中国科学: 数学　2021 年　第 51 卷　第 5 期: 697～710
SCIENTIA SINICA Mathematica
论　文

一类涉及分数阶 Hardy-Schrödinger 算子和 Hardy-Sobolev 临界指数的方程组

郭振宇[1], 刘敏[2*], 唐仲伟[2]

1. 辽宁师范大学数学学院, 大连 116029;
2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: guozy@lnnu.edu.cn, minliu@mail.bnu.edu.cn, tangzw@bnu.edu.cn

收稿日期: 2019-09-18; 接受日期: 2020-01-19; 网络出版日期: 2020-02-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11701248, 11571040 和 11671331) 和辽宁省自然科学基金 (批准号: 20180540028) 资助项目

摘要　本文研究一类涉及分数阶 Hardy-Schrödinger 算子和 Hardy-Sobolev 临界指数的方程组. 在适当的条件下, 本文获得该方程组基态解的存在性和相关性结果. 为克服紧性缺失, 本文考虑一个定义在有界区域上的次临界辅助问题, 并证得该辅助问题对应的紧嵌入性结论.

关键词　基态解　分数阶 Hardy-Schrödinger 算子　分数阶 Hardy-Sobolev 临界指数

MSC (2020) 主题分类　35R11, 35B33

1　引言

本文考虑如下涉及分数阶 Hardy-Schrödinger 算子和 Hardy-Sobolev 临界指数的方程组:

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u-\lambda\dfrac{u}{|x|^{2s}}=\mu\dfrac{|u|^{2_s^*(t)-2}u}{|x|^t}+\dfrac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)}\dfrac{|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta}{|x|^t},\\ (-\Delta)^s v-\lambda\dfrac{v}{|x|^{2s}}=\nu\dfrac{|v|^{2_s^*(t)-2}v}{|x|^t}+\dfrac{\beta\gamma}{2_s^*(t)}\dfrac{|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v}{|x|^t},\\ u,v\in D^s(\mathbb{R}^N),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $0<s<1$, $0<t<2s<N$, $\alpha,\beta>1$, $\alpha+\beta=2_s^*(t):=\frac{2(N-t)}{N-2s}$, $\mu,\nu,\gamma>0$, $0\leqslant\lambda<\Lambda_{N,s}:=4^s\Gamma^2(\frac{N+2s}{4})/\Gamma^2(\frac{N-2s}{4})$, $D^s(\mathbb{R}^N)$ 是分数阶 Sobolev 空间, 定义见第 2 节. 需要指出的是这里的 $2_s^*(t)$ 是分数阶 Hardy-Sobolev 临界指数, $\gamma>0$ 对于方程组 (1.1) 解的非平凡性是必要的, $\lambda\geqslant0$ 用来得到方程组 (1.1) 解的径向对称性, $\lambda<\Lambda_{N,s}$ 用来保证分数阶 Hardy-Schrödinger 算子 $(-\Delta)^s-\frac{\lambda}{|x|^{2s}}$ 是正的.

英文引用格式: Guo Z Y, Liu M, Tang Z W. A system involving fractional Hardy-Schrödinger operators and critical Hardy-Sobolev exponents (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 697–710, doi: 10.1360/SCM-2019-0571

近年来, 分数阶 Laplace 算子和相应的非局部问题得到了广泛应用, 如不规则扩散、梯度位势理论、极小曲面、非一致椭圆问题、最优化、相变、准地衡流和水波等 (参见文献 [1] 及其参考文献). 因此, 研究分数阶问题变得越来越重要, 也得到了许多重要结果, 例如, Chen 等 [2] 研究了如下问题:

$$(-\Delta)^s u = u^{2_s^*-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

其中 $2_s^* := \frac{2N}{N-2s}$ 是分数阶 Sobolev 临界指数, $(-\Delta)^s$ 是经由 Fourier 变换定义的分数阶 Laplace 算子. 利用积分形式的移动平面法, 在 $N \geqslant 1$ 和 $0 < s < \frac{N}{2}$ 时, 他们证明了方程 (1.2) 的每一个正解 u 关于某点 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 径向对称递减, 且解的形式为 $u(x) = c(\frac{k}{k^2+|x-x_0|^2})^{(N-2s)/2}$, 其中 $c = c(N,s)$ 和 k 是正的常数. 这样, Lieb [3] 提出的一个公开问题得以解决. Dipierro 等 [4] 利用变分法和非局部的移动平面法等工具研究了如下带有 Hardy-Leray 位势的分数阶临界问题:

$$(-\Delta)^s u - \lambda \frac{u}{|x|^{2s}} = u^{2_s^*-1}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

证明了当 $0 < s < 1$, $N > 2s$, $0 \leqslant \lambda < \Lambda_{N,s}$ 时, 方程 (1.3) 正解的存在性和渐近性. Ghoussoub 和 Shakerian [5] 考虑了如下分数阶双临界问题:

$$(-\Delta)^s u - \lambda \frac{u}{|x|^{2s}} = |u|^{2_s^*-2}u + \frac{|u|^{2_s^*(t)-2}u}{|x|^t}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

证明了当 $0 < s < 1$, $0 < t < 2s < N$, $0 \leqslant \lambda < \Lambda_{N,s}$ 时, 方程 (1.4) 的每个正解都关于原点径向对称递减且当 $|x| \to +\infty$ 时趋于 0. Mallick [6] 研究了源于 Hardy-Sobolev-Maz'ya 不等式的如下分数阶问题:

$$\frac{2}{C_{N,s}}(-\Delta)^s u - \lambda \frac{u}{|x'|^{2s}} = \frac{u^{2_s^*(t)-1}}{|x'|^t}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

其中 $C_{N,s} = 2^{2s}\pi^{-\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N+2s}{2})|\Gamma(-s)|^{-1}$, $0 < s < 1$, $0 \leqslant t < 2s$, $2 \leqslant k \leqslant N-1$, $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi^{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma^2(\frac{k+2s}{4})|\Gamma(-s)|}{\Gamma^2(\frac{k-2s}{4})\Gamma(\frac{N+2s}{2})}$, 并在适当的条件下, 推导出方程 (1.5) 正解的存在性、对称性和渐近性. 对于经典 Laplace 算子方程的相关结果, 参见文献 [7–10].

受以上结果的启发, 本文研究分数阶临界方程组 (1.1) 并获得如下主要结果.

定理 1.1 方程组 (1.1) 有正的基态解 (U_0, V_0), 且 U_0 和 V_0 径向对称递减.

定理 1.2 设 (u,v) 是方程组 (1.1) 的正基态解, 那么 u 是 S 的达到元且存在 $r_{u,v} > 0$ 使得 $v = r_{u,v}u$, $f(r_{u,v}) = \inf_{r\in[0,+\infty)} f(r)$, 其中 S 和 $f(r)$ 由 (2.6) 和 (5.1) 给出.

定理 1.3 设 U 是 S 的达到元. 若 $1 < \alpha, \beta < 2$, 则存在 $r_0 > 0$ 使得 $f(r_0) = \inf_{r\in[0,+\infty)} f(r)$ 且 $(u,v) = (C_0U, C_0r_0U)$ 是方程组 (1.1) 的基态解, 其中 S、$f(r)$ 和 C_0 由 (2.6)、(5.1) 和 (5.4) 给出.

