SCIENTIA SINICA Mathematica

### 论 文



# 基于吴方法的确定微分方程对称 Lie 代数结构 常数机械化算法

特木尔朝鲁1\*, 魏康康1, 姚裕丰1, 苏道2

- 1. 上海海事大学文理学院, 上海 201306;
- 2. 内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010057

E-mail: tmchaolu@shmtu.edu.cn, weikangkang@sunkongedu.com, yfyao@shmtu.edu.cn, inmathematica@126.com

收稿日期: 2018-06-19;接受日期: 2018-10-25;网络出版日期: 2019-03-15;\*通信作者国家自然科学基金(批准号: 11571008, 11771279和 11661060)资助项目

**摘要** 本文基于微分形式吴方法理论及算法给出无需确定对称 Lie 代数本身而事先构造其同构像 (具有同结构常数的 Lie 代数) 的机械化算法. 该算法有效提高构造 (偏) 微分方程 (组) 对称 Lie 代数的效率,并可应用于对称 Lie 代数各类性质的机械化分析和判定. 最后给出算例验证算法的有效性.

关键词 微分形式吴方法 (偏) 微分方程 对称 Lie 代数 确定方程组 机械化算法

MSC (2010) 主题分类 03F03, 03F65, 35A30, 58J70, 58J72

#### 1 引言

18 世纪, 挪威数学家 Lie 建立了求解微分方程的连续变换群, 即对称方法及理论 (参见文献 [1-3]), 不仅统一了求解线性 (偏) 微分方程的各类方法, 而且适用于非线性方程的求解. 在近几十年, 由于计算机符号计算能力的提高, 该方法有了很大的发展. 例如, 在经典对称概念基础上, 人们提出了各类广义对称概念和方法 (参见文献 [3,4]), 同时, 对称方法被广泛应用于数学、物理和力学等诸多科学领域,已成为普适性的数学方法之一 (参见文献 [4]). 但应用对称方法的前提是, 确定给定微分方程的对称.目前, 确定各类对称的方法仍基于传统 Lie 算法, 其中涉及解析和符号求解超定线性偏微分方程组 (称为确定组) 的问题. 一般来讲, 确定组是大规模超定偏微分方程组, 其求解难度大. 目前还没有很有效的方法克服这个困难 (参见文献 [5]). 文献 [1-3] 详细叙述了传统 Lie 算法; 文献 [4-6] 分析和探讨了传统 Lie 算法中存在的问题和解决思路; 文献 [7-9] 探索了不求解确定组而确定对称 Lie 代数性质的方法; 文献 [6,10-14] 进行了系列研究, 并提出了基于微分形式吴方法的确定对称方法, 在一定程度上提高了计算 (偏) 微分方程 (组) 对称的效率; 文献 [4,15] 综述了对称算法及实现的程序; 文献 [16] 提出了借助 Lie 代数性质和一些简单对称 (如平移、伸缩对称等) 来降低求解确定方程组难度的一种方法.

英文引用格式: Temuer C, Wei K K, Yao Y F, et al. A mechanical algorithm for constructing structural constants of the Lie algebra of symmetry of differential equations based on Wu's method (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 751–764, doi: 10.1360/N012018-00165

但在该方法中用到的所谓超定方程组的标准形式 (standard form), 其定义是形式化的, 算法实现缺乏 严格理论基础. 文献 [17] 给出了相关线性偏微分系统解的有限维分解研究.

吴方法是我国数学家吴文俊先生在 20 世纪 70 年代末提出的分析和构造多元多项式系统零点集的特征列集理论和算法. 该方法的提出促进了数学机械化、代数几何、计算机学科、人工智能等领域的发展. 同时, 其应用取得了举世瞩目的成果 (参见文献 [18-21]). 吴方法在微分问题上的推广应用是人们正在致力探索的研究方向. 我们系统研究了微分形式吴方法的推广 (参见文献 [6,10-14,22,23]) 及其在对称问题中的应用 (参见文献 [24-29]). 我们知道吴方法中的核心概念特征列集具有良好的三角化 (标准化)、可积对合 (或称被动的, passive) 结构, 其定义和计算有严格的理论基础, 且适用于广泛领域. 从而基于特征列集方法设计实现有效降低求解确定组的难度, 进而提高计算微分方程对称效率的算法, 具有理论意义和应用价值.

本文将用微分形式吴方法 (微分特征列集算法) 给出无需求解确定组而事先确定微分方程对称 Lie 代数结构常数算法 (构造同构 Lie 代数), 进而给出一种降低求解确定组难度、提高计算 (偏) 微分方程对称效率的新方法. 同时提出的算法还可应用于微分方程对称 Lie 代数性质 (如单性、半单性、可解性、幂零性等的判定, 子代数分类、Levi 分解、直和分解、优化系统的构造等) 的机械化计算和判定中(参见文献 [30]).

本文余下内容安排如下. 第 2 节介绍微分方程对称基本概念和 Lie 算法. 第 3 节介绍微分形式吴方法基本概念和结论. 第 4 节是本文的核心内容. 本节基于吴方法, 给出了不需要求解确定组的前提下能够确定对称 Lie 代数结构常数的算法. 第 5 节给出示范性算例, 说明本文所提出算法的有效性和其在确定对称中的简化作用. 第 6 节给出一些讨论.

本文中基础数域为实数域  $\mathbb{R}$ . 记  $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$  为自变量向量,  $u=(u^1,\ldots,u^q)$  为未知函数向量, 并记向量  $z=(x,u)\in\mathbb{R}^N$  (N=p+q) 和偏导数向量  $\partial_z=(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_p},\partial_{u^1},\ldots,\partial_{u^q})$ . 用  $\mathbb{Z}_+$  表示非负整数集. 对  $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{Z}_+^p$  和  $x^0=(x_1^0,\ldots,x_p^p)\in\mathbb{R}^p$ , 记  $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_p!$ ,  $|\alpha|=\sum_i\alpha_i$ ,  $(x-x^0)^\alpha=\prod_{i=1}^p(x_i-x_i^0)^{\alpha_i}$ , 记偏导数  $u_\alpha^j=\partial^{|\alpha|}u^j/\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_p}^{\alpha_p}$  及全导数  $D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\cdots D_{x_p}^{\alpha_p}$ , 其关于  $x_i$  的全导数. 另外,对  $k\in\mathbb{Z}_+$ ,记  $u^{(k)}=\{u_\alpha^j:1\leqslant j\leqslant q,\alpha\in\mathbb{Z}_+^p, |\alpha|\leqslant k\}$ ,记  $\partial U=\bigcup_{k=0}^\infty u^{(k)}$ ;用  $\mathbb{R}[x,\partial U]$  记数域  $\mathbb{R}$  上的关于自变量 x 和因变量 u 的全体微分多项式;用  $e_i$  记第 i个元素为 1、其余分量为 0 的  $\mathbb{R}^N$  的标准基向量.

本文算例中用了微分多项式的全导数阶化字典序 (total derivative graded lexicographic rank) [20,31].

#### 2 微分方程对称

本节给出本文中将涉及的微分方程对称及吴方法的一些相关概念和基本结论 (参见文献 [1-3]).

#### 2.1 微分方程对称及其确定

设有实数域  $\mathbb{R}$  上的 n 阶微分方程 (组)

$$\Delta: \Delta^{i}(x, u^{(n)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$
 (2.1)

其中  $\Delta^i \in \mathbb{R}[x, \partial U]$ . 方程 (2.1) 的对称群是指单参数连续变换群

$$\begin{cases} x_i^* = f_i(x, u, \epsilon) = x_i + \epsilon \xi^i(x, u) + o(\epsilon^2), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u_j^* = g_j(x, u, \epsilon) = u_j + \epsilon \phi^j(x, u) + o(\epsilon^2), & j = 1, 2, \dots, q, \end{cases}$$
(2.2)

使方程 (2.1) 在此变换下不变. 根据 Lie 群基本定理, 要确定对称 (2.2) 等价于确定其对应无穷小生成元 (等价地也称为对称),

$$X = \xi^{i}(x, u) \frac{\partial}{\partial_{x_{i}}} + \phi^{j}(x, u) \frac{\partial}{\partial_{u^{j}}} = \Phi \cdot \partial_{z}, \tag{2.3}$$

即确定无穷小 (生成函数)  $\Phi = (\xi^1, \dots, \xi^p, \phi^1, \dots, \phi^q)$ . (2.3) 中 i(j) 从 1 到 p(q) 求和, 这里用到省略和号的记法 (以下类似).

