随机环境中带移民的上临界分枝过程的 Berry-Esseen 界

王艳清¹, 刘全升^{2,1*}

1. 中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉 430073;

2. Univ Bretagne Sud, LMBA, UMR CNRS 6205, Vannes 56000, France

E-mail: yangqingwang102@163.com, quansheng.liu@univ-ubs.fr

收稿日期: 2019-08-23; 接受日期: 2020-01-08; 网络出版日期: 2020-11-24; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11731012 和 11571052)、中南财经政法大学中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2722020JX006, 2722020JCT031 和 2722020PY040) 和法国 Centre Henri Lebesgue (Grant No: ANR-11-LABX-0020-01) 资助项目

摘要 考虑独立同分布的随机环境中带移民的上临界分枝过程 (Z_n) . 应用 (Z_n) 与随机环境中不带移民分枝过程的联系, 以及与相应随机游动的联系, 在一些适当的矩条件下, 本文证明关于 $\log Z_n$ 的中心极限定理的 Berry-Esseen 界.

关键词 分枝过程 随机环境 中心极限定理 Berry-Esseen 界

MSC (2020) 主题分类 60J80, 60F05

1 引言

近年来, 随机环境中的分枝过程取得了丰硕的研究成果. 例如, 关于临界和下临界情形的生存概率及条件极限定理参见文献 [1–4], 关于上临界情形下的大偏差参见文献 [5–10], 其他渐近性质参见文献 [11–14]. 随机环境中带移民的分枝过程作为其重要拓展, 在理论与实际研究领域有着广泛应用. 例如, Kesten 等^[15] 借助独立同分布环境中带移民的分枝过程得到了随机环境中随机游动的极限分布, Bansaye^[16] 利用该模型研究了细胞传染问题, Vatutin^[17] 利用该模型研究了具有随机服务机制的投票系统. 通过文献梳理, 我们发现关于随机环境中带有移民的分枝过程的极限理论相对较少, 这使得该理论在具体应用中不够方便. 在前期研究工作 [18] 中, 我们得到了上临界情形 $\log Z_n$ 的中心极限定理和大偏差原理. 本文研究中心极限定理的收敛速度问题, 即关于 $\log Z_n$ 的 Berry-Esseen 界. 该结论一方面深化了我们对该模型的理解, 进一步揭示了与相应随机游动的联系; 另一方面对临界参数估计的概率误差给出了重要信息.

英文引用格式: Wang Y Q, Liu Q S. Berry-Esseen's bound for a supercritical branching process with immigration in a random environment (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 751–762, doi: 10.1360/SSM-2019-0206

为了便于理解, 首先给出该模型的定义. 设 $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ 表示一系列独立同分布的随机环境. 随机环境 ξ 中带移民 $(Y_n)_{n \geq 0}$ 的分枝过程 $(Z_n)_{n \geq 0}$ 定义如下:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

这里 $X_{n,i}$ 表示第 n 代第 i 个粒子所产生的后代数目, Y_n 表示第 n 代移民的数目. 当环境 ξ 给定时, $(X_{n,i}, Y_n, n = 0, 1, \dots, i = 1, 2, \dots)$ 是一列相互独立的随机变量序列; 对于每个固定的 n , $X_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots$) 具有共同的分布, 且该分布依赖于时刻 n 的环境 ξ_n , 记为 $p(\xi_n) = (p_k(\xi_n) : k \in \mathbb{N})$; Y_n 的分布同样依赖于环境 ξ_n , 记为 $\hat{p}(\xi_n) = (\hat{p}_k(\xi_n) : k \in \mathbb{N})$.

为了简单常记 $X_0 = X_{0,1}$ (其给定环境 ξ 下的条件分布为 $p(\xi_0)$). 记 (Γ, P_ξ) 为给定环境 ξ 下过程所处的概率空间, 通常称 P_ξ 为淬火分布. 随机环境 ξ_n 的状态空间记为 Θ . 总的概率空间可以看作乘积空间 $(\Gamma \times \Theta^\mathbb{N}, P)$, 其中 $P(dx, d\xi) = P_\xi(dx)\tau(d\xi)$, 即对任意可测的正函数 g , 有

$$\int g(x, \xi) P(dx, d\xi) = \int \int g(x, \xi) P_\xi(dx) \tau(d\xi),$$

这里 τ 表示随机环境 ξ 的分布. 通常称 P 为退火分布. P_ξ 可以看作是给定环境 ξ 时 P 的条件概率分布, 关于 P_ξ 和 P 的数学期望分别记为 E_ξ 和 E .