注 1.1 若将定理 1.2 和 1.3 中的 $f(r)$ 替换成 $h(r) := \frac{1+r^2}{(\mu r^{2_s^*(t)}+\nu+\gamma r^\alpha)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}$, 则可得到类似的结果, 区别仅在于 $u = r_{u,v}v$ 和 $(u,v) = (C_0r_0U, C_0U)$, 其中

$$C_0 = \mathcal{S}_s^{\frac{1}{2_s^*(t)-2}}(\mu r_0^{2_s^*(t)} + \nu + \gamma r_0^\alpha)^{-\frac{1}{2_s^*(t)}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|U|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx\right)^{-\frac{1}{2_s^*(t)}}.$$

本文的主要困难在于方程组 (1.1) 定义在全空间 $\mathbb{R}^N$ 中且所有非线性项均是分数阶 Hardy-Sobolev 临界指数增长的, 这些都造成了紧性缺失. 为克服此困难, 考虑一个定义在有界区域且非线性项是次临界增长的辅助问题 (详见 (3.5)), 关于该辅助问题证得一个紧嵌入性结论 (参见引理 3.3), 这对得到基

态解的存在性至关重要. 通过对辅助问题的基态解进行伸缩和取极限, 得到原问题 (1.1) 的解. 在某种意义下, 我们推广了文献 [11] 的结果, 在该文献中, Guo 等研究了如下分数阶临界问题:

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\mu|u|^{2_s^*-2}u+\dfrac{\alpha\gamma}{2_s^*}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 内},\\ (-\Delta)^s v=\nu|v|^{2_s^*-2}v+\dfrac{\beta\gamma}{2_s^*}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, & \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 内},\\ u,v\in D^s(\mathbb{R}^N),\end{cases}\tag{1.6}$$

其中 $0<s<1$, $\mu,\nu>0$, $\alpha+\beta=2_s^*$, $D^s(\mathbb{R}^N)$ 是分数阶 Sobolev 空间, 定义见第 2 节. 他们证明了当 $1<\alpha,\beta<2$ 和 $\gamma>0$ 时, 方程组 (1.6) 有正的基态解 (u,v) 且 u 和 v 径向对称递减. 本文把上述结果推广到带有分数阶 Hardy-Schrödinger 算子和分数阶 Hardy-Sobolev 临界指数的情形, 在无需 $\alpha,\beta<2$ 这个限制条件的情形下得到了基态解的存在性 (参见定理 1.1). 同时在 $\alpha,\beta<2$ 时, 通过 S (定义见 (2.6)) 的达到元和命题 5.1 给出的一个重要关系, 我们构造出方程组 (1.1) 的基态解 (参见定理 1.3).

本文余下内容结构安排如下: 第 2 节列出一些关于分数阶 Sobolev 空间、分数阶 Laplace 算子和分数阶不等式的相关结果; 第 3 节提出一个辅助问题并建立该问题基态解的存在性; 第 4 节通过对区域的伸缩来证明定理 1.1; 第 5 节给出定理 1.2 和 1.3 的证明.

2 预备知识

考虑由 Gagliardo 半范定义的 Hilbert 空间 $D^s(\mathbb{R}^N)$, 其中

$$D^s(\mathbb{R}^N):=\left\{u\in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N):\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{2}+s}}\in L^2(\mathbb{R}^{2N})\right\},$$

范数 $\|u\|_{D^s}^2:=\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$ 由内积

$$\langle u,v\rangle_{D^s}:=\frac{C_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$

所诱导, 其中 $C_{N,s}$ 是常数, 其表达式为

$$C_{N,s}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1-\cos\zeta_1}{|\zeta|^{N+2s}}d\zeta\right)^{-1}=\frac{2^{2s}s\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(1-s)}.\tag{2.1}$$

基于 Parseval-Plancherel 公式 [1], 可证得如下引理.

引理 2.1 若 $s\in(0,1)$, 则对任意的 $u\in D^s(\mathbb{R}^N)$, 有

$$\|u\|_{D^s}^2=\int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi \quad 和 \quad \langle u,v\rangle_{D^s}=\int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2s}\mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}v(\xi)}d\xi.$$

进而, $D^s(\mathbb{R}^N)$ 的等价定义为 $D^s(\mathbb{R}^N)=\{u\in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N):|\xi|^s\mathcal{F}u(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. 对于 $u\in D^s(\mathbb{R}^N)$, 定义分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 为 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(x):=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\mathcal{F}u(\xi))$, 其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换及其逆变换. 因此, 对于 $u\in D^s(\mathbb{R}^N)$, 再由 Parseval-Plancherel 公式, 有

$$\|u\|_{D^s}^2=\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx \quad 和 \quad \langle u,v\rangle_{D^s}=\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}vdx.$$

当 u 有足够的正则性时, 我们可以得到分数阶 Laplace 算子的点态表达, 即

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= C_{N,s}\ \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy = C_{N,s} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_\varepsilon^c(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \\ &= \frac{C_{N,s}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2u(x)-u(x+y)-u(x-y)}{|y|^{N+2s}} dy,\end{aligned}$$

其中 P.V. 是 Cauchy 主值, $C_{N,s}$ 由 (2.1) 给出. 对于 $u \in D^s(\mathbb{R}^N)$, 如下分数阶不等式成立:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx \right)^{2/2_s^*} \leqslant C\|u\|_{D^s}^2 \quad (\text{参见文献 [12,13]}), \tag{2.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx \leqslant C\|u\|_{D^s}^2 \quad (\text{参见文献 [14,15]}), \tag{2.3}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} dx \right)^{2/2_s^*(t)} \leqslant C\|u\|_{D^s}^2 \quad (\text{参见文献 [5,16]}). \tag{2.4}$$

通常, (2.2)、(2.3) 和 (2.4) 分别被称为分数阶 Sobolev 不等式、分数阶 Hardy 不等式和分数阶 Hardy-Sobolev 不等式. 不等式 (2.3) 的最佳常数是 $\Lambda_{N,s}^{-1}$. 若 $\lambda < \Lambda_{N,s}$, 则 $(\|\cdot\|_{D^s}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\cdot|^2}{|x|^{2s}} dx)^{1/2}$ 是 $\|\cdot\|_{D^s}$ 在空间 $D^s(\mathbb{R}^N)$ 中的一个等价范数, 且对于 $u \in D^s(\mathbb{R}^N)$, 有

$$C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} dx \right)^{2/2_s^*(t)} \leqslant \|u\|_{D^s}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx \quad (\text{参见文献 [5]}). \tag{2.5}$$

记不等式 (2.5) 的最佳常数为

$$S := \inf_{\substack{u \in D^s(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_{D^s}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}. \tag{2.6}$$

定义 $\mathcal{D}^s := D^s(\mathbb{R}^N) \times D^s(\mathbb{R}^N)$, 赋予范数 $\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s}^2 := \|u\|_{D^s}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^{2s}} dx + \|v\|_{D^s}^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v^2}{|x|^{2s}} dx$. 称 $(u,v) \in \mathcal{D}^s$ 为方程组 (1.1) 的一个弱解, 如果对于任意的 $(\phi,\psi) \in \mathcal{D}^s$, 有

$$\begin{aligned}&\langle u,\phi\rangle_{D^s} + \langle v,\psi\rangle_{D^s} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u\phi + v\psi}{|x|^{2s}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\mu \frac{|u|^{2_s^*(t)-2}u\phi}{|x|^t} + \frac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)} \frac{|u|^{\alpha-2}u\phi|v|^\beta}{|x|^t} + \nu \frac{|v|^{2_s^*(t)-2}v\psi}{|x|^t} + \frac{\beta\gamma}{2_s^*(t)} \frac{|u|^\alpha |v|^{\beta-2}v\psi}{|x|^t} \right] dx.\end{aligned}$$