确定 (2.3) 的具体步骤如下:

步骤 1 构造 X 的 n 阶延拓,  $X^{(n)} = X + \sum_{i=1}^{q} \sum_{A_{\alpha}} \zeta_{\alpha}^{i}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial_{u_{\alpha}^{i}}}$ , 其中求和集合  $A_{\alpha} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{p}, 1 \leqslant |\alpha| \leqslant n\}$ , 且  $\zeta_{\alpha}^{i}(x, u^{(n)})$  由  $\zeta_{\alpha}^{i}(x, u^{(n)}) = D^{\alpha}(\phi^{i} - \sum_{j=1}^{p} \xi^{j} u_{e_{i}}^{j}) + \sum_{j=1}^{p} \xi^{j} u_{e_{i}+\alpha}^{j}$  给出.

**步骤 2** 产生确定方程组. 由 Lie 判别准则, 变换 (2.2) 或 (2.3) 成为方程 (2.1) 的对称的充要条件 是 X 满足无穷小方程组

$$X^{(n)}(\Delta)|_{\Delta=0} = 0. {(2.4)}$$

令 (2.4) 中独立变量  $u^l_{\alpha}$  的系数为 0, 即得  $\xi^i$  和  $\phi^j$  满足的超定线性齐次偏微分方程组, 称为 (2.2) 或 (2.3) 的确定方程组 (determining equations).

步骤 3 确定对称 X. 解析求解由步骤 2 推出的确定方程组, 得到  $\varepsilon^i$  和  $\phi^i$ , 进而确定 X.

**注 2.1** 由于步骤 3 中的解析求解过程是非构造的, 从而步骤 3 是确定对称 (2.3) 的难点, 也是应用对称方法的一个瓶颈问题 (参见文献 [4,5]).

#### 2.2 对称 Lie 代数

设确定方程组 (2.4) 的解集为  $\mathcal{S}$ . 由确定组的线性齐次性知,  $\mathcal{S}$  构成线性空间, 且任意的解  $\Phi \in \mathcal{S}$  唯一对应对称算子 (2.3), 从而, (2.3) 的全体构成一个线性空间, 记为  $\mathcal{L}$ . 从而, 我们可以视  $\mathcal{S}$  和  $\mathcal{L}$  为等同的.

**注 2.2** 在微分方程连续变换群 (对称) 理论中, 对称 (2.2) 或 (2.3) 中的生成函数  $\xi^i$  和  $\phi^j$  是关于其变量的解析函数 [1-3],即可展开为幂级数表示. 从而, 解集 S 是解析函数解空间.

由 Lie 理论知, 对  $\mathcal{L}$  的任意两个元素  $X = \Phi_X^i \partial_{z^i}$  和  $Y = \Phi_Y^i \partial_{z^i}$ , 定义如下 Lie 积:

$$[X,Y] = XY - YX = (X(\Phi_Y^i) - Y(\Phi_X^i))\partial_{z^i}, \tag{2.5}$$

则线性空间  $\mathcal{L}$  构成 Lie 代数 [32], 称其为微分方程 (2.1) 的对称 Lie 代数. 从而, 对任意  $X \in \mathcal{L}$  和  $Y \in \mathcal{L}$ , 其 Lie 积  $[X,Y] \in \mathcal{L}$ . 因此, 我们有下面的结论:

引理 2.1 对 (2.5), 有向量  $(X(\Phi_V^i) - Y(\Phi_X^i), i = 1, 2, ..., N) \in \mathcal{S}$ .

Lie 代数的维数是它作为线性空间的空间维数 (参见文献 [32]).

注 2.3 本文仅考虑有限维的对称 Lie 代数.

#### 3 微分形式吴方法的基本概念和结论

本节给出本文用到的微分形式吴方法 (微分特征列集算法) 的基本概念和结论.

#### 3.1 特征列集算法及零点分解定理

设  $\mathcal{D}$  是自变量为  $z=(z_1,z_2,\ldots,z_N)$ 、因变量为  $\Phi=(\Phi^1,\Phi^2,\ldots,\Phi^M)$  的一个微分多项式组, 即  $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}[z,\partial\Phi]$ . 记微分多项式组  $\mathcal{D}$  在某扩域上 (如亚纯函数域或其函数子域) 的零点集为  $Z(\mathcal{D})$ ; 记多项式 (组) P 对多项式 Q 的吴 -Ritt 余式为 Prem(P/Q); 用 J 记特征集的初式和隔离子的乘积, 用 I 记  $\mathcal{D}$  的可积多项式.

下面给出微分形式吴方法的概念和基本结论 (参见文献 [18-23,31]).

**定理 3.1** (特征列集算法) 在给定的多项式序  $\prec$  下, 对一个微分多项式组  $\mathcal{D}$ , 特征列集算法在有限步内确定一个微分多项式组  $\mathcal{C}$  满足

- (i) C 是微分升列;
- (ii)  $\operatorname{Prem}(\mathcal{D}/\mathcal{C}) = 0$ ;
- (iii) Prem(I/C) = 0.

**定义 3.1** (特征列集) 对微分多项式组  $\mathcal{D}$ , 满足定理 3.1(i)-3.1(iii) 的微分多项式组  $\mathcal{C}$  称为  $\mathcal{D}$  的特征列集.

定理 3.2 (良序原理) 设 C 是多项式组 D 的特征列集,则有如下基本性质:

- (i)  $Z(\mathcal{C}/J) \subset Z(\mathcal{D}) \subset Z(\mathcal{C}), Z(\mathcal{D}/J) = Z(\mathcal{C}/J)$ ;
- (ii)  $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{C}/J) \cup Z(\mathcal{D}, J)$ ,

其中  $J \in C$  的初式和隔离子的乘积.

定理 3.3 (零点分解) 在给定微分多项式序<下,对给定的微分多项式组 $\mathcal{D}$ ,有

$$Z(\mathcal{D}) = \bigcup_{k} Z(\mathcal{C}_k/J_k),$$

其中  $C_k$  是 D 的 (不可约) 特征列集列, 且  $J_k$  是  $C_k$  的初式和隔离子的乘积.

由以上定理可知,特征列集具有如下性质:

- (1) 三角化结构. 定理 3.1(i) 说明 C 具有三角化结构.
- (2) 零点集不变性. 定理 3.1(ii)、3.2(i) 和 3.2(ii) 表示 D 的零点集包含于 C 的零点集中, 并当  $J \neq 0$  时, Z(D) = Z(C), 即 D = 0 和 C = 0 是同解. 这意味着求解 D = 0 的问题可以转化为求解 C = 0 的问题. 而后者往往容易处理.
- (3) 可积对合性. 定理 3.1(iii) 说明特征列集  $\mathcal{C} = 0$  是可积对合的或称  $\mathcal{C}$  是被动的 (passive). 本性质及零点集不变性说明特征列集包含了求解  $\mathcal{D} = 0$  的全部信息.
- (4) 不可约分解. 可约微分多项式组的零点集可通过零点分解定理化为系列不可约特征列集拟代数簇的并.

#### 3.2 不可约特征列集维数及母点定理

设  $\mathcal{C}$  是不可约微分多项式特征列集, 记  $\mathcal{C}$  中首导数 (首项中出现的主元导数) 全体为  $\mathscr{P}_0 = \{D^{\alpha}\Phi^p\}$ , 主导数 (首导数的导数) 全体为  $\mathscr{P} = \{D^{\beta}(D^{\alpha}\Phi^p) \mid D^{\alpha}\Phi^p \in \mathscr{P}_0, 0 \prec \beta \in \mathbb{Z}_+^N\}$ , 则对应参数导数全体为

$$\mathcal{Q} = \partial \Phi \setminus \{ \mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P} \}. \tag{3.1}$$

因此, 特征列集对应方程 C=0 中的每个方程均可表示成以下形式:

$$J_{\alpha,s}(D^{\alpha}\Phi^{s})^{d_{\alpha,s}} + \mathbb{K} \mathring{\mathfrak{M}} \ddot{\mathfrak{M}} = 0, \quad s \leqslant N, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{N}, \tag{3.2}$$

其中  $D^{\alpha}\Phi^{s} \in \mathcal{P}_{0}, d_{\alpha,s} \in \mathbb{Z}_{+}, J_{\alpha,s} \in \mathbb{R}[z, \partial \Phi]$  是  $\mathcal{C}$  的初式.