对于任意的 $n \geq 0$ 和 $t > 0$, 定义

$$m_n(t) = m(t, \xi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^t p_k(\xi_n), \quad m_n = m_n(1)$$

且

$$\hat{m}_n(t) = \hat{m}(t, \xi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^t \hat{p}_k(\xi_n), \quad \hat{m}_n = \hat{m}_n(1),$$

则 $m_n(t) = E_\xi X_{n,i}^t$ 且 $\hat{m}_n(t) = E_\xi Y_n^t$. 令

$$\Pi_0 = 1, \quad \Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1} m_k, \quad n \geq 1.$$

在我们的研究中将用到如下与该分枝过程相关的随机游动:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \log \Pi_n = \sum_{i=1}^n \log m_{i-1}, \quad n \geq 1,$$

这里随机变量 $\{\log m_{i-1}\}_{i \geq 1}$ 是一列仅依赖于环境 ξ 的独立同分布序列. 容易看出,

$$\log Z_n = S_n + \log W_n, \quad (1.2)$$

其中 $W_n = \frac{Z_n}{\Pi_n}$. 在适当的条件下, W_n 收敛于一个非退化的正随机变量 W . 所以, (1.2) 蕴涵了过程 $(\log Z_n)$ 的行为在很大程度上依赖于随机游动 (S_n) .

令 $\mu = E \log m_0$, $\sigma^2 = E(\mu - \log m_0)^2$. 假设 $\mu \in (0, \infty)$, $0 < \sigma^2 < \infty$ (从而 S_n 是非退化的). 另外, 我们还假设如下条件成立:

$$E \left(\frac{X_0}{m_0} \log^+ X_0 \right) < \infty, \quad (1.3)$$

其中 $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ 为 $\log x$ 的正部.

由文献 [11, 定理 3.2 和 定理 4.3] 知, 在条件 (1.3) 和 $E \log^+(Y_0/m_0) < \infty$ 满足时, W_n 几乎处处收敛于一个非负随机变量 W , 且 $P(W > 0) > 0$. 同时, 我们还假设

$$p_0 = 0 \quad \text{P-a.s.} \quad (1.4)$$

这保证了随机游动 S_n 具有正的增量, 且 $Z_n \rightarrow \infty$ 和 $W > 0$ 几乎必然成立.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 使得

$$E(\log m_0)^{2+\delta} < \infty \quad (1.5)$$

且存在常数 $p > 1$ 使得

$$E\left(\frac{X_0}{m_0}\right)^p < \infty, \quad E\left(\frac{Y_0}{m_0}\right)^p < \infty, \quad (1.6)$$

则存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{n^{\delta/2}},$$

其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 是标准正态分布函数.

定理的证明借鉴了前期研究工作 [11, 18]. 证明的关键是建立一个关于 $\log Z_n$ 和相应随机游动 S_n 的比较定理. 该定理表明规范化后的序列 $\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 和 $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 以大概率具有同向的性质, 即对任意实数 x , 二者同时大于或同时小于 x (参见引理 3.1). 为此, 我们将带移民的过程 (Z_n) 表述为不带移民情形的随机环境中分枝过程的线性组合.

本文仅考虑随机环境中离散时间离散状态的 Galton-Watson 过程. 关于随机环境中的连续状态分枝过程、两性分枝过程、超过程和一般 Markov 链, 可以分别参见文献 [19–22].

