



Euclid 空间的稳定极小超曲面

献给彭家贵教授 80 寿辰

陈卿*, 许小卫

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: qchen@ustc.edu.cn, xwxu09@ustc.edu.cn

收稿日期: 2024-03-13; 接受日期: 2024-05-07; 网络出版日期: 2024-08-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11971450) 资助项目

摘要 do Carmo 和 Peng (1979) 证明了稳定版本的 Bernstein 定理: “ $\mathbb{R}^3$ 中完备可定向的稳定极小曲面是平坦的”. 此后关于稳定极小超曲面的研究推动了数学多个分支的重要发展. 本文将简要介绍其后 40 年有关 Euclid 空间稳定极小超曲面的研究进展以及近两年该研究的最新成果.

关键词 极小曲面 稳定性 第二基本形式 曲率估计

MSC (2020) 主题分类 53C40, 53C42

1 引言

极小曲面源于对肥皂泡问题的研究, 空间一条简单闭曲线, 能否张成一张肥皂膜? Lagrange 最早研究了该问题, 利用变分方法发现, 如果肥皂膜用一个函数的图像来表示, 则该函数需要满足一个非线性二阶椭圆方程, 称为极小曲面方程. 相应的函数图像, 满足平均曲率等于 0, 也称为极小图.

一般维数的极小 (超) 曲面方程有如下形式: 设 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 方程

$$(1 + |\nabla f|^2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

称为 n 维极小曲面方程. 如果 f 是极小曲面方程的一个解, 则 f 的图是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的极小 (超) 曲面. Bernstein^[2] 证明了当 $n = 2$ 时, 如果一个极小曲面方程的解 f 可以定义在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上, 则 f 一定是线性函数, 相应的极小曲面是平面. 所谓 Bernstein 问题是, 对于一般维数 n , 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的极小曲面方程的解是否是线性的? 当 $n \leq 7$ 时, Bernstein 问题的回答是肯定的. Almgren^[1] 证明了 $n = 3, 4$ 的情形, Simons^[16] 解决了当 $n \leq 7$ 时的 Bernstein 问题. Bombieri 等^[3] 则证明了当 $n \geq 8$ 时, 极小曲面方程存在定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非线性解.

英文引用格式: Chen Q, Xu X W. Stable minimal hypersurfaces in Euclidean space (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 107–114, doi: 10.1360/SSM-2024-0064

Bernstein 问题的解决引发了对极小曲面和极小超曲面的进一步研究. 从变分角度看, 极小曲面 (平均曲率等于 0) 是面积泛函的一阶变分驻点. 由于极小图相对于它的边界一定是面积最小的, 所以对极小图而言, 面积泛函的二阶变分一定是非负的. 一般地, 如果一个极小超曲面面积泛函的二阶变分非负, 则称它是稳定的. 因此从 Bernstein 问题自然诱发如下问题:

当 $n \leq 7$ 时, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的完备稳定极小超曲面是否平坦?

do Carmo 和 Peng^[6] 证明了 $n = 2$ 的情形 (参见同时期的另两个独立证明文献 [8, 11]). 但对于 $3 \leq n \leq 7$ 时的稳定极小超曲面 Bernstein 问题, 多年来一直没有彻底解决, 直到 2021 年 Chodosh 和 Li^[5] 给出了 $n = 3$ 时相应问题的一个肯定回答.

本文回顾 40 多年来国内外数学家研究稳定极小超曲面 Bernstein 问题所作的努力和取得的结果, 并简要介绍 Chodosh 和 Li 关于 $n = 3$ 的证明.

2 稳定极小超曲面的基本结果

设 $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是浸入超曲面, A 是浸入的第二基本形式. 如果 M 是所有具紧支撑面积泛函一阶变分的驻点, 则称 M 是极小超曲面, 这等价于浸入的平均曲率

$$H = \frac{1}{n} \operatorname{tr} A = 0.$$

称极小超曲面 M 是稳定的是指它的面积泛函的二阶变分非负, 这等价于

$$\int_M |A|^2 f^2 \leq \int_M |\nabla f|^2, \quad \forall f \in C_0^\infty(M). \quad (2.1)$$

设 M 是极小超曲面, 设 $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是万有覆盖, 如果 M 不是单连通的, 则 $x \circ \pi: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 也是极小浸入. 如果 M 是稳定的, 文献 [6] 证明了如下命题:

命题 1 设 $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是稳定极小超曲面, $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ 是 M 的万有覆盖, 则 $x \circ \pi: \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 也是稳定极小浸入.