由于参数导数在确定 Z(C) 中起着自由参数作用, 因此, 我们有如下定义.

定义 3.2 (维数) 称参数导数集合  $\mathcal{Q} = \partial \Phi \setminus \{ \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P} \}$  中元素的个数为特征列集  $\mathcal{C}$  的维数, 记为  $\dim(\mathcal{C})$ . 称  $\mathcal{Q}$  中关于  $\Phi^s$  的导数元素个数为方程  $\mathcal{C} = 0$  的解分量  $\Phi^s$  的维数, 记为  $n_s$ .

由此定义, 易知下面的定理:

定理 3.4 (有限维定理) 对不可约微分特征列集 C, 其维数  $\dim(C)$  有限的充要条件是, 对每一个  $s=1,2,\ldots,N$  都存在  $k_i^s \in \mathbb{Z}_+$   $(i=1,2,\ldots,N)$ , 使得  $\{D^{k_i^s e_i}\Phi^s: i=1,2,\ldots,N\} \subset \mathcal{P}_0$  或等价地  $n_s$   $(s=1,2,\ldots,N)$  都有限.

证明 维数  $\dim(C)$  有限的充要条件是参数导数集  $\mathcal{Q}$  是有限的 (见 (3.1)). 若存在 s 使得对某 i ( $1 \le i \le N$ ) 和任意  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,有  $D^{ke_i}\Phi^s \notin \mathscr{P}_0$ ,则对  $k' \ge k$ , $D^{k'e_i}\Phi^s$  都成为参数导数,即存在无限多个参数导数或等价地至少有一个  $n_s$  是无限的. 从而由反证法定理获证.

文献 [20] 给出如下定理.

定理 3.5 (母点定理) 设  $\mathcal{C}$  是不可约微分特征列集且  $d = \dim(\mathcal{C})$  有限, 则对给定初值点  $z_0 \in \mathbb{R}^N$  上的参数导数值 (称初值)  $\mathcal{Q}|_{z_0} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ , 存在  $\mathcal{C} = 0$  的唯一形式幂 (Taylor) 级数解  $\Phi = \{\Phi^1, \dots, \Phi^M\}$ ,

$$\Phi^{s}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+}^{N}} \frac{c_{\alpha}^{s}}{\alpha!} (z - z_{0})^{\alpha}, \quad s = 1, 2, \dots, M,$$

且其成为升列  $\mathcal{C}$  的母点, 其中  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ ,  $c_\alpha^s$  为  $\mathbb{R}$  的某扩域中  $D^\alpha \Phi^s$  的初值点  $z_0 \in \mathbb{R}^N$  上的值. 该值由参数导数值  $\boldsymbol{a}$  唯一确定.

以上特征列集理论和算法,为微分方程对称计算提供了有效的算法理论基础(参见文献[6,10-14]).

#### 4 确定对称 Lie 代数结构常数算法

根据 Lie 代数理论可知, 确定 Lie 代数等价于确定其结构常数 (参见文献 [32]). 从而, 下面给出基于微分多项式组特征列集理论和算法确定微分方程 Lie 代数结构常数的一种算法, 即构造对称 Lie 代数的同构代数算法.

#### 4.1 算法理论

为统一记号,令  $z=(z_1,z_2,\ldots,z_N)=(x,u)$ ,并记 (2.3) 中的生成函数为  $\Phi=\{\Phi^1,\Phi^2,\ldots,\Phi^N\}$ ,其中  $\Phi^i=\xi^i(z)$ , $\Phi^{p+j}=\phi^j(z)$ ,N=p+q. 设  $\mathcal{D}=0$  是由 (2.4) 确定的微分方程 (2.1) 的对称确定组. 方程左端  $\mathcal{D}$  构成关于  $\Phi$  的一个微分多项式组,即  $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}[z,\partial\Phi]$ . 设其特征列集  $\mathcal{C}$  的维数为  $\mathcal{d}$ . 由于  $\mathcal{C}$  的线性性知  $\mathcal{C}$  是不可约的. 从而,在 (3.2) 中,初式  $J_{\alpha,s}\in\mathbb{R}[z]$  仅依赖自变量 z,且  $d_{\alpha,s}\equiv 1$ . 当其初式乘积  $J(\mathcal{C})\neq 0$  时,由吴方法的良序原理知, $Z(\mathcal{D})=Z(\mathcal{C})$ . 从而,求解  $\mathcal{D}=0$  等价于求解  $\mathcal{C}=0$  (参见文献 [6,12-14]).

#### 4.1.1 对称 Lie 代数的 $\mathbb{R}^d$ 表示

对  $\mathcal{D}$  的特征列集  $\mathcal{C}$ , 适当选取初值点  $z_0 \in \mathbb{R}^N$ , 令参数导数初值集为

$$V = \{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d \mid \text{初值问题 } \mathcal{C} = 0, \mathcal{Q} |_{z_0} = \boldsymbol{a} \text{ 存在唯一解析函数解} \},$$

则有下面的定理:

定理 4.1 (表示定理) 设  $\mathcal{C}$  的维数为 d, 则对初式  $J = \Pi J_{\alpha,s}(z_0) \neq 0$  的初值点  $z_0$ , V 是 d 维线性空间日  $V = \mathbb{R}^d$ .

证明 由齐次线性方程组解的性质易证明 V 是线性空间. 另外, 显然有  $V \subset \mathbb{R}^d$ . 对任意  $a \in \mathbb{R}^d$ , 因为  $\mathcal{C}$  是实数域上的线性微分多项式组, 所以, 由定理 3.5 知, 以  $\mathcal{Q}|_{z_0} = a$  作为初值的  $\mathcal{C} = 0$  存在唯一解析函数解. 因此,  $a \in V$ , 即  $V = \mathbb{R}^d$ .

#### 4.1.2 一个同构定理

选初值点  $z_0 \in \mathbb{R}^N$  使得  $J(\mathcal{C})|_{z_0} \neq 0$ , 则由定理 3.5 知, 任意一个参数导数初值  $\mathbf{a} \in V$  对应唯一解  $\Phi(\mathbf{a}) \in \mathcal{S}$ , 即对应 Lie 代数  $\mathcal{L}$  的元素  $X_{\mathbf{a}} = \Phi(\mathbf{a}) \cdot \partial_z$  (见 (2.3)). 反之亦然. 因此, 我们得到 1-1 映射

$$\psi: V \to \mathcal{L}, \quad \forall \, \boldsymbol{a} \in V, \quad \exists \, \psi(\boldsymbol{a}) = X_{\boldsymbol{a}} \in \mathcal{L}.$$
 (4.1)

由  $\mathcal{C}=0$  的线性性和齐次性易证  $\psi$  是线性的. 再由第 2 节的 (2.5) 和引理 2.1 知, 对  $\mathcal{L}$  中任意两元素  $X_a$  和  $X_b$ , 存在  $X_c \in \mathcal{L}$  使得  $X_c = [X_a, X_b]$ . 从而, 由 (4.1) 知,  $X_c$  对应  $\mathcal{C}=0$  的另一个解  $\Phi(c)$ , 其中  $c \in V$  是 a 和 b 的函数, 记为  $c = \phi(a, b)$ .

现在在 V 上引入 Lie 积.

定义 **4.1** (Lie 积) 对任意  $a, b \in V$ , 定义其 Lie 积 (记为 [a, b]) 为  $[X_a, X_b]$  (=  $X_c$ ) 对应的参数 导数初值  $c = \phi(a, b)$ , 即  $[a, b] = c = \phi(a, b) = (\phi^1(a, b), \dots, \phi^d(a, b))$ .

由此, 我们有如下定理.