2 准备工作

为了论述清晰, 我们约定一些记号. 按习惯, 第 n 代的每一个个体由一个长度为 n 的序列标记. 对于两个序列 u 和 v , 记 $uv = (u, v)$ 为 u 和 v 的连接序列. 约定 $u\emptyset = \emptyset u = u$. 对每一个 $n = 0, 1, 2, \dots$, 我们在第 n 代增加一个粒子, 通常称为永恒粒子, 记为 $0_0, 0_1, 0_2, \dots$, 其中 $0_{n+1} := 0_n 0$, 且将第 $n+1$ 代的 Y_n 个移民看作是粒子 0_n 的后代. 为了保持树的结构, 我们将粒子 0_{n+1} 也看作粒子 0_n 的后代. 故第 n 代的永恒粒子共生成 $Y_n + 1$ 个后代, 即 $\{0_{n+1}, 0_n 1, 0_n 2, \dots, 0_n Y_n\}$. 一般地, 非永恒粒子 u 的直接后代记为 $u1, u2, \dots$. 这样, 随机环境中带移民的分枝树 (记为 T) 就分成两个互不相交的树: 一个是从初始粒子 $\emptyset$ 衍生的, 这个树不包含移民, 记为 $\tilde{T}$; 另一个是从永恒粒子 0_0 衍生的, 记为 $\hat{T}$ (见图 1).

为了给出家族树的精确定义, 我们引入以下记号. 记 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$,

$$\tilde{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n, \quad \hat{U} = \{0_k u : k \geq 0, u \in \tilde{U}\}.$$

对于 $u \in \tilde{U} \cup \hat{U}$, 记 $|u|$ 为序列 u 的长度; 约定 $|\emptyset| = |0_0| = 0$, $|0_0 v| = |v|$. 记

$$E = \{0_k : k \geq 0\}$$

图 1 (网络版彩图) 随机环境中带移民分枝过程的家族树

为所有永恒粒子的集合. 设 $\{X_u : u \in \tilde{U} \cup \hat{U}\}$ 为一列随机变量, 在给定环境分布 P_ξ 下, 它们彼此相互独立. 给定环境 ξ , $X_{0_n} = Y_n$ 服从分布 $\hat{p}(\xi_n)$; X_u ($u \in (\tilde{U} \cup \hat{U}) \setminus E$) 服从分布 $p(\xi_n)$, 其中 $|u| = n$. $\tilde{T}_n$ 表示在时刻 n 初始粒子 $\emptyset$ 的所有后代的集合, 其精确定义如下:

$$\tilde{T}_0 = \{\emptyset\}, \quad \tilde{T}_{n+1} = \{ui : u \in \tilde{T}_n, 1 \leq i \leq X_u\}, \quad n \geq 0.$$

类似地, $\hat{T}_n$ 的精确定义如下:

$$\hat{T}_0 = \{0_0\}, \quad \hat{T}_{n+1} = \{0_{n+1}\} \cup \{ui : u \in \hat{T}_n, 1 \leq i \leq X_u\}, \quad n \geq 0$$

(注意所有的永恒粒子 0_n 都是 0_0 的后代且 $X_{0_n} = Y_n$). 令 $\tilde{T} = \bigcup_{n \geq 0} \tilde{T}_n$ 且 $\hat{T} = \bigcup_{n \geq 0} \hat{T}_n$, 则 $\tilde{T}$ 是随机环境中没有移民的分枝家族树, 其第 n 代后代分布为 $p(\xi_n)$, $n \geq 0$; $\hat{T}$ 是一个仅包含移民及其后代的分枝家族树; $T = \tilde{T} \cup \hat{T}$ 是随机环境中带移民的分枝家族树, 其第 n 代后代分布为 $p(\xi_n)$, 移民分布为 $\hat{p}(\xi_n)$, $n \geq 0$. 对于 $a \in (\tilde{U} \cup \hat{U}) \setminus E$, 记 $\tilde{T}^{(a)}$ 为 $\tilde{T}$ 在 a 处的平移树, 其精确定义如下:

$$\tilde{T}^{(a)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n^{(a)}, \quad \tilde{T}_0^{(a)} = \{\emptyset\}, \quad \tilde{T}_{n+1}^{(a)} = \{ui : u \in \tilde{T}_n^{(a)}, 1 \leq i \leq X_{au}\}, \quad n \geq 0.$$