如果 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中完备可定向的稳定极小曲面, 则利用单值化定理可以设 M 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 或者复平面 $\mathbb{C}$. 在此基础上, do Carmo 和 Peng^[6] 给出了如下定理的一个简洁证明.

定理 1^[6] 设 $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是稳定的完备极小浸入, 则 $x(M)$ 是一个平面.

对于一般维数 n , 第二基本形式的模长 $|A|$ 满足如下 Simons 型等式^[16]:

$$|A| \Delta |A| + |\nabla |A||^2 = -|A|^4 + |\nabla A|^2. \quad (2.2)$$

利用 $\operatorname{tr} A = 0$ 、 $\operatorname{tr} \nabla A = 0$ 以及 ∇A 的对称性可以证明¹⁾ (参见文献 [7])

$$|\nabla A|^2 \geq \frac{n+2}{n} |\nabla |A||^2 \quad (2.3)$$

(当 $n = 2$ 时上式实际上是等式). 由上两式可以得到

$$|A| \Delta |A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n} |\nabla |A||^2. \quad (2.4)$$

进而 Schoen 等^[13] 得到了有关 $|A|$ 的 L^p 估计如下:

1) 容易发现不等式 $|\nabla A|^2 \geq \frac{n+2}{n} |\nabla |A||^2$ 等价于不等式 $|\langle \nabla A, A \rangle|^2 \leq \frac{n}{n+2} |\nabla A|^2 |A|^2$, 后者通称为改进的 Kato 不等式.

定理 2^[13] 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的稳定极小超曲面, 对于任意 $p \in [4, 4 + \sqrt{4/n})$, 成立

$$\int_M |A|^p f^p \leq C \int_M |\nabla f|^p, \quad \forall f \in C_0^\infty(M),$$

这里 C 是只与 n 和 p 有关的常数.

定理 2 中的 L^p 估计, 给出了 $n \leq 5$ 时极小图 Bernstein 问题的另一个证明. 事实上, 设 M 是一个定义在全空间上的 n 维极小图, $B_p(r)$ 是外围空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 以点 p 为中心、半径为 r 的距离球. 由于 M 上任意一个紧致区域关于它的边界都是面积最小的, 容易推导出存在常数 c_n , 使得

$$\text{Area}(M \cap B_p(r)) \leq c_n r^n.$$

在 $|A|$ 的 L^p 估计式中选取适当的截断函数 $f = f(r)$, 就可以推导出 $|A| \equiv 0$ (详见文献 [13]).

有关 (2.3) 的一个简单证明, 可以参见文献 [7], 该文献同时证明了如下定理:

定理 3 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的完备稳定极小超曲面, 如果 $\int_M |A|^2 < \infty$, 则 M 是一个超平面.

进一步地, Shen 和 Zhu 证明了如下定理:

定理 4^[15] 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的完备稳定极小超曲面, 如果 $\int_M |A|^n < +\infty$, 则 M 是超平面.

另一个有趣的结论是 Cao 等^[4]得到的.

定理 5^[4] 设 $n \geq 3$, 如果 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的可定向、完备稳定极小超曲面, 则 M 仅有一个端.

定理 5 的证明依赖于 Schoen 和 Yau 的一个基本结果:

定理 6^[14] 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的完备稳定极小超曲面, u 是 M 上的调和函数. 如果 $\int_M |\nabla u|^2 < \infty$, 则 u 是常数.

3 曲率估计

对于 2 维极小图, Heinz^[9] 证明了如下曲率估计:

定理 7^[9] 设 $z = u(x, y)$ 是定义在平面圆盘 $\{x^2 + y^2 < r^2\}$ 上的极小曲面方程的解, $p_0 = (0, 0, u(0, 0))$, 则 u 对应的极小图在点 p_0 的 Gauss 曲率 $K(p_0)$ 满足 $K(p_0) \leq \frac{16}{r^2}$. 如果 u 是定义在全平面上的极小曲面方程的解, 则令 $r \rightarrow \infty$ 就得到经典 Bernstein 定理的另一个证明.

事实上, 关于稳定极小曲面也有类似的 Heinz 曲率估计 (参见文献 [12]).

命题 2 设 $B_O(1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以原点 O 为中心、半径为 1 的球体. 如果 $M \subset B_O(1)$ 是稳定极小曲面, 且 $\partial M \subset \partial B_O(1)$, 设 $O \in M$, 则 $|A|(O) \leq C$, 这里 $C > 0$ 为常数.