方程组 (1.1) 的能量泛函 $E : \mathcal{D}^s \to \mathbb{R}$ 为

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s}^2 - \frac{1}{2_s^*(t)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mu \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \nu \frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \gamma \frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} \right) dx.$$

我们知道方程组 (1.1) 的解对应于泛函 E 的临界点. 方程组 (1.1) 的基态解 $(u_0,v_0) \in \mathcal{D}^s$ 是指满足 $E(u_0,v_0) = \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} E(u,v) =: A$ 的解, 其中 A 是基态能量且

$$\mathcal{N} := \left\{ (u,v) \in \mathcal{D}^s \setminus \{(0,0)\} : \|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mu \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \nu \frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \gamma \frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t} \right) dx \right\}$$

是 Nehari 流形. 由 Young 不等式和 (2.5) 可知 $A > 0$. 为简便起见, 记

$$F(u,v) := \frac{\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s}^2}{(\int_{\mathbb{R}^N} (\mu \frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \nu \frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} + \gamma \frac{|u|^\alpha |v|^\beta}{|x|^t}) dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}.$$

方程组 (1.1) 的基态解依赖于极小值 $\mathcal{S}_s := \inf_{(u,v)\in\bar{\mathcal{D}^s}} F(u,v)$ (参见引理 2.2), 其中

$$\bar{\mathcal{D}^s} := \left\{(u,v)\in\mathcal{D}^s : \int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^t}\right)dx>0\right\}.$$

显然, 当 $\mu,\nu,\gamma>0$ 时, 有 $\bar{\mathcal{D}^s}=\mathcal{D}^s\setminus\{(0,0)\}$. 这样,

$$\mathcal{S}_s = \inf_{\substack{(u,v)\in\mathcal{D}^s\\(u,v)\neq(0,0)}} F(u,v). \tag{2.7}$$

而且, 我们可以证明当 $\gamma\leqslant 0$ 时, $\mathcal{S}_s$ 由半平凡元达到, 这也是我们考虑 $\gamma>0$ 情形的原因.

现在建立方程组 (1.1) 基态解的存在性与 $\mathcal{S}_s$ 的可达性之间的关系.

引理 2.2　方程组 (1.1) 在 $\mathcal{D}^s$ 中有正的基态解当且仅当 $\mathcal{S}_s$ 在 $\mathcal{D}^s$ 中有正的达到元.

证明　对于任意的 $(u,v)\in\mathcal{D}^s\setminus\{(0,0)\}$, 显然存在唯一的

$$k_{u,v}=\left(\frac{\|(u,v)\|^2_{\mathcal{D}^s}}{\int_{\mathbb{R}^N}(\mu\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^t})dx}\right)^{\frac{1}{2_s^*(t)-2}},$$

使得 $(k_{u,v}u,k_{u,v}v)\in\mathcal{N}$. 于是,

$$\mathcal{S}_s=\inf_{\substack{(u,v)\in\mathcal{D}^s\\(u,v)\neq(0,0)}}F(k_{u,v}u,k_{u,v}v)=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}}F(u,v)=\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}}\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s}^{\frac{2(2_s^*(t)-2)}{2_s^*(t)}}.$$

因为 $A=\frac{2s-t}{2(N-t)}\inf_{(u,v)\in\mathcal{N}}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{D}^s}$, 所以, $\mathcal{S}_s$ 可达当且仅当 A 可达. 一方面, 如果方程组 (1.1) 有一个正的基态解 $(u,v)\in\mathcal{D}^s$, 那么 A 被 (u,v) 达到. 因此, 对于任意的 $c\neq0$, $\mathcal{S}_s$ 被 (cu,cv) 达到. 另一方面, 如果 $\mathcal{S}_s$ 被 $(u,v)\in\mathcal{D}^s$ 达到, 其中 $u>0$ 且 $v>0$, 那么 A 被 $(\bar{u},\bar{v})$ 达到, 其中

$$(\bar{u},\bar{v})=\mathcal{S}_s^{\frac{1}{2_s^*(t)-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^t}\right)dx\right)^{-\frac{1}{2_s^*(t)}}(u,v).$$

现只需证明 $(\bar{u},\bar{v})$ 是方程组 (1.1) 的解. 由 Ekeland 变分原理 (参见文献 [17, 定理 8.5]) 可知, 存在 $\{(u_n,v_n)\}\subset\mathcal{N}$ 使得当 $n\to\infty$ 时, $E(u_n,v_n)\to E(\bar{u},\bar{v})$ 于 $\mathbb{R}$, $E'(u_n,v_n)\to0$ 于 $(\mathcal{D}^s)'$, $(u_n,v_n)\to(\bar{u},\bar{v})$ 于 $\mathcal{D}^s$. 因此, 在 $(\mathcal{D}^s)'$ 中, $E'(\bar{u},\bar{v})=0$, 即 $(\bar{u},\bar{v})$ 是方程组 (1.1) 的正解. 证毕. □

3　辅助问题

对于 $R>0$, 考虑

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u-\lambda\dfrac{u}{|x|^{2s}}=\mu\dfrac{|u|^{2_s^*(t)-2}u}{|x|^t}+\dfrac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)}\dfrac{|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta}{|x|^t}, & x\in B_R,\\ (-\Delta)^s v-\lambda\dfrac{v}{|x|^{2s}}=\nu\dfrac{|v|^{2_s^*(t)-2}v}{|x|^t}+\dfrac{\beta\gamma}{2_s^*(t)}\dfrac{|u|^\alpha|v|^{\beta-2}v}{|x|^t}, & x\in B_R,\\ u,v\in D^s(B_R),\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|<R\}$, $D^s(B_R):=\{u\in D^s(\mathbb{R}^N):u=0$ 几乎处处于 $B_R^c\}$. 记 $\mathcal{D}^s(B_R):=D^s(B_R)\times D^s(B_R)$. 定义相应的 Nehari 流形和基态能量为

$$\mathcal{N}(R):=\Big\{(u,v)\in\mathcal{D}^s(B_R)\setminus\{(0,0)\}:\|u\|^2_{D^s,B_R}+\|v\|^2_{D^s,B_R}$$

$$= \int_{B_R}\left(\mu\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u|^\alpha|v|^\beta}{|x|^t}\right)dx\Bigg\}, \tag{3.2}$$

$$A(R) := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}(R)} E(u,v), \tag{3.3}$$

其中

$$\|u\|_{D^s,B_R}^2 := \|u\|_{D^s}^2 - \lambda\int_{B_R}\frac{u^2}{|x|^{2s}}dx. \tag{3.4}$$

记 $\|(u,v)\|_{\mathcal{D}^s,B_R}^2 := \|u\|_{D^s,B_R}^2 + \|v\|_{D^s,B_R}^2$. 关于辅助问题 (3.3) 的基态能量, 有如下结果.

引理 3.1 $A(R)\equiv A, \forall\, R>0$.