由该定义可以看出, $\tilde{T}^{(\emptyset)} = \tilde{T}$, 且对 $a \in \tilde{T}_n$, 有 $v \in \tilde{T}_n^{(a)}$ 当且仅当 $av \in \tilde{T}_{|a|+n}$. 这里需要强调一下, 当提到分枝树 $\tilde{T}^{(a)}$ 时, 它的初始粒子仍然是 $\emptyset$ (而不是 a), 而以 $a \in \tilde{T}$ 为初始粒子的子树为 $a\tilde{T}^{(a)} := \{au : u \in \tilde{T}^{(a)}\}$. 定义

$$\tilde{Z}_n^{(a)} = \#a\tilde{T}_n^{(a)} = \#\tilde{T}_n^{(a)}, \quad \tilde{W}_n^{(a)} = \frac{\tilde{Z}_n^{(a)}}{m_{|a|} \cdots m_{|a|+n-1}}, \quad a \in (\tilde{U} \cup \hat{U}) \setminus E,$$

其中 $\#A$ 表示集合 A 的势. 众所周知, $\{\tilde{W}_n^{(\emptyset)}, n \geq 0\}$ 在 P_ξ 或 P 下都是一个关于 σ -代数流 $\tilde{\mathcal{F}}_n = \sigma(\xi, X_v : v \in \tilde{U}, |v| < n)$ 的非负鞅. 故 $\tilde{W}^{(\emptyset)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{W}_n^{(\emptyset)}$ 几乎处处存在且 $E_\xi \tilde{W}^{(\emptyset)} = 1$; 由 Fatou 引理可知, $E_\xi \tilde{W}^{(\emptyset)} \leq 1$.

由于这里的环境是独立同分布的, 对每一个 $a \in (\tilde{U} \cup \hat{U}) \setminus E$, 过程 $\{\tilde{W}_n^{(a)}\}_n$ 在 $P_{\theta^m \xi}$ 下的分布与过程 $\{\tilde{W}_n^{(\emptyset)}\}_n$ 在 P_ξ 下的分布是相同的, 这里 θ 是环境的平移变换:

$$\theta(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots),$$

θ^m 是 θ 的 m 重迭代, $m = |a|$, θ^0 是恒等算子. 故对每一个 $a \in (\tilde{U} \cup \hat{U}) \setminus E$, 极限

$$\tilde{W}^{(a)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{W}_n^{(a)} \quad (2.1)$$

几乎处处存在, $E_\xi \tilde{W}^{(a)} \leq 1 = E_\xi \tilde{W}_n^{(a)}$; 且 $\tilde{W}_n^{(a)}$ 和 $\tilde{W}^{(a)}$ 的分布满足: 若 $|a| = m$, 则

$$P_\xi(\tilde{W}_n^{(a)} \in \cdot) = P_{\theta^m \xi}(\tilde{W}_n^{(\emptyset)} \in \cdot), \quad P_\xi(\tilde{W}^{(a)} \in \cdot) = P_{\theta^m \xi}(\tilde{W}^{(\emptyset)} \in \cdot). \quad (2.2)$$

由于序列 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ 是独立同分布的, 故

$$P(\tilde{W}^{(a)} \in \cdot) = P(\tilde{W}^{(\emptyset)} \in \cdot). \quad (2.3)$$

对于永恒粒子 $a \in E$, 记 $\hat{T}^{(a)}$ 为 $\hat{T}$ 在 a 处的平移树, 其精确定义如下:

$$\hat{T}^{(a)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{T}_n^{(a)}, \quad \hat{T}_0^{(a)} = \{0_0\}, \quad \hat{T}_{n+1}^{(a)} = \{0_{n+1}\} \cup \{ui : u \in \hat{T}_n^{(a)}, 1 \leq i \leq X_{au}\}, \quad n \geq 0.$$

由定义可以看出, $\hat{T}^{(0_0)} = \hat{T}$. 令

$$\hat{Z}_n^{(a)} = \# \hat{T}_n^{(a)}, \quad \hat{W}_n^{(a)} = \frac{\hat{Z}_n^{(a)}}{m_{|a|} \cdots m_{|a|+n-1}}, \quad a \in E.$$

我们容易看出, 对于 $n \geq 1$ 有分解式

$$\hat{Z}_n^{(0_0)} = \hat{Z}_{n-1}^{(0_1)} + \sum_{i=1}^{Y_0} \tilde{Z}_{n-1}^{(0_0 i)},$$

从而,

$$\hat{W}_n^{(0_0)} = \frac{1}{m_0} \hat{W}_{n-1}^{(0_1)} + \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{Y_0} \tilde{W}_{n-1}^{(0_0 i)}.$$

由此迭代并利用分解式 $Z_n = \tilde{Z}_n + \hat{Z}_n - 1$, 可以得到 (参见文献 [18, (4.13)])

$$W_n = \tilde{W}_n^{(\emptyset)} + \sum_{k=1}^n \Pi_k^{-1} \sum_{i=1}^{Y_{k-1}} \tilde{W}_{n-k}^{(0_{k-1} i)}, \quad (2.4)$$

其中对任意的 $k, i = 1, 2, \dots$, 约定 $\tilde{W}_0^{(0_{k-1} i)} = 1$.