以上命题的内蕴形式如下:

命题 3^[12] 如果 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中紧致带边可定向稳定极小曲面, 则

$$\sup_{p \in M} |A(p)| d(p, \partial M) < C,$$

这里 d 是 M 的距离, $C > 0$ 为常数.

上述命题与定理 1 等价. 当 $n \geq 3$ 时, 通过建立 Heinz 型曲率估计证明稳定极小超曲面唯一性, 是可行的途径之一. 因此, 为便于理解高维的情形, 这里简要说明命题 3 与定理 1 的等价性.

从命题 3 推导出定理 1 是简单的. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的可定向完备稳定极小曲面, 任取点 $p_0 \in M$. 设 $\{r_i\}$ 是发散到 $+\infty$ 的数列, 考虑以 p_0 为中心的伸缩变换

$$M \rightarrow M_i = \frac{1}{r_i} M,$$

M_i 依然是稳定极小的. 对 M_i 上以 p_0 为中心、1 为半径的测地球面, 应用命题 3, 则有

$$|A_i(p_0)| = r_i |A(p_0)| \leq C,$$

这里 A_i 是 M_i 的第二基本形式. 令 $i \rightarrow \infty$, 则有 $|A(p_0)| = 0$.

可以利用反证法和极小曲面的光滑收敛定理, 从定理 1 证明命题 3. 设存在一系列紧致带边的稳定极小曲面 $\{M_i\}$, 它们的第二基本形式记为 A_i , 满足

$$\sup_{p \in M_i} |A_i(p)| d_i(p, \partial M_i) \rightarrow +\infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

设上述最大值在点 $p_i \in M_i$ 取到, 记

$$\lambda_i = d_i(p_i, \partial M_i) > 0, \quad \mu_i = |A_i(p_i)|,$$

则 $\lambda_i \mu_i \rightarrow +\infty$ ($i \rightarrow \infty$). 用 M_i 上以 p_i 为中心、 $\frac{\lambda_i}{2}$ 为半径的测地球代替 M_i , 仍然记为 M_i , 则

$$\sup_{p \in M_i} |A_i(p)| \leq 2\mu_i \quad \text{且} \quad |A_i(p_i)| = \mu_i.$$

平移 M_i 使得 $p_i = O \in \mathbb{R}^3$, 并将 M_i 放大为 $\widetilde{M}_i = \mu_i M_i$, 则 $\widetilde{M}_i$ 满足

- (1) $\sup |\widetilde{A}_i| \leq 2, |\widetilde{A}_i|(O) = 1$;
- (2) $\widetilde{M}_i$ 是一个半径为 $\frac{1}{2} \lambda_i \mu_i$ 的测地球.

利用极小曲面的 C^∞ 收敛定理^[10], 可知 $\{\widetilde{M}_i\}$ 有一个子列收敛到 $\mathbb{R}^3$ 的一个完备可定向极小曲面 M_∞ , 并且稳定性在光滑收敛下保持. 因此由定理 1 可得 $M_\infty = \mathbb{R}^2$, 这与 $|A_\infty|(O) = \lim_{i \rightarrow \infty} |A_i|(O) = 1$ 矛盾.

需要指出的是, 在上述证明中, 只需要 “ $\mathbb{R}^3$ 中第二基本形式有界的完备可定向稳定极小曲面平坦” 这一结论, 就可以得到命题 1 的曲率估计. 这一事实对于 $n \geq 3$ 的情形也成立.

4 $\mathbb{R}^4$ 中的稳定极小超曲面

本节简要介绍 Chodosh 和 Li^[5] 关于 “ $\mathbb{R}^4$ 稳定可定向完备极小超曲面是平面” 的证明. 正如上节最后指出的一样, 他们首先证明了如下定理:

定理 8 设 M 是 $\mathbb{R}^4$ 的可定向完备稳定极小超曲面, 并且 M 的第二基本形式有界, 则 M 是平坦的.

随后利用反证法和极小超曲面的光滑紧性定理 (参见文献 [10, 15]), 可以得到类似于命题 1 的曲率估计.

定理 9 存在常数 $C > 0$ 满足: 如果 M 是 $\mathbb{R}^4$ 的可定向稳定极小超曲面, 则

$$\sup_{p \in M} |A|(p) d(p, \partial M) \leq C,$$

这里 A 是 M 的第二基本形式, d 是 M 的距离函数.