证明 设 $R_1<R_2$, 则 $\mathcal{N}(R_1)\subset\mathcal{N}(R_2)$ 蕴含着 $A(R_2)\leqslant A(R_1)$. 对于任意的 $(u,v)\in\mathcal{N}(R_2)$, 记

$$(u_1(x),v_1(x)) := \left(\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{N-2s}{2}}u\left(\frac{R_2}{R_1}x\right),\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{N-2s}{2}}v\left(\frac{R_2}{R_1}x\right)\right),$$

则 $(u_1,v_1)\in\mathcal{N}(R_1)$, 且 $A(R_1)\leqslant E(u_1,v_1)=E(u,v)$ $(\forall\,(u,v)\in\mathcal{N}(R_2))$ 蕴含着 $A(R_1)\leqslant A(R_2)$. 因此, $A(R_1)=A(R_2)$. 设 $(u_n,v_n)\in\mathcal{N}$ 是 A 的极小化序列, 并使得对于某个 $R_n>0$, 有 $u_n,v_n\in D^s(B_{R_n})$. 于是, $(u_n,v_n)\in\mathcal{N}(R_n)$, 进而,

$$A=\lim_{n\to\infty}E(u_n,v_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}A(R_n)=A(R).$$

结合 $A\leqslant A(R)$, 证毕. □

对于 $\varepsilon\in(0,\min\{t,2s-t\})$, 考虑

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u-\lambda\dfrac{u}{|x|^{2s}}=q_\varepsilon(x)\left(\mu|u|^{2_s^*(t)-2}u+\dfrac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)}|u|^{\alpha-2}u|v|^\beta\right), & x\in B_R,\\ (-\Delta)^s v-\lambda\dfrac{v}{|x|^{2s}}=q_\varepsilon(x)\left(\nu|v|^{2_s^*(t)-2}v+\dfrac{\beta\gamma}{2_s^*(t)}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v\right), & x\in B_R,\\ u,v\in D^s(B_R),\end{cases} \tag{3.5}$$

其中

$$q_\varepsilon(x) := \begin{cases}\dfrac{1}{|x|^{t-\varepsilon}}, & \text{若 } |x|<1,\\ \dfrac{1}{|x|^{t+\varepsilon}}, & \text{若 } |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

定义相应的能量泛函、Nehari 流形和基态能量分别为

$$E_\varepsilon(u,v) := \frac{1}{2}(\|u\|_{D^s,B_R}^2+\|v\|_{D^s,B_R}^2)-\frac{1}{2_s^*(t)}\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u|^{2_s^*(t)}+\nu|v|^{2_s^*(t)}+\gamma|u|^\alpha|v|^\beta)dx,$$

$$\mathcal{N}_\varepsilon(R) := \Bigg\{(u,v)\in\mathcal{D}^s(B_R)\setminus\{(0,0)\}: G_\varepsilon(u,v) := \|u\|_{D^s,B_R}^2+\|v\|_{D^s,B_R}^2$$
$$-\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u|^{2_s^*(t)}+\nu|v|^{2_s^*(t)}+\gamma|u|^\alpha|v|^\beta)dx=0\Bigg\}, \tag{3.6}$$

$$A_\varepsilon(R) := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)} E_\varepsilon(u,v). \tag{3.7}$$

由 $q_\varepsilon(x)\leqslant\frac{1}{|x|^t}$ 和 (2.5), 有

$$A_\varepsilon(R)\geqslant C>0, \tag{3.8}$$

其中 C 与 ε 和 R 无关. 关于 (3.7), 我们有如下引理, 这对于得到方程组 (3.5) 的非平凡解至关重要.

引理 3.2 $A_\varepsilon(R)<\min\{\inf_{(u,0)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(u,0),\inf_{(0,v)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(0,v)\}$.

证明 因为 $2<2_s^*(t)<2_s^*$, 由对称递减重排不等式和极小化方法知以下两个方程:

$$\begin{aligned}&(-\Delta)^s u-\lambda\frac{u}{|x|^{2s}}=\mu q_\varepsilon(x)|u|^{2_s^*(t)-2}u,\quad u\in D^s(B_R),\\&(-\Delta)^s v-\lambda\frac{v}{|x|^{2s}}=\nu q_\varepsilon(x)|v|^{2_s^*(t)-2}v,\quad v\in D^s(B_R)\end{aligned}$$

分别有基态解 u_0 和 v_0, 即

$$E_\varepsilon(u_0,0)=a:=\inf_{(u,0)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(u,0),\quad E_\varepsilon(0,v_0)=b:=\inf_{(0,v)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(0,v).$$

对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$, 可证存在唯一的 $k(\tau)>0$ 使得 $(\sqrt{k(\tau)}u_0,\sqrt{k(\tau)\tau^2}v_0)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$. 事实上,

$$\begin{aligned}k(\tau)^{\frac{2_s^*(t)-2}{2}}&=\frac{\|u_0\|_{D^s,B_R}^2+\tau^2\|v_0\|_{D^s,B_R}^2}{\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u_0|^{2_s^*(t)}+|\tau|^{2_s^*(t)}\nu|v_0|^{2_s^*(t)}+|\tau|^\beta\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta)dx}\\&=\frac{pa+pb\tau^2}{pa+pb|\tau|^{2_s^*(t)}+|\tau|^\beta\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx},\end{aligned}$$

其中 $p=\frac{2\cdot 2_s^*(t)}{2_s^*(t)-2}$. 注意到 $k(0)=1$, 有

$$\lim_{\tau\to0}\frac{k'(\tau)}{|\tau|^{\beta-2}\tau}=-\frac{\beta\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx}{2_s^*(t)a},$$

当 $\tau\to0$ 时, 有

$$\begin{aligned}k'(\tau)&=-\frac{\beta\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx}{2_s^*(t)a}|\tau|^{\beta-2}\tau(1+o(1)),\\k(\tau)&=1-\frac{\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx}{2_s^*(t)a}|\tau|^\beta(1+o(1)),\\k(\tau)^{\frac{2_s^*(t)}{2}}&=1-\frac{\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx}{2a}|\tau|^\beta(1+o(1)).\end{aligned}$$

注意到 $\frac12-\frac1p=\frac{1}{2_s^*(t)}$, 当 $|\tau|$ 足够小时, 有

$$\begin{aligned}A_\varepsilon(R)&\leqslant E_\varepsilon(\sqrt{k(\tau)}u_0,\sqrt{k(\tau)\tau^2}v_0)\\&=\left(\frac12-\frac{1}{2_s^*(t)}\right)\left(pa+pb|\tau|^{2_s^*(t)}+|\tau|^\beta\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx\right)k(\tau)^{\frac{2_s^*(t)}{2}}\\&=a-\left(\frac12-\frac1p\right)|\tau|^\beta\int_{B_R}\gamma|u_0|^\alpha|v_0|^\beta dx+o(|\tau|^\beta)<a=\inf_{(u,0)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(u,0).\end{aligned}$$

类似地, $A_\varepsilon(R)<\inf_{(0,v)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)}E_\varepsilon(0,v)$. 证毕. □

由 (2.6) 和 (3.4) 知,

$$S = \inf_{\substack{u \in D^s(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2_{D^s, \mathbb{R}^N}}{(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{2^*_s(t)}}{|x|^t} dx)^{\frac{2}{2^*_s(t)}}}.$$

根据文献 [5, 定理 1.1] 可知, S 被一个正的径向对称递减且当 $|x| \to +\infty$ 时趋于 0 的 $\tilde{u}(x)$ 达到. 定义

$$u_\mu := \left(\frac{S}{\mu}\right)^{\frac{1}{2^*_s(t)-2}} \frac{\tilde{u}}{(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tilde{u}^{2^*_s(t)}}{|x|^t} dx)^{1/2^*_s(t)}},$$

类似于文献 [11, 引理 2.12] 可推得 u_μ 是方程 $(-\Delta)^s u - \lambda \frac{u}{|x|^{2s}} = \mu \frac{|u|^{2^*_s(t)-2} u}{|x|^t}$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ 的正基态解. 因此, 类似于引理 3.2 的证明, 有

$$A < \min \Big\{ \inf_{(u,0) \in \mathcal{N}} E(u, 0), \inf_{(0,v) \in \mathcal{N}} E(0, v) \Big\}. \tag{3.9}$$

现在建立紧嵌入性结论.