我们将用到下面关于 W 和 $\tilde{W}$ 的联系的结果.

命题 2.1 (参见文献 [18, 定理 3.2 和引理 4.1]) 假设 $E \log^+ \frac{Y_0}{m_0} < \infty$, 则 $W := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ 几乎处处存在, 它取值于 $[0, \infty)$, 且满足如下的分解公式:

$$W = \tilde{W}^{(\emptyset)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k^{-1} \sum_{i=1}^{Y_{k-1}} \tilde{W}^{(0_{k-1} i)} \quad \text{P-a.s.} \quad (2.5)$$

命题 2.2 (参见文献 [18, 定理 6.2]) 设 $p \in (0, 1)$. 若

$$Em_0^{-p} < 1 \quad \text{且} \quad E\left(\frac{Y_0}{m_0}\right)^p < \infty, \quad (2.6)$$

则 $\sup_{n \geq 0} EW_n^p < \infty$; 反之, 若 $\sup_{n \geq 0} EW_n^p < \infty$, 则

$$Em_0^{-p} \leq 1 \quad \text{且} \quad E\left(\frac{Y_0}{m_0}\right)^p < \infty. \quad (2.7)$$

命题 2.3 (参见文献 [18, 定理 6.1]) 设 $p > 1$. 考虑下面 5 个论述:

- (i) (W_n) 是 $L^p(P)$ 收敛的;
- (ii) (W_n) 是 $L^p(P)$ 有界的;
- (iii) $W^* = \sup_{n \geq 0} W_n$ 满足 $EW^{*p} < \infty$;
- (iv) $Em_0^{-p} < 1$, $E(\frac{X_0^p}{m_0^p}) < \infty$ 且 $E(\frac{Y_0^p}{m_0^p}) < \infty$;
- (v) $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ 几乎处处存在且 $0 < EW^p < \infty$,

我们有 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v).

3 定理 1.1 的证明

由于

$$\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\log W_n}{\sigma\sqrt{n}},$$

在本文条件下 $\log W_n$ 收敛于非退化且有限的 $\log W$, 故右边第二项趋向于 0, 这样由关于随机游动 (S_n) 的中心极限定理马上得到关于 $\log Z_n$ 的中心极限定理. 为了得到其 Berry-Esseen 界, 我们将证明 $\log W_n$ 以指数速率收敛到 $\log W$, 并得到关于 $\log Z_n$ 与 S_n 的比较定理. 该比较定理表明 $\log Z_n$ 与 S_n 异向的概率很小, 换句话说, 对任意的实数 x , 以大的概率二者同时小于或者同时大于 x . 为了思路清晰, 我们先不加证明地给出该比较定理, 并在此基础上完成定理 1.1 的证明. 在下面的陈述中, C 表示一个正常数, 它在不同的地方可以取不同的值.

引理 3.1 假设存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 使得

$$E(\log m_0)^{2+\delta} < \infty, \quad (3.1)$$

且存在常数 $p > 1$ 使得

$$E\left(\frac{X_0}{m_0}\right)^p < \infty \quad \text{和} \quad E\left(\frac{Y_0}{m_0}\right)^p < \infty, \quad (3.2)$$

则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$P\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}, \quad (3.3)$$

且

$$P\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}. \quad (3.4)$$

下面利用引理 3.1 完成定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 注意到,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right). \end{aligned}$$

由引理 3.1, 可以得到

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \right| \leq \frac{C}{n^{\delta/2}}.$$

利用经典随机游动的 Berry-Esseen 估计界, 定理 1.1 得证. $\square$

下面证明引理 3.1. 为此先证明另外两个引理.

(2.5) 提示了 W 可以看作一些与 $\tilde{W}$ 同分布的随机变量的线性组合, 这使我们可以将 $\tilde{W}$ 的一些估计结果过渡到 W .