定理 4.2 (同构定理) 在以上定义的 Lie 积下, V 构成 Lie 代数, 并与  $\mathcal{L}$  同构 (有相同结构常数). 证明 显然,  $\psi$  是空间同构. 故为证代数同构只需证明  $\psi$  保持 Lie 积. 设 [a,b]=c, 则  $[X_a,X_b]=X_c$ . 从而有  $\psi([a,b])=\psi(c)=X_c=[X_a,X_b]=[\psi(a),\psi(b)]$ .

#### 4.2 结构常数算法

基于定理 4.2, 下面先给出确定函数  $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  的一个算法, 由此导出确定微分方程 Lie 代数结构常数算法.

第 1 步 构造参数导数向量算子  $\mathfrak{D}$ . 对任意  $a,b \in V$ . 根据 (2.5), 有

$$X_{\phi(a,b)} = \Psi \cdot \partial_z, \tag{4.2}$$

其中  $\Psi = \Phi(c) = (\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^N) \in \mathcal{S}$ , 且

$$\Psi^k = X_{\boldsymbol{a}}(\Phi^k(\boldsymbol{b})) - X_{\boldsymbol{b}}(\Phi^k(\boldsymbol{a})), \quad k = 1, \dots, N.$$

$$(4.3)$$

设  $\mathcal{C}$  的参数导数集  $\mathcal{Q}$  中出现的关于  $\Phi^i$  的导数为  $\{D^{\alpha_1^i}\Phi^i,\ldots,D^{\alpha_{n_i}^i}\Phi^i\}$   $(i=1,2,\ldots,N)$ , 用这些导数定义一个向量算子  $\mathfrak{D}$  (称参数导数向量算子), 其在任意可微向量函数  $\Theta=(\Theta^1,\ldots,\Theta^N)$  上的作用为

$$\mathfrak{D}(\Theta) = \{ D^{\alpha_1^1} \Theta^1, \dots, D^{\alpha_{n_1}^1} \Theta^1, \dots, D^{\alpha_1^N} \Theta^N, \dots, D^{\alpha_{n_N}^N} \Theta^N \}, \tag{4.4}$$

即作用结果为 Θ 的参数导数集.

第 2 步 计算  $c = \phi(a, b)$ . 为了确定  $\phi(a, b)$ , 需要由 (4.3) 和 (4.4) 确定  $\mathfrak{D}(\Psi)$ . 为此, 令  $\mathcal{C}_a$  为  $\mathcal{C}$  中 的  $\Phi$  换成  $\Phi(a) \in \mathcal{S}$  后的关于  $\Phi(a)$  的微分升列. 显然, 由 (4.3) 的右端知,  $\mathfrak{D}(\Psi)$  中含有  $\mathcal{C}_a$  和  $\mathcal{C}_b$  的首

导数或主导数. 因此, 把 $\mathfrak{D}(\Psi)$  用升列  $\mathcal{C}_a$  和  $\mathcal{C}_b$  进行吴消元约化使其仅由参数导数表式. 从而, 由 (4.1) 和 (4.2) 知,

$$\phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathfrak{D}(\Psi)|_{Z(\mathcal{C}_{-}, \mathcal{C}_{+})}. \tag{4.5}$$

对 (4.5) 中的消元过程可由吴消元算法 [20]

$$J \cdot \mathfrak{D}(\Psi) = \operatorname{Prem}(\operatorname{Prem}(\mathfrak{D}(\Psi)/\mathcal{C}_a)/\mathcal{C}_b) \tag{4.6}$$

实现, 其中 J = J(z) 是由  $C_a$  和  $C_b$  的初式的某些乘积构成的  $\mathbb{R}[z]$  中的向量. 显然, (4.6) 的右端是  $\Phi(a)$  和  $\Phi(b)$  的初值 (参数导数值) 的表达式, 从而, (4.5) 和 (4.6) 给出非退化条件  $J \neq 0$  下确定初值  $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  的公式.

至此, 我们得到了计算  $c = \phi(a, b)$  的算法. 下面推广其为确定结构常数的算法.

第 3 步 确定结构常数. 选定线性空间 V 的一组基  $\varepsilon_i$   $(i=1,2,\ldots,d)$ , 并在 (4.5) 中令  $\boldsymbol{a}=\varepsilon_i$ ,  $\boldsymbol{b}=\varepsilon_i$ , 则经计算 Lie 积

$$\phi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = [\varepsilon_i, \varepsilon_j] = c_{ij}^k \varepsilon_k, \tag{4.7}$$

求得  $c_{ii}^k$ , 即 Lie 代数  $\mathcal{L}$  在同构对应基  $X_i$  (=  $X_{\varepsilon_i}$ ) 下的结构常数  $c_{ii}^k$ .

注 4.1 以上过程中不涉及求解确定组的问题.

**注 4.2** 初值点的选取. 为了第 2 步中的条件成立, 我们根据初式 J=J(z) 的表达式适当选取 初值点  $z_0\in\mathbb{R}^N$  使得  $J(z_0)\neq 0$ .

注 **4.3** 一般选择  $V = \mathbb{R}^d$  的标准基  $e_i$  (第 i 分量为 1, 其余为 0) 为第 3 步中的基  $\varepsilon_i$ .

综上, 我们得到无需求解确定组计算对称 Lie 代数结构常数算法.

算法: 在不求解确定组下计算给定 (偏) 微分方程 (组) 对称 Lie 代数结构.

**输入:**一个 (偏) 微分方程 (组)  $\Delta$ .

输出: 方程  $\Delta$  的对称 Lie 代数结构常数  $c_{ij}^k$ .

#### 开始:

步骤 1 计算方程  $\Delta$  的对称确定组 D 和其特征集 C (用文献 [6,12,14] 中的算法);

**步骤 2** 确定 C 的参数导数集、维数 d 和参数导数向量算子 (4.4) (用 (3.1)):

步骤 3 计算 (4.3) 和 (4.6), 然后确定 (4.5);

步骤 4 在 (4.7) 中令  $a = e_i$  和  $b = e_j$ , 得到在基  $X_i = \psi(e_i)$  下的对称 Lie 代数结构常数  $c_{ij}^k$ . 结束.

## 5 算例

我们知道给定方程的一些特殊对称是容易确定的,例如,对时间、空间的平移和旋转等对称通过观察可以得到或从方程表示的物理守恒律也可推知.另一方面,对确定方程组附加额外的条件也可获得一些特殊对称.所以,第4节提出的算法结合给定方程特殊对称信息可实现有效降低求解确定组难点,进而提高确定对称效率的目的.本节列举两个算例说明提出算法的有效性和广泛应用性.

#### 5.1 常微分方程的算例

确定微分方程

$$y'' + 3yy' + 4y^3 = 0 (5.1)$$

的对称  $X = \tau(t, y)\partial_t + \eta(t, y)\partial_y$  及其生成的对称 Lie 代数.

#### 5.1.1 结构常数的确定

步骤 1 计算该方程对称确定方程组 D 对应微分多项式组在基本序  $t \prec y \prec \tau \prec \eta$  下的特征列集

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \eta_{tt} + 8y^3 \tau_t + 6y \eta_t - 4y^3 \eta_y + 12y^2 \eta, \\ \eta_{yy} - 2\tau_{ty} + 12y \tau_y, \\ 2\eta_{ty} - \tau_{tt} + 6\eta + 6y \tau_t + 12y^3 \tau_y, \\ \tau_{yy}, \\ \tau_{tty} - 6y \tau_{ty} + 2\tau_t + 12y^2 \tau_y + 2\eta_y, \\ \tau_{ttt} - 12y^3 \tau_{ty} + 6\eta_t + 12y^2 \tau_t + 24y^4 \tau_y + 12y\eta. \end{cases}$$

显然, 其初式均为非 0 常数, 故  $Zero(\mathcal{D}) = Zero(\mathcal{C})$ .

步骤 2 由特征列集  $\mathcal{C}$  可以看出其首导数集为  $\mathcal{P}_0 = \{\eta_{tt}, \eta_{yy}, \eta_{ty}, \tau_{yy}, \tau_{tty}, \tau_{ttt}\}$ . 从而, 参数导数集为  $\mathcal{Q} = \{\eta, \eta_t, \eta_u, \tau, \tau_t, \tau_u, \tau_{tt}, \tau_{tu}\}$ . 故由定义 3.2 知  $\mathcal{C}$  的维数为 d = 8.