引理 3.3 对于 $\varepsilon \in (0, \min\{t, 2s - t\})$, 嵌入 $D^s(B_R) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{2^*_s(t)}(B_R, q_\varepsilon(x)dx)$ 是紧的.

证明 设 $\{u_n\}$ 是 $D^s(B_R)$ 中的有界序列. 在子列意义下, 不妨设当 $n \to \infty$ 时, $u_n \rightharpoonup u_0$ 于 $D^s(B_R)$, 且 $u_n \to u_0$ 几乎处处于 B_R. 往证当 $n \to \infty$ 时, $u_n \to u_0$ 于 $L^{2^*_s(t)}(B_R, q_\varepsilon(x)dx)$. 可令 $R \geqslant 1$. 注意到 $2 < 2^*_s(t) < 2^*_s(t-\varepsilon) < 2^*_s$, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |u_n - u_0|^{2^*_s(t)} q_\varepsilon(x) dx &= \int_{B_1} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t-\varepsilon}} dx + \int_{B_R \setminus B_1} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t+\varepsilon}} dx \\ &\leqslant \int_{B_R} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t-\varepsilon}} dx + \int_{B_R} |u_n - u_0|^{2^*_s(t)} dx \to 0, \end{aligned}$$

其中, 当 n 足够大时, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t-\varepsilon}} dx &= \int_{B_\epsilon} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t-\varepsilon}} dx + \int_{B_R \setminus B_\epsilon} \frac{|u_n - u_0|^{2^*_s(t)}}{|x|^{t-\varepsilon}} dx \\ &\leqslant \left(\int_{B_\epsilon} |u_n - u_0|^{2^*_s} dx \right)^{\frac{2^*_s(t)}{2^*_s}} \left(\int_{B_\epsilon} \frac{1}{|x|^{\frac{(t-\varepsilon)N}{t}}} dx \right)^{\frac{t}{N}} + \epsilon^{\varepsilon - t} \int_{B_R} |u_n - u_0|^{2^*_s(t)} dx \\ &\leqslant C\epsilon^\varepsilon + \epsilon, \end{aligned}$$

这里取 $\epsilon > 0$ 任意小. 证毕. □

接下来证明这部分的主要结果.

命题 3.1 方程组 (3.5) 有一个正的基态解 $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$, 且 u_ε 和 v_ε 径向对称递减.

证明 对 $(u, v) \in \mathcal{N}_\varepsilon(R)$, 记其径向对称递减重排为 (u^*, v^*). 文献 [18, 定理 1.1] 和 [19, 定理 3.4] 保证

$$\begin{aligned} \|u^*\|^2_{D^s} + \|v^*\|^2_{D^s} &\leqslant \|u\|^2_{D^s} + \|v\|^2_{D^s} \\ &= \lambda \int_{B_R} \frac{|u|^2 + |v|^2}{|x|^{2s}} dx + \int_{B_R} q_\varepsilon(x)(\mu |u|^{2^*_s(t)} + \nu |v|^{2^*_s(t)} + \gamma |u|^\alpha |v|^\beta) dx \\ &\leqslant \lambda \int_{B_R} \frac{|u^*|^2 + |v^*|^2}{|x|^{2s}} dx + \int_{B_R} q_\varepsilon(x)(\mu |u^*|^{2^*_s(t)} + \nu |v^*|^{2^*_s(t)} + \gamma |u^*|^\alpha |v^*|^\beta) dx, \end{aligned}$$

即 $\|(u^*,v^*)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}\leqslant\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u^*|^{2^*_s(t)}+\nu|v^*|^{2^*_s(t)}+\gamma|u^*|^\alpha|v^*|^\beta)dx$. 于是, 存在 $r^*\in(0,1]$ 使得 $(r^*u^*,r^*v^*)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$. 因此,

$$A_\varepsilon(R)\leqslant E_\varepsilon(r^*u^*,r^*v^*)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_s(t)}\right](r^*)^2\|(u^*,v^*)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}\leqslant\frac{2s-t}{2(N-t)}\|(u,v)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}=E_\varepsilon(u,v),$$

这意味着可以选取 $A_\varepsilon(R)$ 的一个极小化序列 $(u_n,v_n)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$ 使得 $(u_n,v_n)=(u_n^*,v_n^*)$, 且当 $n\to\infty$ 时, $E_\varepsilon(u_n,v_n)\to A_\varepsilon(R)$. 于是, u_n 和 v_n 在 $D^s(B_R)$ 中有界. 在子列意义下, 可设当 $n\to\infty$ 时, $u_n\rightharpoonup u_\varepsilon$, $v_n\rightharpoonup v_\varepsilon$ 于 $D^s(B_R)$. 显然, u_ε 和 v_ε 径向对称递减. 由引理 3.3 知,

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\nu|v_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\gamma|u_\varepsilon|^\alpha|v_\varepsilon|^\beta)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u_n|^{2^*_s(t)}+\nu|v_n|^{2^*_s(t)}+\gamma|u_n|^\alpha|v_n|^\beta)dx\\&=\frac{2(N-t)}{2s-t}\lim_{n\to\infty}E_\varepsilon(u_n,v_n)=\frac{2(N-t)}{2s-t}A_\varepsilon(R),\end{aligned}$$

结合 $A_\varepsilon(R)>0$ 有 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\neq(0,0)$. 因为 $\|(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\|_{\mathcal{D}^s,B_R}\leqslant\lim_{n\to\infty}\|(u_n,v_n)\|_{\mathcal{D}^s,B_R}$, 所以,

$$\|(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}\leqslant\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\nu|v_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\gamma|u_\varepsilon|^\alpha|v_\varepsilon|^\beta)dx.$$

于是, 存在 $r_\varepsilon\in(0,1]$ 使得 $(r_\varepsilon u_\varepsilon,r_\varepsilon v_\varepsilon)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$. 因此,

$$\begin{aligned}A_\varepsilon(R)\leqslant E_\varepsilon(r_\varepsilon u_\varepsilon,r_\varepsilon v_\varepsilon)&=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*_s(t)}\right](r_\varepsilon)^2\|(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}\\&\leqslant\frac{2s-t}{2(N-t)}\lim_{n\to\infty}\|(u_n,v_n)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}=\lim_{n\to\infty}E_\varepsilon(u_n,v_n)=A_\varepsilon(R),\end{aligned}$$

这蕴含着 $r_\varepsilon=1$, $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$, $E_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=A_\varepsilon(R)$, $\|(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\|_{\mathcal{D}^s,B_R}=\lim_{n\to\infty}\|(u_n,v_n)\|_{\mathcal{D}^s,B_R}$. 故当 $n\to\infty$ 时, $u_n\to u_\varepsilon$, $v_n\to v_\varepsilon$ 于 $D^s(B_R)$. 进而存在 Lagrange 乘子 $L\in\mathbb{R}$ 使得 $E'_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)+LG'_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=0$, 其中 G_ε 由 (3.6) 给出. 由 $E'_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=G_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=0$ 和

$$G'_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=-(2^*_s(t)-2)\int_{B_R}q_\varepsilon(x)(\mu|u_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\nu|v_\varepsilon|^{2^*_s(t)}+\gamma|u_\varepsilon|^\alpha|v_\varepsilon|^\beta)dx<0$$

