chinese). *Tactical Missile Technol*, 2018, 6: 7–12 [程子阳, 任国全, 张银, 等. 空地无人装备联合应用现状与趋势. *战术导弹技术*, 2018, 6: 7–12]
- 4 Wang X, Ni W, Yang J. Distributed output regulation of switching multi-agent systems subject to input saturation. *IET Control Theor Appl*, 2013, 7: 202–209

- 5 Liu X K, Wang Y W, Xiao J W, et al. Distributed hierarchical control design of coupled heterogeneous linear systems under switching networks. *Int J Robust Nonlin Contr*, 2017, 27: 1242–1259
- 6 Xu Y, Luo D L, Zhou L P, et al. A gain matrix approach for robust distributed 3D formation control with second order swarm systems (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 461–474 [徐扬, 罗德林, 周路鹏, 等. 基于增益矩阵的二阶集群系统鲁棒分布式立体编队控制. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 461–474]
- 7 Zuo S, Song Y, Lewis F L, et al. Output containment control of linear heterogeneous multi-agent systems using internal model principle. *IEEE Trans Cybern*, 2017, 47: 2099–2109
- 8 Cong Y, Feng Z, Song H, et al. Containment control of singular heterogeneous multi-agent systems. *J Frank Inst*, 2018, 355: 4629–4643
- 9 Wang Y W, Liu X K, Xiao J W, et al. Output formation-containment of coupled heterogeneous linear systems under intermittent communication. *J Frank Inst*, 2017, 354: 392–414
- 10 Han N N, Zhu Y K, Zheng Y L. The output time-varying formation-containment control for discrete-time multi-agent systems (in Chinese). *Contr Eng China*, 2021, 28: 656–664 [韩娜妮, 朱亚锟, 郑伟林. 离散多自主体系统输出时变编队-包围控制. 控制工程, 2021, 28: 656–664]
- 11 Lu C, Wang X D, Wang M Y. Research on time-varying formation control for heterogeneous agent system (in Chinese). *Tactical Missile Technol*, 2019, 5: 64–70 [卢闯, 王晓东, 王蒙一. 异构多智能体系统时变编队控制研究. 战术导弹技术, 2019, 5: 64–70]
- 12 Zhou S Q, Hua Y Z, Dong X W, et al. Air-ground time varying formation tracking control for heterogeneous UAV-UGV swarm system (in Chinese). *Aero Weaponry*, 2019, 26: 54–59 [周思全, 化永朝, 董希旺, 等. 面向空地协同作战的无人机-无人车异构时变编队跟踪控制. 航空兵器, 2019, 26: 54–59]
- 13 Tian L, Zhao Q L, Dong X W, et al. Time-varying output formation tracking for heterogeneous multi-agent systems (in Chinese). *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2020, 41: 301–312 [田磊, 赵启伦, 董希旺, 等. 异构多智能体系统分组输出时变编队跟踪控制. 航空学报, 2020, 41: 301–312]
- 14 Zhou S Q, Dong X W, Li Q D, et al. Time-varying formation control and disturbance rejection for UAV-UGV heterogeneous swarm system (in Chinese). *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2020, 41(S1): 128–139 [周思全, 董希旺, 李清东, 等. 无人机-无人车异构时变编队控制与扰动抑制. 航空学报, 2020, 41(S1): 128–139]
- 15 Tian L, Wang M, Zhao Q, et al. Distributed time-varying group formation tracking for cluster systems under switching topologies (in Chinese). *Sci Sin Inf*, 2020, 50: 408–423 [田磊, 王蒙一, 赵启伦, 等. 拓扑切换的集群系统分布式分组时变编队跟踪控制. 中国科学: 信息科学, 2020, 50: 408–423]
- 16 Haghshenas H, Badamchizadeh M A, Baradarannia M. Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems. *Automatica*, 2015, 54: 210–216
- 17 Chu H, Gao L, Zhang W. Distributed adaptive containment control of heterogeneous linear multi-agent systems: An output regulation approach. *IET Control Theor Appl*, 2016, 10: 95–102
- 18 Qin J, Ma Q, Yu X, et al. Output containment control for heterogeneous linear multiagent systems with fixed and switching topologies. *IEEE Trans Cybern*, 2019, 49: 4117–4128
- 19 Jiang W, Wen G, Peng Z, et al. Fully distributed formation-containment control of heterogeneous linear multiagent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2018, 64: 3889–3896
- 20 Zhan X, Hao L, Han T, et al. Adaptive bipartite output consensus for heterogeneous multi-agent systems with quantized information: A fixed-time approach. *J Frank Inst*, 2021, 358: 7221–7236
- 21 Atrianfar H. Sampled-time containment control of high-order continuous-time mass under heterogenous time-varying delays and switching topologies: A scrambling matrix approach. *Neurocomputing*, 2020, 395: 24–38
- 22 Hua Y, Dong X, Han L, et al. Formation-containment tracking for general linear multi-agent systems with a tracking-leader of unknown control input. *Syst Contr Lett*, 2018, 122: 67–76
- 23 Liao R, Han L, Dong X, et al. Finite-time formation-containment tracking for second-order multi-agent systems with a virtual leader of fully unknown input. *Neurocomputing*, 2020, 415: 234–246
- 24 Lu Y, Dong X, Li Q, et al. Time-varying group formation-containment tracking control for general linear multiagent systems with unknown inputs. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 1–13
- 25 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2004, 49: 1520–1533

- 26 Wei R, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50: 655–661
- 27 Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1952
- 28 Qu Z. Cooperative Control of Dynamical Systems. London: Springer, 2009
- 29 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994
- 30 Ren W, Sorensen N. Distributed coordination architecture for multi-robot formation control. *Robot Auton Syst*, 2008, 56: 324–333

Formation-containment tracking intelligent control for heterogeneous swarm systems under unknown input

WANG LinBo¹, WANG MengYi¹, ZHOU SiQuan¹, JIANG Yong², HUA YongZhao³ & DONG XiWang^{3,4}

¹ Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China;

² Changfeng Electromechanical Technology Design Academy, Beijing 100854, China;

³ Institute of Artificial Intelligence, Beihang University, Beijing 100191, China;

⁴ School of Automation Science and Electronic Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China

The containment tracking control of swarm systems is an important approach for the emergence of swarm intelligence at the control level, which has potential applications in the intelligent war era. Aiming at the requirements of military tasks in the future battlefield and focusing on typical mission scenarios, such as military goods and important people escort, this thesis investigates the distributed formation-containment tracking control problem of heterogeneous swarm systems under an unknown input to realize intelligence emergence in air-ground cooperative operation. First, the algebraic graph theory is introduced to establish a hierarchical heterogeneous swarm system model with unknown input. Next, in combination with the adaptive control law and by using the local information interaction between neighbors, the edge-based distributed formation-containment tracking controllers are designed, and the stability of the closed-loop swarm systems is proven; otherwise, the more complex swarm intelligence characteristics in this thesis are analyzed and summarized. Finally, a simulation example is provided to demonstrate that the proposed approach can achieve the expected formation-containment tracking control. A physical equivalent verification system is also established to verify the effectiveness of the approach, which provides strong theoretical support for the large-scale cooperative escort of air-ground.

heterogeneous swarm systems, containment tracking control, unknown input, swarm intelligence

doi: [10.1360/SST-2021-0373](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0373)