由参数导数引入算子  $\mathfrak{D}=(D^{\alpha_1^1},D^{\alpha_2^1},D^{\alpha_3^1},D^{\alpha_1^2},D^{\alpha_2^2},D^{\alpha_3^2},D^{\alpha_4^2},D^{\alpha_5^2})$ , 其中  $\alpha_1^1=\{0,0\}$ ,  $\alpha_2^1=\{1,0\}$ ,  $\alpha_3^1=\{0,1\}$ ,  $\alpha_1^2=\{0,0\}$ ,  $\alpha_2^2=\{1,0\}$ ,  $\alpha_3^2=\{0,1\}$ ,  $\alpha_4^2=\{2,0\}$ ,  $\alpha_5^2=\{1,1\}$ , 其中第一和第二坐标分别对应关于 t 和 y 的偏导数. 故向量算子  $\mathfrak{D}$  的作用为  $\mathfrak{D}(\Psi^1,\Psi^2)=(\Psi^1,\Psi^1_t,\Psi^1_t,\Psi^2_t,\Psi^2_t,\Psi^2_t,\Psi^2_t,\Psi^2_t,\Psi^2_t)$ 

步骤 3 令  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ , 其中  $\Phi^1 = \eta$ ,  $\Phi^2 = \tau$ . 选择初值点  $z_0 = (t_0, y_0) = (0, 0) \ (J(z_0) \neq 0)$  及其上的任意两个参数值

$$\overline{\mathcal{Q}}|_{z_0} = (\overline{\eta}, \overline{\eta}_t, \overline{\eta}_y, \overline{\tau}, \overline{\tau}_t, \overline{\tau}_y, \overline{\tau}_{tt}, \overline{\tau}_{ty}) = (a_1, \dots, a_8) = \boldsymbol{a},$$

$$\widetilde{\mathcal{Q}}|_{z_0} = (\widetilde{\eta}, \widetilde{\eta}_t, \widetilde{\eta}_u, \widetilde{\tau}, \widetilde{\tau}_t, \widetilde{\tau}_u, \widetilde{\tau}_{tt}, \widetilde{\tau}_{ty}) = (b_1, \dots, b_8) = \boldsymbol{b},$$

并设 C=0 对应的解分别为  $\Phi(a)=(\bar{\eta},\bar{\tau})$  和  $\Phi(b)=(\tilde{\eta},\tilde{\tau})$ .

先在初值点  $z_0$  上计算  $\mathfrak{D}(\Phi)$ , 其结果用  $\{C_a,C_b\}$  约化之后再用给定初值表示得 (4.5), 即  $c=\phi(a,b)=\mathfrak{D}(\Phi)|_{Z(C_a,C_b)}$ , 其分量为

$$\phi^{1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{1} = a_{4}b_{2} + a_{1}b_{3} - a_{3}b_{1} - a_{2}b_{4},$$

$$\phi^{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{1}_{t} = \frac{a_{1}b_{7} - a_{7}b_{1}}{2} + a_{5}b_{2} - a_{2}b_{5} + a_{2}b_{3} - a_{3}b_{2},$$

$$\phi^{3}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{1}_{y} = \frac{a_{4}b_{7} - a_{7}b_{4}}{2} + 3(a_{1}b_{4} - a_{4}b_{1}) + 2(a_{1}b_{8} - a_{8}b_{1}) + a_{6}b_{2} - a_{2}b_{6},$$

$$\phi^{4}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{2} = a_{4}b_{5} + a_{1}b_{6} - a_{6}b_{1} - a_{5}b_{4},$$

$$\phi^{5}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{2}_{t} = a_{1}b_{8} - a_{8}b_{1} + a_{2}b_{6} - a_{6}b_{2} + a_{4}b_{7} - a_{7}b_{4},$$

$$\phi^{6}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{2}_{t} = a_{3}b_{6} - a_{6}b_{3} + a_{4}b_{8} - a_{8}b_{4} + a_{6}b_{5} - a_{5}b_{6},$$

$$\phi^{7}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{2}_{tt} = 2(a_{3}b_{1} - a_{1}b_{3} + a_{5}b_{1} - a_{1}b_{5} + a_{2}b_{8} - a_{8}b_{2}) + 6(a_{2}b_{4} - a_{4}b_{2}) + (a_{5}b_{7} - a_{7}b_{5}),$$

$$\phi^{8}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi^{2}_{ty} = 3(a_{6}b_{1} - a_{1}b_{6}) + 2(a_{3}b_{4} - a_{4}b_{3}) + a_{3}b_{8} - a_{8}b_{3} + 2(a_{5}b_{4} - a_{4}b_{5}) - \frac{a_{7}b_{6} - a_{6}b_{7}}{2}.$$

$$(5.2)$$

步骤 4 取标准基  $\varepsilon_i = e_i \ (i = 1, 2, ..., 8)$  作为 Lie 代数  $V = \mathbb{R}^8$  的基, 则在 (5.2) 中令  $a = e_i$ ,  $b = e_i \ (i \neq j)$  得到 Lie 积表 (见表 1) 及非零结构常数

$$c_{13}^1 = 1, \quad c_{13}^7 = -2, \quad c_{14}^3 = 3, \quad c_{15}^7 = -2, \quad c_{16}^4 = 1, \quad c_{16}^8 = -3, \quad c_{17}^2 = \frac{1}{2}, \quad c_{18}^3 = -2,$$
 
$$c_{18}^5 = -2, \quad c_{23}^2 = 1, \quad c_{24}^1 = -1, \quad c_{24}^7 = 6, \quad c_{25}^2 = -1, \quad c_{26}^3 = -1, \quad c_{26}^5 = 1, \quad c_{28}^2 = 2,$$
 
$$c_{34}^8 = 2, \quad c_{36}^6 = 1, \quad c_{38}^8 = 1, \quad c_{45}^4 = 1, \quad c_{45}^8 = -2, \quad c_{47}^7 = 1, \quad c_{56}^6 = -1, \quad c_{57}^7 = 1, \quad c_{67}^8 = \frac{1}{2}.$$

根据同构性质知, 对应 Lie 代数  $L=\mathrm{Span}\{X_1,\ldots,X_8\}$  有同样的 Lie 积表和结构常数, 其中  $X_i=\psi(e_i)$  (见 (4.1)).

#### 5.1.2 对称 Lie 代数的计算

下面用第 5.1.1 小节得到的 V 的 Lie 代数结构及由给定方程特殊对称, 确定微分方程 (5.1) 的完整对称 Lie 代数.

容易观察到方程 (5.1) 不显含自变量, 因此, 该方程拥有平移对称群  $t^* = t + \epsilon$ ,  $u^* = u$ , 即拥有对称  $\partial_t \in \operatorname{Span}\{X_1, \ldots, X_8\}$ . 由 (5.2) 知,  $\partial_t$  对应  $e_4$ , 即  $X_4 = \partial_t$ . 下面利用表 1 及该显见对称出发确定其余全部对称.

首先, 对任意的  $X = \tau \partial_t + \eta \partial_y \in \mathcal{L}$ , 有  $[X, X_4] = -\tau_t \partial_t - \eta_t \partial_y$ . 从而取  $X = X_i$   $(i \neq 4)$ , 并由 Lie 积表将得到对应  $X_i$  的关于  $\tau$  和  $\eta$  的额外条件. 我们把这些新条件加到原确定方程组  $\mathcal{C}$  中得到扩充的确定组. 对此, 再用特征列集算法求解该扩充确定组确定对称  $X_i$ . 例如, 取  $X = X_6$ , 由  $[X_6, X_4] = 0$  得到  $\tau_t = \eta_t = 0$ . 从而得到  $X_6$  对应的扩充确定组  $\mathcal{D}' = \mathcal{C} \cup \{\tau_t, \eta_t\}$ . 对此再用特征列集算法得到特征列集  $\mathcal{C}' = \{\eta_t, \xi_t, 3\eta - y\eta'_y, \eta + 2y^3\xi_y\}$ . 在初值条件  $\mathfrak{D}(\eta, \tau)|_{z_0} = e_6$  下求解  $\mathcal{C}' = 0$ , 得到  $\tau = y, \eta = -2y^3$ , 即  $X_6 = y\partial_t - 2y^3\partial_y$ .