下面简要介绍定理 8 的证明. 假设 M 是 $\mathbb{R}^4$ 的可定向完备稳定极小超曲面, A 是它的第二基本形式, $\sup |A| < +\infty$, 并设 M 是单连通的.

利用曲率有界和稳定性假设, Chodosh 和 Li 首先证明了 M 上存在 Green 函数满足如下性质:

命题 4 (参见文献 [5, 命题 9]) 固定点 $p \in M$, 存在一个 $M \setminus \{p\}$ 上的调和函数 u 满足

- (1) $u > 0$, 且 $d(x) = d(x, p) \rightarrow \infty$ 时 $u(x) \rightarrow 0$;
- (2) 当 $t (> 0)$ 是 u 的正则值时, $\Sigma_t := u^{-1}(t)$ 是一个连通闭曲面.

如果 $M = \mathbb{R}^3$, 则 $u(x) = 1/|x - p|$. 文献 [5] 正是利用 u 替代前人所用的距离函数并构造截断函数来证明定理 8. 为此需要估计沿 u 的等值面 Σ_t 定义的函数

$$F(t) = \int_{\Sigma_t} |\nabla u|^2 \quad (4.1)$$

的渐近性质. 注意到当 $M = \mathbb{R}^3$ 时 $F(t) = 4\pi t^2$. Chodosh 和 Li [5] 通过分析 Σ_t 的几何和精细的计算, 得到了最优估计.

命题 5 当 $t \rightarrow 0$ 时, $F(t) = O(t^2)$.

这个结论, 结合第二基本形式 A 的 L^3 估计 (参见文献 [5, 命题 27]): 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\int_M |A|^3 f^3 \leq C \int_M |\nabla f|^3, \quad \forall f \in C_0^\infty(M), \quad (4.2)$$

通过选取适当的截断函数 f , 就可以证明 $|A| \equiv 0$.

最后简要说明命题 5 的证明. 为方便起见, 设 $|\nabla u| \neq 0$ (否则有时需要选取适当的辅助函数), 则 $\vec{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 是 $\Sigma_t \subset M$ 的单位法向量场. 那么 $\Sigma_t \subset M$ 的第二基本形式为

$$A_t = |\nabla u|^{-1} D^2 u|_{\Sigma_t},$$

这里 $D^2 u$ 是函数 u 的 Hessian. $\Sigma_t \subset M$ 的平均曲率为

$$H_t = \text{tr} A_t = -|\nabla u|^{-1} D^2 u(\vec{n}, \vec{n}).$$

利用 $\Sigma_t \subset M$ 的 Gauss 方程以及 M 的维数等于 3, 记 K_M 是 M 的截曲率, K_t 是 Σ_t 的 Gauss 曲率, $R_M = -\frac{1}{2}|A|^2$ 是 M 的数量曲率, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \text{Ric}_M(\vec{n}, \vec{n}) &= \frac{1}{2} R_M - K_M(T\Sigma_t) \\ &= \frac{1}{2} R_M - K_t + \frac{1}{2} (|H_t|^2 - |A_t|^2) \\ &= -\frac{1}{2} |A|^2 - K_t - \frac{1}{2} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2 + |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

由于 M 的曲率有界, 所以利用 Yau [17] 的 Harnack 不等式可以得到 $F(t)$ 的一个先验估计

$$F(t) = O(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

但是无法利用这个先验估计, 通过直接计算函数 $F(t)/t$ 的导数得到命题 5. 文献 [5] 采用了一个“正则化”手段, 巧妙地克服了这一困难. 下面分 3 步介绍这一方法.

第 1 步 函数 F 的导数

$$F'(t) = \int_{\Sigma_t} \langle \nabla |\nabla u|, \vec{n} \rangle,$$

设 $1 < \alpha < 2$, 则

$$t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) = \int_{\Sigma_t} u^{-\alpha} \langle \nabla |\nabla u|, \vec{n} \rangle - |\nabla u| \langle \nabla u^{-\alpha}, \vec{n} \rangle.$$

利用第二 Green 公式和余面积公式, 当 $0 < t < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) - F'(1) - \alpha F(1) &= - \int_{\Omega_{1,t}} u^{-\alpha} \Delta |\nabla u| - |\nabla u| \Delta u^{-\alpha} \\ &= - \int_t^1 ds \int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-1} (u^{-\alpha} \Delta |\nabla u| - |\nabla u| \Delta u^{-\alpha}), \end{aligned}$$

这里 $\Omega_{1,t} = \{x \in M \mid t \leq u(x) \leq 1\}$.