可得 $L=0$, 于是, $E'_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=0$, 即 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 是方程组 (3.5) 的解. 由 $A_\varepsilon(R)=E_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 和引理 3.2 知 $u_\varepsilon\not\equiv0$ 和 $v_\varepsilon\not\equiv0$. 令 $u_\varepsilon^-=\max\{-u_\varepsilon,0\}$, $v_\varepsilon^-=\max\{-v_\varepsilon,0\}$. 用 $(u_\varepsilon^-,v_\varepsilon^-)$ 作为方程组 (3.5) 的实验函数, 可得

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{B_R}\left[\lambda\frac{(u_\varepsilon^-)^2}{|x|^{2s}}+\mu q_\varepsilon(x)(u_\varepsilon^-)^{2^*_s(t)}+\frac{\alpha\gamma}{2^*_s(t)}q_\varepsilon(x)(u_\varepsilon^-)^\alpha|v_\varepsilon|^\beta\right]dx\\&\quad+\int_{B_R}\left[\lambda\frac{(v_\varepsilon^-)^2}{|x|^{2s}}+\nu q_\varepsilon(x)(v_\varepsilon^-)^{2^*_s(t)}+\frac{\beta\gamma}{2^*_s(t)}q_\varepsilon(x)|u_\varepsilon|^\alpha(v_\varepsilon^-)^\beta\right]dx\\&=\frac{C_{N,s}}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y))(u_\varepsilon^-(x)-u_\varepsilon^-(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(v_\varepsilon(x)-v_\varepsilon(y))(v_\varepsilon^-(x)-v_\varepsilon^-(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right]\\&=\frac{C_{N,s}}{2}\left[\int_{\{u_\varepsilon>0\}\times\{u_\varepsilon<0\}}\frac{(u_\varepsilon^+(x)+u_\varepsilon^-(y))(-u_\varepsilon^-(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right.\\&\quad\left.+\int_{\{u_\varepsilon<0\}\times\{u_\varepsilon>0\}}\frac{(-u_\varepsilon^-(x)-u_\varepsilon^+(y))u_\varepsilon^-(x)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\{u_\varepsilon<0\}\times\{u_\varepsilon<0\}}\frac{-(u_\varepsilon^-(x)-u_\varepsilon^-(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{C_{N,s}}{2}\bigg[\int_{\{v_\varepsilon>0\}\times\{v_\varepsilon<0\}}\frac{(v_\varepsilon^+(x)+v_\varepsilon^-(y))(-v_\varepsilon^-(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&+\int_{\{v_\varepsilon<0\}\times\{v_\varepsilon>0\}}\frac{(-v_\varepsilon^-(x)-v_\varepsilon^+(y))v_\varepsilon^-(x)}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\{v_\varepsilon<0\}\times\{v_\varepsilon<0\}}\frac{-(v_\varepsilon^-(x)-v_\varepsilon^-(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\bigg]\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

故 $u_\varepsilon^-=v_\varepsilon^-=0$, 即 u_ε 和 v_ε 非负. 由文献 [20,21] 中的正则性理论和文献 [21, 命题 2.17] 知 u_ε 和 v_ε 在 B_R 中恒正. 证毕. □

对每个 $(u,v)\in\mathcal{N}(R)$, 由 (3.2) 和 (3.6) 知, 存在 $r_\varepsilon>0$ 使得 $\lim_{\varepsilon\to0}r_\varepsilon=1$ 且 $(r_\varepsilon u,r_\varepsilon v)\in\mathcal{N}_\varepsilon(R)$. 于是,

$$
\limsup_{\varepsilon\to0}A_\varepsilon(R)\leqslant\limsup_{\varepsilon\to0}E_\varepsilon(r_\varepsilon u,r_\varepsilon v)=E(u,v),\quad\forall\,(u,v)\in\mathcal{N}(R),
$$

这里用了控制收敛定理. 因此, 由引理 3.1 有

$$
\limsup_{\varepsilon\to0}A_\varepsilon(R)\leqslant A(R)=A. \tag{3.10}
$$

由命题 3.1, 可设 $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ 是方程组 (3.5) 的正基态解, 并且是径向对称递减的. 根据 (3.8), 得

$$
A_\varepsilon(R)=\frac{2s-t}{2(N-t)}\|(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\|^2_{\mathcal{D}^s,B_R}\geqslant C>0. \tag{3.11}
$$

由 (3.10) 知, u_ε 和 v_ε 在 $D^s(B_R)$ 中有界. 在子列意义下可设当 $\varepsilon\to0$ 时,

$$
u_\varepsilon\rightharpoonup u_0,\quad v_\varepsilon\rightharpoonup v_0\quad\text{于 } D^s(B_R). \tag{3.12}
$$

于是, (u_0,v_0) 是方程组 (3.1) 的解.

反设 $\|u_\varepsilon\|_\infty+\|v_\varepsilon\|_\infty$ 有界. 根据控制收敛定理, 有

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_R}q_\varepsilon(x)u_\varepsilon^{2_s^*(t)}dx&=\int_{B_R}\frac{u_0^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx,\\
\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_R}q_\varepsilon(x)v_\varepsilon^{2_s^*(t)}dx&=\int_{B_R}\frac{v_0^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx,\\
\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_R}q_\varepsilon(x)u_\varepsilon^{\alpha}v_\varepsilon^{\beta}dx&=\int_{B_R}\frac{u_0^\alpha v_0^\beta}{|x|^t}dx.
\end{aligned}
$$

结合 $E_\varepsilon'(u_\varepsilon,v_\varepsilon)=E'(u_0,v_0)=0$, 类似于 3.1 的证明并注意到 (3.10), 可知当 $\varepsilon\to0$ 时, $u_\varepsilon\to u_0$, $v_\varepsilon\to v_0$ 于 $D^s(B_R)$. (3.11) 和 (3.12) 蕴含着 $(u_0,v_0)\neq(0,0)$, $u_0\geqslant0$, $v_0\geqslant0$. 不失一般性, 设 $u_0\neq0$, 根据文献 [21, 命题 2.17] 知, 在 B_R 中, $u_0>0$. 由分数阶 Pohozaev 恒等式 (参见文献 [11, 引理 2.5]) 可得到如下矛盾:

$$
\begin{aligned}
0&<\frac{\Gamma(1+s)^2}{N-2s}\int_{\partial B_R}\left[\left(\frac{u_0}{\delta^s}\right)^2+\left(\frac{v_0}{\delta^s}\right)^2\right](x\cdot\vec{n})d\sigma\\
&=\int_{B_R}\left(\mu\frac{u_0^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{v_0^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{u_0^\alpha v_0^\beta}{|x|^t}+\lambda\frac{u_0^2+v_0^2}{|x|^{2s}}\right)dx-\|u_0\|^2_{D^s}-\|v_0\|^2_{D^s}=0,
\end{aligned}
$$

其中 $\delta(x)=\operatorname{dist}(x,\partial B_R)$, $\vec{n}$ 是 ∂B_R 的单位外法向量. 于是当 $\varepsilon\to0$ 时, 在子列意义下,

$$
\|u_\varepsilon\|_\infty+\|v_\varepsilon\|_\infty\to\infty.
$$

令 $M_\varepsilon:=\max\{u_\varepsilon(0),v_\varepsilon(0)\}$. 显然, $u_\varepsilon(0)=\max_{B_R}u_\varepsilon(x)$, $v_\varepsilon(0)=\max_{B_R}v_\varepsilon(x)$ 且 $\lim_{\varepsilon\to0}M_\varepsilon=+\infty$.