我们用同样的过程得到其余基对称,即

- (1) 由  $[X_8, X_4] = -X_6$  及上面得到的  $X_6$  推出  $X_8 = ty\partial_t + y^2(1-2ty)\partial_y$ ;
- (2)  $\boxplus [X_3, X_4] = 2X_8 \Rightarrow X_3 = -t^2y\partial_t + y(1 2ty + 2t^2y^2)\partial_y;$
- (4)  $\boxplus [X_1, X_4] = 3X_3 \Rightarrow X_1 = t^3 y \partial_t + (1 2ty)(1 ty + t^2 y^2) \partial_y;$
- (5)  $\boxplus [X_7, X_4] = -(X_5 + X_3/2) \Rightarrow X_7 = (1/2)(1 ty)t(t\partial_t + y(1 2ty)\partial_y);$
- (6)  $\boxplus [X_2, X_4] = 6X_7 X_1 \Rightarrow X_2 = (ty 1)(t^3\partial_t t(1 2ty + 2t^2y^2)\partial_y).$

从而, 最终确定  $\mathcal{L} = \operatorname{Span}(X_1, X_2, \dots, X_8)$ .

 $[e_i, e_j]$  $e_4$  $e_7$  $e_8$  $e_1$  $e_1 - 2e_7$  $3 e_3$  $-2 e_7$  $e_4 - 3e_8$  $e_{2}/2$  $2e_3 + e_5$ 0  $e_2$  $6e_7 - e_1$  $-e_2$  $e_5 - e_3$  $2e_7$  $e_2$ 0 0  $2e_8$  $e_6$  $e_8$  $e_3$  $e_5 + e_3/2$  $e_4 - 2e_8$ 0  $e_4$  $e_6$  $-e_6$  $e_7$ 0  $e_5$ 0  $e_{8}/2$  $e_6$  $e_7$ 

表 1 方程 (5.1) 的对称 Lie 积表

**注 5.1** 相比直接求解原确定组,以上给出的先由 Lie 积表得到附加条件、然后扩充确定组、再用吴方法求解确定组的过程大大降低了求解的难度.

#### 5.2 偏微分方程的算例

下面考虑 1+3 的非线性高维波动方程

$$u_{tt} = \sigma u_{xx} + \delta u_{yy} + \rho(uu_z)_z \tag{5.3}$$

的对称 Lie 代数, 其中  $\sigma$ 、 $\delta$  和  $\rho$  是非零常数.

#### 5.3 对称 Lie 代数结构

我们计算得到对称  $X = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \zeta \partial_y + \eta \partial_z + \phi \partial_u$  (其中  $\tau$ 、 $\xi$ 、 $\zeta$ 、 $\eta$  和  $\phi$  均为自变量 (t, x, y, z, u) 的函数) 的确定方程组为由 58 个方程组成的系统. 对此用文献 [13] 中给定的算法, 在序  $t \prec x \prec y \prec z \prec u \prec \tau \prec \xi \prec \zeta \prec \eta \prec \phi$  下计算得到其特征列集

$$\mathcal{C} = \{\phi_z, \phi_{yy}, \phi_{xy}, \phi_{xx}, \phi_{ty}, \phi_{tx}, \phi_{tt}, \phi - u\phi_u; \sigma u\tau_{yy} + 2\phi_t, \tau_u, \\ \tau_z, \tau_{xy}, \delta u\tau_{xx} + 2\phi_t, u\tau_{ty} + 2\phi_y, u\tau_{tx} + 2\phi_x, u\tau_{tt} + 2\phi_t; \\ \xi_u, \xi_z, 2\delta\phi_x - \sigma u\xi_{yy}, \tau_t - \xi_x, \delta\tau_x - \xi_t; \zeta_u, \zeta_z, \tau_t - \zeta_y, \\ \delta\zeta_x + \sigma\xi_y, \sigma\tau_y - \zeta_t; \eta_y, \eta_x, \eta_t, \eta_u, u\tau_t - u\eta_z + 2\phi\},$$

其参数导数集为  $\mathcal{Q} = \{\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_y, \tau, \tau_t, \tau_x, \tau_y, \xi, \xi_y, \zeta, \eta\}$  及初式 J = u. 故方程 (5.3) 有 d = 12 维的 对称 Lie 代数.

令  $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^5)$ , 其中  $\Phi^1 = \phi$ ,  $\Phi^2 = \tau$ ,  $\Phi^3 = \xi$ ,  $\Phi^4 = \zeta$ ,  $\Phi^5 = \eta$ , 并记  $\alpha_j^i = \{k, l, m, n, p\}$   $\in \mathbb{Z}_+^5$  为  $\Phi^i$  在  $\mathcal{Q}$  中出现的第 j 个元素分别对 t、x、y、z 和 u 的 k、l、m、n 和 p 阶偏导数. 从而, 有向量算子

$$\mathfrak{D} = (D^{\alpha_1^1}, D^{\alpha_2^1}, D^{\alpha_3^1}, D^{\alpha_4^1}, D^{\alpha_4^2}, D^{\alpha_2^2}, D^{\alpha_3^2}, D^{\alpha_4^2}, D^{\alpha_1^3}, D^{\alpha_2^3}, D^{\alpha_1^4}, D^{\alpha_1^5}),$$

其中  $\alpha_1^1=\alpha_1^2=\alpha_1^3=\alpha_1^4=\alpha_1^5=\{0,0,0,0,0,0\},\ \alpha_2^1=\alpha_2^2=\{1,0,0,0,0,0\},\ \alpha_3^1=\alpha_3^2=\{0,1,0,0,0,0\},$   $\alpha_4^1=\alpha_4^2=\{0,0,1,0,0\}.$  故任意向量函数  $\Psi=\{\Psi^1,\Psi^2,\Psi^3,\Psi^4,\Psi^5\}$  上的作用为

$$\mathfrak{D}(\Psi) = \{\Psi^1, \Psi^1_t, \Psi^1_x, \Psi^1_y, \Psi^2, \Psi^2_t, \Psi^2_x, \Psi^2_y, \Psi^3, \Psi^3_y, \Psi^4, \Psi^5\}.$$

选择初值点  $z_0 = (0,0,0,0,1) \in \mathbb{R}^5$   $(J(z_0) \neq 0)$  及其上的任意两个参数值

$$\boldsymbol{a} = \overline{\mathcal{Q}} |_{z_0} = (a_1, a_2, \dots, a_{12}) \quad \text{fl} \quad \boldsymbol{b} = \widetilde{\mathcal{Q}} |_{z_0} = (b_1, b_2, \dots, b_{12}).$$

设 C = 0 的对应解分别为

$$\Phi(a) = (\overline{\eta}, \overline{\tau}) \quad \text{fill} \quad \Phi(b) = (\widetilde{\eta}, \widetilde{\tau}).$$