因为 u 是调和函数, 利用 Bochner 公式和 (4.3), 可得

$$\Delta |\nabla u| = |\nabla u|^{-1} \left[\frac{1}{2} |D^2 u|^2 - |\nabla u|^2 \left(\frac{1}{2} |A|^2 + K_s \right) \right],$$

所以

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) - F'(1) - \alpha F(1) \\ = - \int_t^1 ds s^{-\alpha} \int_{\Sigma_s} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2 - \frac{1}{2} |A|^2 - K_s \right) + \int_t^1 \alpha(\alpha+1) s^{-\alpha-2} F(s) ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

第 2 步 记 $C(\alpha) = |F'(1) + \alpha F(1)|$, $\mathcal{A}(s) = \int_{\Sigma_s} |A|^2$. 因为 Σ_s 是连通闭曲面, 所以

$$\int_{\Sigma_s} K_s \leq 4\pi,$$

同时, 调和函数 u 同样满足改进的 Kato 不等式

$$|D^2 u|^2 \geq \frac{3}{2} |\nabla |\nabla u||^2,$$

由此利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} F'(s)^2 &= \left(\int_{\Sigma_s} \langle \nabla |\nabla u|, \vec{n} \rangle \right)^2 \leq F(s) \cdot \int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-2} \langle \nabla |\nabla u|, \vec{n} \rangle^2 \\ &\leq F(s) \int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-2} |\nabla |\nabla u||^2 \leq \frac{2}{3} F(s) \int_{\Sigma_s} |\nabla u|^{-2} |D^2 u|^2. \end{aligned}$$

所以由 (4.5) 确定推导出

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) - C(\alpha) &\leq \frac{1}{2} \int_t^1 s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{-\alpha+1} \\ &\quad + \int_t^1 \left(-\frac{3}{4} s^{-\alpha} F(s)^{-1} F'(s)^2 + \alpha(\alpha+1) s^{-\alpha-2} F(s) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.6)$$

为估计上式中的第二项, 引入待定参数 $\lambda > 0$, 利用

$$2\lambda s^{-1} F'(s) F(s) \leq F'(s)^2 + \lambda^2 s^{-2} F(s)^2,$$

可得

$$-\frac{3}{4} s^{-\alpha} F(s)^{-1} F'(s)^2 \leq -\frac{3}{2} \lambda s^{-\alpha-1} F'(s) + \frac{3}{4} \lambda^2 s^{-\alpha-2} F(s),$$

代入 (4.6), 并对 $F'(s)$ 分部积分, 则有

$$t^{-\alpha} F'(t) + \alpha t^{-\alpha-1} F(t) - C(\alpha) \leq \frac{1}{2} \int_t^1 s^{\alpha} \mathcal{A}(s) ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{-\alpha+1} + \frac{3}{2} \lambda t^{-\alpha-1} F(t)$$

$$+ \int_t^1 \left(\frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1) \right) s^{-\alpha-2} F(s) ds. \quad (4.7)$$

第 3 步 令

$$\lambda = \lambda(\alpha) = (\alpha+1) - \sqrt{\alpha+1} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{3}},$$

则

$$\frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1) = 0.$$

由 (4.7) 确定推导出

$$t^{-\alpha} F(t) + \left(\alpha - \frac{3}{2}\lambda \right) t^{\alpha-1} F(t) \leq C(\alpha) + \frac{1}{2} \int_t^1 s^\alpha \mathcal{A}(s) ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{-\alpha+1}. \quad (4.8)$$

由此可得

$$\frac{d}{dt} (t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(t)) \leq C(\alpha) t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} + \frac{1}{2} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} \int_t^1 s^\alpha \mathcal{A}(s) ds + \frac{4\pi}{\alpha-1} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1}.$$

设 $0 < \delta < t$, 在 $[\delta, t]$ 上对上式积分得

$$\begin{aligned} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(t) - \delta^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(\delta) &\leq \frac{C(\alpha)}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} + \frac{4\pi}{(\alpha-1)(\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2)} t^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_\delta^t d\tau \tau^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} \int_\tau^1 s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