4　定理 1.1 的证明

定义

$$U_\varepsilon(x) := \begin{cases} M_\varepsilon^{-1} u_\varepsilon(M_\varepsilon^{-\theta_\varepsilon} x), & x \in B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}, \\ 0, & x \in B^c_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}, \end{cases} \quad V_\varepsilon(x) := \begin{cases} M_\varepsilon^{-1} v_\varepsilon(M_\varepsilon^{-\theta_\varepsilon} x), & x \in B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}, \\ 0, & x \in B^c_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}, \end{cases}$$

其中 $\theta_\varepsilon := \frac{2_s^*(t)-2}{2s-(t-\varepsilon)}$, 则

$$\max\{U_\varepsilon(0), V_\varepsilon(0)\} = \max\left\{\max_{x \in B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}} U_\varepsilon(x), \max_{x \in B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}} V_\varepsilon(x)\right\} = 1 \tag{4.1}$$

且 $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 是方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s U_\varepsilon - \lambda \dfrac{U_\varepsilon}{|x|^{2s}} = \mu \dfrac{U_\varepsilon^{2_s^*(t)-1}}{|x|^{t-\varepsilon}} + \dfrac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)} \dfrac{U_\varepsilon^{\alpha-1} V_\varepsilon^{\beta}}{|x|^{t-\varepsilon}}, \\ (-\Delta)^s V_\varepsilon - \lambda \dfrac{V_\varepsilon}{|x|^{2s}} = \nu \dfrac{V_\varepsilon^{2_s^*(t)-1}}{|x|^{t-\varepsilon}} + \dfrac{\beta\gamma}{2_s^*(t)} \dfrac{U_\varepsilon^{\alpha} V_\varepsilon^{\beta-1}}{|x|^{t-\varepsilon}}, \\ U_\varepsilon, V_\varepsilon \in D^s(B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}) \end{cases}$$

的解. 由 $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 在 $\mathcal{D}^s(B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}})$ 中有界和文献 [22, 定理 1.4] 可知, $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 关于 ε 一致 Hölder 连续. 据 Arzela-Ascoli 定理, 在子列意义下, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $(U_\varepsilon, V_\varepsilon)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 的每个紧子集上都一致收敛于 $(U_0, V_0) \in \mathcal{D}^s(\mathbb{R}^N)$. 进而 (U_0, V_0) 是方程组 (1.1) 的解, 且 $U_0 \geqslant 0$ 和 $V_0 \geqslant 0$ 径向对称递减. 注意到 (4.1), 有 $(U_0, V_0) \neq (0, 0)$ 和 $(U_0, V_0) \in \mathcal{N}$. 根据 (3.10) 和范数的弱下半连续性, 得

$$\begin{aligned} A \leqslant E(U_0, V_0) &= \frac{2s-t}{2(N-t)} \|(U_0, V_0)\|^2_{\mathcal{D}^s} \leqslant \frac{2s-t}{2(N-t)} \liminf_{\varepsilon \to 0} \|(U_\varepsilon, V_\varepsilon)\|^2_{\mathcal{D}^s, B_{M_\varepsilon^{\theta_\varepsilon}}} \\ &= \frac{2s-t}{2(N-t)} \liminf_{\varepsilon \to 0} \|(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\|^2_{\mathcal{D}^s, B_1} = \liminf_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(1) \leqslant A, \end{aligned}$$

因此, $E(U_0, V_0) = A$. 由 (3.9) 知 $U_0 \not\equiv 0$ 和 $V_0 \not\equiv 0$. 根据文献 [21, 命题 2.17] 有 $U_0 > 0$ 和 $V_0 > 0$, 即 (U_0, V_0) 是方程组 (1.1) 的正基态解. 定理 1.1 证毕.

5　定理 1.2 和 1.3 的证明

对于 $r \geqslant 0$, 定义

$$f(r) := \frac{1 + r^2}{(\mu + \nu r^{2_s^*(t)} + \gamma r^\beta)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}, \tag{5.1}$$

则 $f(+\infty) := \lim_{r \to +\infty} f(r) = \nu^{-2/2_s^*(t)}$, 而且对任意的 $v \in D^s(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, 有

$$F(v, rv) = \frac{1 + r^2}{(\mu + \nu r^{2_s^*(t)} + \gamma r^\beta)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}} \cdot \frac{\|v\|^2_{D^s} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^2}{|x|^{2s}} dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}} = f(r) \cdot \frac{\|v\|^2_{D^s, \mathbb{R}^N}}{(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t} dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}. \tag{5.2}$$

下面的命题对于证明定理 1.2 和 1.3 至关重要.

命题 5.1　$\mathcal{S}_s = S \inf_{r \in [0, +\infty)} f(r)$, 其中 $\mathcal{S}_s$、S 和 $f(r)$ 分别由 (2.7)、(2.6) 和 (5.1) 给出.

证明 由 (2.7) 和 (5.2) 有

$$\mathcal{S}_s \leqslant \inf_{\substack{v\in D^s(\mathbb{R}^N)\\ v\neq 0}} \inf_{r\in[0,+\infty)} F(v,rv) = S\inf_{r\in[0,+\infty)} f(r).$$

对于反向不等式 (即 $\mathcal{S}_s \geqslant S\inf_{r\in[0,+\infty)} f(r)$) 的证明, 分 3 种情形. 设 $\{(u_n,v_n)\}$ 是 $\mathcal{S}_s$ 的极小化序列. 因为对于 $r>0$ 有 $F(ru,rv)=F(u,v)$, 故可设 $\mathcal{S}_s = F(u_n,v_n)+o(1)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N}(\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t})dx\equiv 1$.

情形 1 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=0$. 由 $\{v_n\}$ 在 $L^{2_s^*(t)}(\mathbb{R}^N,\frac{dx}{|x|^t})$ 中有界和 Hölder 不等式可知, 在子列意义下有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mu\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u_n|^\alpha|v_n|^\beta}{|x|^t}\right)dx=\nu\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx+o(1).$$

于是,

$$F(u_n,v_n)\geqslant\frac{\|v_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}}{(\int_{\mathbb{R}^N}(\mu\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\gamma\frac{|u_n|^\alpha|v_n|^\beta}{|x|^t})dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}=\frac{\|v_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}}{(\int_{\mathbb{R}^N}\nu\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx+o(1))^{\frac{2}{2_s^*(t)}}},$$

因此, $\lim_{n\to\infty}F(u_n,v_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}F(0,v_n)$. 故 $(0,v_n)$ 也是 $\mathcal{S}_s$ 的极小化序列. 进而,

$$\mathcal{S}_s\geqslant\nu^{-\frac{2}{2_s^*(t)}}S=S\lim_{r\to+\infty}f(r)\geqslant S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r).$$

情形 2 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=0$. 类似于情形 1, 可得

$$\mathcal{S}_s\geqslant\mu^{-\frac{2}{2_s^*(t)}}S=Sf(0)\geqslant S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r).$$

情形 3 在子列意义下, $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\delta>0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=1-\delta>0$. 取 $r_n>0$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|r_nu_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx$, 则 $\{r_n\}$ 有界且远离 0, 在子列意义下, 可设当 $n\to\infty$ 时, $r_n\to r_0=(\frac{1-\delta}{\delta})^{1/2_s^*(t)}$. 记 $w_n=\frac{1}{r_n}v_n$, 有 $\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx$. 根据 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^\alpha|w_n|^\beta}{|x|^t}dx&\leqslant\frac{\alpha}{2_s^*(t)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx+\frac{\beta}{2_s^*(t)}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx\\&=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx,\end{aligned}$$