该初值点上计算  $\mathfrak{D}(\Phi)$ , 其结果用  $\{C_a, C_b\}$  约化之后再用给定初值表示得 (4.5), 即  $c = \phi(a, b) = (c_1, c_2, \ldots, c_{12}) \in \mathbb{R}^{12}$ , 其中

$$\begin{split} c_1 &= a_5b_2 + a_9b_3 + a_{11}b_4 - a_2b_5 - a_3b_9 - a_4b_{11}, \\ c_2 &= a_7b_3\delta - a_3b_7\delta + a_8b_4\sigma - a_4b_8\sigma + a_6b_2 - a_2b_6, \\ c_3 &= \left(a_4b_{10} - a_{10}b_4\right)\frac{\sigma}{\delta} + a_7b_2 + a_6b_3 - a_3b_6 - a_2b_7, \\ c_4 &= a_8b_2 + a_{10}b_3 + a_6b_4 - a_4b_6 - a_2b_8 - a_3b_{10}, \\ c_5 &= -a_6b_5 + a_5b_6 + a_9b_7 + a_{11}b_8 - a_7b_9 - a_8b_{11}, \\ c_6 &= 2\left(-a_5b_2 - a_9b_3 - a_{11}b_4 + a_2b_5 + a_3b_9 + a_4b_{11}\right), \\ c_7 &= \frac{2\left(a_3b_5 - a_5b_3\right)\delta + \left(a_8b_{10} - a_{10}b_8\right)\sigma - 2a_9b_2 + 2a_2b_9}{\delta}, \\ c_8 &= \frac{2\left(a_2b_{11} - a_{11}b_2\right)}{\sigma} - 2a_5b_4 + 2a_4b_5 + a_{10}b_7 - a_7b_{10}, \\ c_9 &= \left(a_5b_7 - a_7b_5\right)\delta + a_9b_6 - a_6b_9 + a_{11}b_{10} - a_{10}b_{11}, \\ c_{10} &= 2\left(a_{11}b_3 - a_3b_{11}\right)\frac{\delta}{\sigma} + \left(a_8b_7 - a_7b_8\right)\delta - 2\left(a_9b_4 - a_4b_9\right), \\ c_{11} &= \left(a_{10}b_9 - a_9b_{10}\right)\frac{\sigma}{\delta} + \left(a_5b_8 - a_8b_5\right)\sigma + a_{11}b_6 - a_6b_{11}, \\ c_{12} &= a_{12}\left(2b_1 + b_6\right) - \left(2a_1 + a_6\right)b_{12}. \end{split}$$

取标准基  $\varepsilon_i = e_i \ (i = 1, 2, ..., 12)$  作为 Lie 代数  $V = \mathbb{R}^{12}$  的基, 则在 (5.4) 中令  $a = e_i, b = e_j$  ( $i \neq j$ ) 得到 Lie 积表 (见表 2) 及结构常数, 其中  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  生成 Abel (可交换) 子代数, 且记  $\varepsilon_{16} = 2e_6 - e_1, \gamma = \sigma/\delta, d = 2/\delta, s = 2/\sigma$ . 显然, 该 Lie 代数的非零结构常数为

$$c_{1,12}^{12} = -2; \quad c_{25}^{6} = 2, \quad c_{25}^{1} = c_{26}^{2} = c_{27}^{3} = c_{28}^{4} = -1, \quad c_{29}^{7} = c_{2,11}^{8} = \frac{2}{\delta};$$

$$c_{35}^{7} = c_{39}^{6} = 2, \quad c_{36}^{3} = c_{39}^{1} = c_{3,10}^{1} = -1, \quad c_{37}^{2} = -\delta, \quad c_{3,11}^{10} = -\frac{2}{\sigma};$$

$$c_{45}^{8} = c_{49}^{10} = c_{4,11}^{6} = 2, \quad c_{46}^{4} = c_{4,11}^{1} = -1, \quad c_{28}^{2} = -\sigma, \quad c_{4,10}^{3} = \frac{\sigma}{\delta};$$

$$c_{56}^{5} = 1, \quad c_{57}^{9} = \delta, \quad c_{58}^{11} = \sigma; \quad c_{69}^{9} = c_{6,11}^{11} = c_{6,12}^{12} = -1; \quad c_{78}^{10} = -\delta,$$

$$c_{79}^{5} = -1, \quad c_{7,10}^{8} = -1; \quad c_{8,10}^{7} = \frac{\sigma}{\delta}, \quad c_{8,11}^{5} = -1; \quad c_{9,10}^{11} = -\frac{\sigma}{\delta}, \quad c_{10,11}^{9} = -1.$$

表 2 方程 (5.3) 的对称 Lie 积表

$[e_i, e_j]$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$
$e_1$	0	0	0	0	0	0	0	$-2e_{12}$
$e_2$	$\varepsilon_{16}$	$-e_2$	$-e_3$	$-e_4$	$de_7$	0	$se_7$	0
$e_3$	$2e_7$	$-e_3$	$-\delta e_2$	0	$\varepsilon_{16}$	$-e_4$	$-2\gamma e_{10}$	0
$e_4$	$2e_8$	$-e_4$	0	$-\sigma e_2$	$2e_{10}$	$\gamma e_3$	$arepsilon_{16}$	0
$e_5$		$e_5$	$\delta e_9$	$\sigma e_{11}$	0	0	0	0
$e_6$			0	0	$-e_9$	0	$-e_{11}$	$-e_{12}$
$e_7$				$-\delta e_{10}$	$-e_5$	$-e_8$	0	0
$e_8$					0	$\gamma e_7$	$-e_5$	0
$e_9$						$-\gamma e_{11}$	0	0
$e_{10}$							$-e_9$	0
$e_{11}$								0

#### 5.4 对称 Lie 代数

显然, 从方程 (5.3) 的结构易看出该方程拥有的部分显见对称有: 分别关于坐标 t、x、y 和 z 的 平移对称 (它们分别对应  $e_5$ 、 $e_9$ 、 $e_{11}$  和  $e_{12}$ , 即  $X_5 = \partial_t$ ,  $X_9 = \partial_x$ ,  $X_{11} = \partial_y$ ,  $X_{12} = \partial_z$ ) 和同时关于坐标 t、x、y 和 z 的伸缩对称 (它对应  $e_6$ , 即  $X_6 = t\partial_t + x\partial_y + z\partial_z$ ). 下面确定其余未显见的对称  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$ 、 $X_4$ 、 $X_7$ 、 $X_8$  和  $X_{10}$ .

设待求的对称为  $X = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \zeta \partial_y + \eta \partial_z + \phi \partial_u$ , 则取  $X = X_1$ , 由 Lie 积表知,

$$\begin{split} [X_1, X_5] &= 0 \Rightarrow \tau_t = \xi_t = \zeta_t = \eta_t = \phi_t = 0, \\ [X_1, X_9] &= 0 \Rightarrow \tau_x = \xi_x = \zeta_x = \eta_x = \phi_x = 0, \\ [X_1, X_{11}] &= 0 \Rightarrow \tau_y = \xi_y = \zeta_y = \eta_y = \phi_y = 0, \\ [X_1, X_{12}] &= 0 \Rightarrow \tau_z = \xi_z = \zeta_z = \eta_t = \phi_z = 0, \\ \begin{cases} t\tau_t - \tau + x\tau_x + y\tau_y + z\tau_z = 0, \\ \xi - t\xi_t - x\xi_x - y\xi_y - z\xi_z = 0, \\ \zeta - t\zeta_t - x\zeta_x - y\zeta_y - z\zeta_z = 0, \\ \eta - t\eta_t - x\eta_x - y\eta_y - z\eta_z = 0, \\ t\phi_t + x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z = 0. \end{split}$$

把以上方程组的左端作为微分多项式加入 C 中, 并计算其特征列集得到  $X_1$  对应的确定组  $\{\phi-u,\tau,\xi,\zeta,2z-\eta\}$ , 即  $\tau=\xi=\zeta=0,\eta=2z,\phi=u$ . 从而,直接得到

$$X_1 = 2z\partial_z + u\partial_u. (5.5)$$

同样, 对  $X = X_2$ , 有

- (1) 从  $[X_2, X_1] = 0$  得到微分多项式组  $\{u\tau_u + 2z\tau_z, u\xi_u + 2z\xi_z, u\zeta_u + 2z\zeta_z, 2\eta u\eta_u 2z\eta_z, u\phi_u + 2z\phi_z \phi\}$ :
  - (2) 从  $[X_2, X_5] = 2X_6 X_1$  得到多项式组  $\{\tau_t + 2t, \xi_t + 2x, \zeta_t + 2y, \eta_t, u \phi_t\}$ ;
  - (3) 从  $[X_2, X_{12}] = 0$  得到多项式组  $\{\tau_z, \xi_z, \zeta_z, \eta_z, \phi_z\}$ .

把以上微分多项式加入 C 中, 并计算其特征列集得到

$$\{\phi - tu, \delta\sigma\tau + \delta\sigma t^2 + \sigma x^2 + \delta y^2, \xi + 2tx, \zeta + 2ty, \eta\}.$$

由此直接得到  $X_2 = -(t^2 + \frac{x^2}{\delta} + \frac{y^2}{\sigma})\partial_t - 2tx\partial_x - 2ty\partial_y + tu\partial_u$ .