而且上式的最后一项通过交换积分顺序, 有估计

$$\begin{aligned} \int_\delta^t \int_\tau^1 \tau^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\tau &= \left(\int_\delta^t \int_\tau^t + \int_\delta^t \int_t^1 \right) \tau^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds d\tau \\ &= \int_\delta^t ds \int_\delta^s \tau^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) d\tau + \int_\delta^t \tau^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda} d\tau \int_t^1 s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \left(\int_\delta^t s^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \mathcal{A}(s) ds + t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_t^1 s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \left(\int_\delta^t \mathcal{A}(s) ds + t^{2\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} \int_t^1 s^{-\alpha} \mathcal{A}(s) ds \right). \end{aligned}$$

注意到当 $\alpha < 2$ 时, $\alpha - \frac{3}{2}\lambda + 1 > 0$, 结合 (4.4) 可以推导出当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时,

$$\delta^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda} F(\delta) = \delta^{\alpha-\frac{3}{2}\lambda+1} O(1) \rightarrow 0.$$

在 (4.9) 中令 $\delta \rightarrow 0^+$, 再令 $\alpha \rightarrow 2^-$, 则 $\lambda = \lambda(\alpha) \rightarrow 2$, 由此得到

$$t^{-1} F(t) \leq Ct^2 + 4\pi t + \frac{1}{4} \int_0^t \mathcal{A}(s) ds + \frac{t^2}{4} \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) ds. \quad (4.10)$$

利用稳定性条件, 文献 [5, 推论 16] 同时证明了

$$\int_0^t \mathcal{A}(s) ds + t^2 \int_t^1 s^{-2} \mathcal{A}(s) ds \leq O(t) + \frac{4}{3} \int_t^1 s^{-4} F(s) ds,$$

最后得到

$$F(t) \leq O(t^2) + \frac{t^3}{3} \int_t^1 s^{-4} F(s) ds. \quad (4.11)$$

由此不难得出 $F(t) = O(t^2)$ ($t \rightarrow 0^+$).

参考文献

- 1 Almgren F J Jr. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. *Ann of Math* (2), 1966, 84: 277–292
- 2 Bernstein S. Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm de la Soc Math de Karkov* (2e série), 1915, 15: 38–45
- 3 Bombieri E, De Giorgi E, Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent Math*, 1969, 7: 243–268
- 4 Cao H D, Shen Y, Zhu S. The structure of stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. *Math Res Lett*, 1997, 4: 637–644
- 5 Chodosh O, Li C. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. *arXiv:2108.11462*, 2021
- 6 do Carmo M, Peng C K. Stable complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1979, 1: 903–906
- 7 do Carmo M, Peng C K. Stable complete minimal hypersurfaces. In: *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, vol. 3. Beijing: Science Press, 1980, 1349–1358
- 8 Fischer-Colbrie D, Schoen R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm Pure Appl Math*, 1980, 33: 199–211
- 9 Heinz E. Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. *Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys Kl*, 1952, 2: 51–56
- 10 Pitts J N. *Existence and Regularity of Minimal Surfaces on Riemannian Manifolds*. (MN-27). Princeton: Princeton Univ Press, 1981
- 11 Pogorelov A V. On the stability of minimal surfaces. *Soviet Math Dokl*, 1981, 24: 274–276
- 12 Schoen R. Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds. In: *Seminar on Minimal Submanifolds*. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 103. Princeton: Princeton Univ Press, 1983, 111–126
- 13 Schoen R, Simon L, Yau S-T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math*, 1975, 134: 275–288
- 14 Schoen R, Yau S-T. Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with non-negative Ricci curvature. *Comment Math Helv*, 1976, 51: 333–341
- 15 Shen Y B, Zhu X H. On the stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$. *Amer J Math*, 1998, 120: 791–809
- 16 Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann of Math* (2), 1968, 88: 62–105
- 17 Yau S-T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm Pure Appl Math*, 1975, 28: 201–228

Stable minimal hypersurfaces in Euclidean space

Qing Chen & Xiaowei Xu

Abstract do Carmo and Peng (1979) proved that the complete oriented stable minimal surface in $\mathbb{R}^3$ is flat. Since then the study of a stable minimal hypersurface in Euclidean space has promoted the development of many branches of mathematics. We briefly survey the research of minimal stable hypersurfaces in Euclidean space in the past forty years and the latest results.

Keywords minimal hypersurface, stability, second fundamental form, curvature estimate

MSC(2020) 53C40, 53C42

doi: 10.1360/SSM-2024-0064