当且仅当 $|u_n|=|w_n|$ 时取等号. 于是,

$$\begin{aligned}F(u_n,v_n)&=F(u_n,r_nw_n)\\&=\frac{\|u_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}+r_n^2\|w_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}}{(\int_{\mathbb{R}^N}(\mu\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}+\nu\frac{|w_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}r_n^{2_s^*(t)}+\gamma\frac{|u_n|^\alpha|w_n|^\beta}{|x|^t}r_n^\beta)dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}\\&\geqslant\frac{\|u_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}}{(\mu+\nu r_n^{2_s^*(t)}+\gamma r_n^\beta)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}+\frac{r_n^2\|w_n\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}}{(\mu+\nu r_n^{2_s^*(t)}+\gamma r_n^\beta)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w_n|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}\\&\geqslant S\frac{1+r_n^2}{(\mu+\nu r_n^{2_s^*(t)}+\gamma r_n^\beta)^{\frac{2}{2_s^*(t)}}}=Sf(r_n),\end{aligned}$$

这蕴含着 $\mathcal{S}_s\geqslant Sf(r_0)\geqslant S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r)$. 因此, $\mathcal{S}_s=S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r)$. 证毕. □

定理 1.2 的证明 设 (u,v) 是方程组 (1.1) 的正基态解. 存在 $r_{u,v}>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|r_{u,v}u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx.$$

令 $w=\frac{1}{r_{u,v}}v$, 则有 $\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|w|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx$. 类似于命题 5.1 证明中的情形 3, 并应用命题 5.1、引理 2.2 和 (5.2), 得

$$S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r)=\mathcal{S}_s=F(u,v)=F(u,r_{u,v}w)\geqslant f(r_{u,v})S\geqslant S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r).$$

于是, $f(r_{u,v})=\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r)$. 根据 Young 不等式取等号的条件知 $u=w$, 进而 $v=r_{u,v}u$. 注意到 (5.2), 有 $S=\|u\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}\cdot(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx)^{-\frac{2}{2_s^*(t)}}$. 定理 1.2 证毕. □

定理 1.3 的证明 由 (5.1) 得

$$f'(r)=\frac{2r^{\beta-1}g(r)}{(\mu+\nu r^{2_s^*(t)}+\gamma r^{\beta})^{\frac{6}{2_s^*(t)}-1}},$$

其中 $g(r):=\mu r^{2-\beta}-\nu r^{\alpha}+\frac{\alpha\gamma}{2_s^*(t)}r^2-\frac{\beta\gamma}{2_s^*(t)}$. 因为 $1<\alpha,\beta<2$, 所以, $\lim_{r\to0^+}g(r)<0$ 且 $\lim_{r\to+\infty}g(r)>0$, 故存在正实数 r_0 使得

$$f(r_0)=\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r). \tag{5.3}$$

设 U 是 S 的达到元. 根据命题 5.1, 以及 (5.2) 和 (5.3), 得

$$\mathcal{S}_s=S\inf_{r\in[0,+\infty)}f(r)=f(r_0)\|U\|^2_{D^s,\mathbb{R}^N}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx\right)^{-\frac{2}{2_s^*(t)}}=F(U,r_0U),$$

这意味着 $\mathcal{S}_s$ 被 (U,r_0U) 达到. 由引理 2.2 知, $(u,v)=(C_0U,C_0r_0U)$ 是方程组 (1.1) 的基态解, 其中

$$C_0:=\mathcal{S}_s^{\frac{1}{2_s^*(t)-2}}(\mu+\nu r_0^{2_s^*(t)}+\gamma r_0^{\beta})^{-\frac{1}{2_s^*(t)}}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}\frac{|U|^{2_s^*(t)}}{|x|^t}dx\right)^{-\frac{1}{2_s^*(t)}}. \tag{5.4}$$

定理 1.3 证毕. □

参考文献

1 Di Nezza E, Palatucci G, Valdinoci E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull Sci Math, 2012, 136: 521–573

2 Chen W, Li C, Ou B. Classification of solutions for an integral equation. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 330–343

3 Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. Ann of Math (2), 1983, 118: 349–374

4 Dipierro S, Montoro L, Peral I, et al. Qualitative properties of positive solutions to nonlocal critical problems involving the Hardy-Leray potential. Calc Var Partial Differential Equations, 2016, 55: 99

5 Ghoussoub N, Shakerian S. Borderline variational problems involving fractional Laplacians and critical singularities. Adv Nonlinear Stud, 2015, 15: 527–555

6 Mallick A. Extremals for fractional order Hardy-Sobolev-Maz'ya inequality. Calc Var Partial Differential Equations, 2019, 58: 45

7 Cerami G, Zhong X, Zou W. On some nonlinear elliptic PDEs with Sobolev-Hardy critical exponents and a Li-Lin open problem. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 1793–1829

8 Hsia C H, Lin C S, Wadade H. Revisiting an idea of Brézis and Nirenberg. J Funct Anal, 2010, 259: 1816–1849

9 Guo Y, Luo S, Zou W. The existence, uniqueness and nonexistence of the ground state to the N-coupled Schrödinger systems in $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 4$). Nonlinearity, 2018, 31: 314–339

10 Ghoussoub N, Kang X S. Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2004, 21: 767–793

11 Guo Z, Luo S, Zou W. On critical systems involving fractional Laplacian. J Math Anal Appl, 2017, 446: 681–706

12 Cotsiolis A, Tavoularis N K. Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives. J Math Anal Appl, 2004, 295: 225–236

13 Maz'ya V, Shaposhnikova T. On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces. J Funct Anal, 2002, 195: 230–238

14 Frank R L, Lieb E H, Seiringer R. Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrödinger operators. J Amer Math Soc, 2008, 21: 925–950

15 Frank R L, Seiringer R. Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities. J Funct Anal, 2008, 255: 3407–3430

16 Yang J. Fractional Sobolev-Hardy inequality in $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal, 2015, 119: 179–185

17 Willem M. Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 24. Boston: Birkhäuser, 1996

18 Park Y J. Fractional Polya-Szegö inequality. J Chungcheong Math Soc, 2011, 24: 267–271

19 Lieb E H, Loss M. Analysis, 2nd ed. Graduate Studies in Mathematics, vol. 14. Providence: Amer Math Soc, 2001

20 Ros-Oton X, Serra J. The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: Regularity up to the boundary. J Math Pures Appl (9), 2014, 101: 275–302

21 Silvestre L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator. Comm Pure Appl Math, 2007, 60: 67–112

22 Mou C. Nonlinear elliptic systems involving the fractional Laplacian in the unit ball and on a half space. Commun Pure Appl Anal, 2015, 14: 2335–2362

A system involving fractional Hardy-Schrödinger operators and critical Hardy-Sobolev exponents

Zhenyu Guo, Min Liu & Zhongwei Tang

Abstract We study a system involving fractional Hardy-Schrödinger operators and critical Hardy-Sobolev exponents. Under appropriate conditions, the existence and correlation results of ground state solutions to this system are obtained. To overcome the lack of compactness, we consider a proper approximate problem with subcritical nonlinear terms defined in a bounded domain. Moreover, a compact embedding result for the approximate problem is proved.

Keywords ground state solutions, fractional Hardy-Schrödinger operators, fractional critical Hardy-Sobolev exponents

MSC(2020) 35R11, 35B33

doi: 10.1360/SCM-2019-0571