依此类推, 我们得到

$$X_{3} = -2tx\partial_{t} - (\sigma t^{2} + x^{2} - \sigma \delta y^{2})\partial_{x} - 2xy\partial_{y} + xu\partial_{u},$$

$$X_{4} = -2ty\partial_{t} - 2xy\partial_{x} - (\delta t^{2} - \sigma \delta x^{2} + y^{2})\partial_{y} + yu\partial_{u},$$

$$X_{7} = x\partial_{t} + \frac{t}{\sigma}\partial_{x}, \quad X_{8} = y\partial_{t} + \frac{t}{\delta}\partial_{y}, \quad X_{10} = y\partial_{x} + \frac{\sigma}{\delta}x\partial_{y}.$$

至此, 我们得到  $L^{12} = \operatorname{Span}\{X_1, X_2, \dots, X_{12}\}.$ 

**注 5.2** 在以上计算过程中, 只需要有限的显见对称  $X_5$ 、 $X_6$ 、 $X_9$ 、 $X_{11}$  和  $X_{12}$ , 并反复应用特征 列集算法就直接 (无需求解确定组) 确定 (偏) 微分方程的对称 Lie 代数. 显然, 该算法大大提高了计算对称的效率.

## 6 讨论

本文基于微分形式吴方法, 首先建立了对称 Lie 代数与  $\mathbb{R}^d$  向量空间的代数同构; 其次, 给出了确定对称 Lie 代数结构常数的算法. 对比传统 Lie 算法, 本算法确定对称之前就给出给定方程的对称 Lie 代数结构常数, 从而有效避免了求解确定组的难度, 也为用 Lie 代数研究和求解微分方程提供了新方法. 同时, 给定算法具有以下几个创新点.

- (1) 有效克服确定 (偏) 微分方程 (组) 对称的解析求解确定方程组的难点. 该算法不仅确定对称 Lie 代数结构常数, 还有效降低求解确定方程组的难度, 进而有效提高了确定 (偏) 微分方程完全对称的效率. 通过给定算法, 由极少的简单对称出发可以确定已知方程的有限维对称 Lie 代数.
- (2) 适用于确定广义对称. 给定算法可应用于计算微分方程的确定方程组为线性齐次的各类广义 对称, 如势对称、Bäcklund 对称、变分对称等.
- (3) 适用于对称 Lie 代数性质的分析和判定. Lie 代数性质取决于结构常数, 因此, 本文给出的算法适合于微分方程对称 Lie 代数性质的分析和讨论.
- (4) 吴方法的新应用. 本文给出算法的理论基础是微分形式特征列集算法 (微分形式吴方法), 说明了吴方法在研究解决此类问题的有效性. 并给出了吴方法的新的应用.

#### 参考文献 -

- 1 Bluman G, Kumei S. Symmetries and Differential Equations. London-New York: Springer-Verlag, 1991
- 2 Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations. New York-London: Academic Press, 1982
- 3 Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. London: Springer-Verlag, 1991
- 4 Ibragimov N H. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3. London-Tokyo: CRC Press, 1994
- 5 Clarkson P A, Mansfield E L. Open problems in symmetry analysis. In: Geometrical Study of Differential Equations. Contemprorary Mathematics Series, vol. 285. Providence: Amer Math Soc, 2001, 195–205
- 6 特木尔朝鲁, 白玉山. 基于吴方法的确定和分类 (偏) 微分方程古典和非古典对称新算法理论. 中国科学: 数学, 2010, 40: 331-348
- 7 Reid G J. Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. European J Appl Math, 1991, 2: 293–318
- 8 Reid G J. Finding abstract Lie symmetry algebras of differential equations without integrating determining equations. European J Appl Math, 1991, 2: 319–340
- 9 Reid G J. A triangularization algorithm which determines the Lie symmetry algebra of any system of PDEs. J Phys A Math Gen, 1990, 23: 853–859
- 10 特木尔朝鲁, 张鸿庆, 唐立民. 一个计算微分方程 (组) 对称群的 Mathematica 程序包及其应用. 计算物理学报, 1997, 14: 375-379
- 11 特木尔朝鲁. 微分方程 (组) 对称向量的吴 微分特征列集算法及应用. 数学物理学报, 1999, 19: 326-332
- 12 Temuer C, Pang J. An algorithm for the complete symmetry classification of differential equations based on Wu's method. J Engrg Math, 2010, 66: 181–199
- 13 Temuer C, Bai Y. An algorithm for determining approximate symmetries of DEs based on Wu's method. Chinese J Engrg Math, 2011, 8: 617–622
- 14 Temuer C, Bluman G. An algorithmic method for showing existence of nontrivial non-classical symmetries of partial differential equations without solving determining equations. J Math Anal Appl, 2014, 411: 281–296
- 15 Hereman W. Review of symbolic software for lie symmetry analysis. Math Comput Modelling, 1997, 25: 115–132
- Alan B. New symmetries from old: Exploiting Lie algebra structure to determine infinitesimal symmetries of differential equations. Https://open.library.ubc.ca/media/download/pdf/831/1.0079839/2, 1993
- 17 Li Z, Schwarz F, Tsarev S. Factoring linear partial differential systems with finite-dimensional solution spaces. J Symbolic Comput, 2004, 36: 443–471

- 18 Wu W T. Mathematics Mechanization. Beijing: Science Press; Dordrecht-Bosten-London: Klnwer Academic Publishers. 2000
- 19 Wu W T. Basic principles of mechanical theorem-proving in elementary geometries. J Systems Sci Math Sci, 1984, 4: 207–235
- 20 Wu W T. On the foundation of algebraic differential geometry. MMPR, 1983, 3: 289-312
- 21 高小山, 王定康, 裘宗燕, 等. 方程求解与机器证明 基于 MMP 的问题求解. 北京: 科学出版社, 2006
- 22 特木尔朝鲁, 高小山. 微多项式系统的近微分特征列集. 数学学报, 2002, 45: 1041-1050
- 23 Temuer C. An algorithmic theory of reduction differential polynomials system. Adv Math (China), 2003, 32: 208-220
- 24 Temuer C, Buhe E, Xia T C. Non-classical symmetry of the wave equation with source term. Chinese J Contemp Math, 2012, 33: 157–166
- 25 Bluman G W, Temuer C, Sahadevan R. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation. J Mach Phys, 2005, 46: 023505
- 26 Bluman G W, Temuer C. Conservation laws for nonlinear telegraph equations. J Math Anal Appl, 2005, 310: 459–476
- 27 Bluman G W, Temuer C, Anco S C. New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law. J Math Anal Appl, 2006, 322: 233–250
- 28 Yun Y, Temuer C. Classical and nonclassical symmetry classifications of nonlinear wave equation with dissipation.
  Appl Math Mech (English Ed), 2015, 36: 365–378
- 29 Liu L, Temuer C. Symmetry analysis of modified 2D Burgers vortex equation for unsteady case. Appl Math Mech (English Ed), 2017, 38: 453–468
- 30 de Graaf W A. Algorithms for finite-dimensional Lie algebras. PhD Thesis. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1997
- 31 Kolchin E R. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York-London: Academic Press, 1973
- 32 万哲先. 李代数. 北京: 高等教育出版社, 2013

## A mechanical algorithm for constructing structural constants of the Lie algebra of symmetry of differential equations based on Wu's method

Chaolu Temuer, Kangkang Wei, Yufeng Yao & Dao Su

**Abstract** A mechanical algorithm for constructing an isomorphism image (a Lie algebra with the same structural constants) of the Lie algebra of symmetry of a differential equations without solving maximum symmetry of the equations is given based on differential form Wu's method. The algorithm increases the efficiency of computing whole symmetry and can be applied to mechanical analysis and decision of various properties of the Lie algebra of symmetry of a (partial) differential equation. The illustrative examples show the efficiency and extensive applications of the given algorithm.

Keywords differential form Wu's method, (partial) differential equations, Lie algebra of symmetry, determining equations, mechanical algorithm

MSC(2010) 03F03, 03F65, 35A30, 58J70, 58J72

doi: 10.1360/N012018-00165