引理 3.2 假设存在实数 $p > 1$ 使得 $\mathbb{E}|\log m_0|^{2p} < \infty$, 且存在常数 $\epsilon > 0$ 使得 $\mathbb{E}(Y_0/m_0)^\epsilon < \infty$, 则对任意的 $q \in (0, p)$, 有

$$\mathbb{E}|\log W|^q < \infty \quad \text{且} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q < \infty.$$

证明 利用 Hölder 不等式, 只需要证明 $q \in (1, p)$ 时引理 3.2 成立. 注意到对任意的 $\epsilon > 0$, 存在常数 C 使得对任意 $x > 0$, 有 $|\log x|^{q1_{\{x>1\}}} \leq Cx^\epsilon$. 应用该不等式和 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\log W|^q &= \mathbb{E}|\log W|^q I_{(W \leq 1)} + \mathbb{E}|\log W|^q I_{(W > 1)} \\ &= q \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} (\log t)^{q-1} \mathbb{P}(W \leq t^{-1}) dt + \mathbb{E}|\log W|^q I_{(W > 1)} \\ &\leq q \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} (\log t)^{q-1} \mathbb{P}(W \leq t^{-1}) dt + CEW^\epsilon. \end{aligned} \quad (3.5)$$

先看右端第一项. 利用 Markov 不等式和 $W \geq \tilde{W}^{(0)}$ a.s. (参见 (2.5)), 有

$$\mathbb{P}(W \leq t^{-1}) = \mathbb{P}(e^{-tW} \geq e^{-1}) \leq e\mathbb{E}e^{-tW} \leq e\mathbb{E}e^{-t\tilde{W}^{(0)}} \leq C(\log t)^{-p},$$

这里最后一步利用了文献 [11, (2.2)].

再看右端第二项. 注意到 $p_0 = 0$ a.s. 与 $\sigma > 0$ 隐含了 $m_0 \geq 1$ a.s. 且 $\mathbb{E}m_0^{-\epsilon} < 1$. 由 Fatou 引理和命题 2.2, 容易得到在引理 3.2 条件下, 有 $\mathbb{E}W^\epsilon < \infty$.

故对于 $q \in (1, p)$, 有

$$\mathbb{E}|\log W|^q \leq q \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} (\log t)^{q-p-1} dt + CEW^\epsilon < \infty.$$

同样,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q I_{(W_n \leq 1)} + \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log W_n|^q I_{(W_n > 1)}$$

$$\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log W_n|^q I_{(W_n \leq 1)} + C \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} W_n^\epsilon. \quad (3.6)$$

对于上式第一项, 由于 $|\log^q(x)|I_{(x \leq 1)}$ ($q \in (1, p)$) 是一个减函数且 $W_n \geq \tilde{W}_n$ a.s., 故有

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log W_n|^q I_{(W_n \leq 1)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log \tilde{W}_n^{(\emptyset)}|^q I_{(\tilde{W}_n^{(\emptyset)} \leq 1)} < \infty,$$

这里最后一步利用了文献 [11, 引理 2.3].

对于 (3.6) 中第二项, 利用命题 2.2, 在引理 3.2 的条件下, 有 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} W_n^\epsilon < \infty$.

故从 (3.6) 得到

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |\log W_n|^q < \infty.$$

证毕. □

引理 3.3 假设存在实数 $p > 1$, 使得 $\mathbb{E} |\log m_0|^{2p} < \infty$,

$$\mathbb{E} \left(\frac{X_0}{m_0} \right)^p < \infty \quad \text{且} \quad \mathbb{E} \left(\frac{Y_0}{m_0} \right)^p < \infty,$$

则存在常数 $C > 0$ 和 $\delta \in (0, 1)$, 使得对任意的 $n \geq 0$, 有

$$\mathbb{E} |\log W_n - \log W| \leq C \delta^n.$$

证明 由定义 (1.1), 有

$$W_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{\Pi_{n+1}} = \frac{1}{\Pi_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \frac{X_{n,i}}{m_n} + \frac{Y_n}{\Pi_n m_n}.$$

由此可以推出

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{\Pi_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right) + \frac{Y_n}{\Pi_n m_n},$$

从而,

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} - 1 = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right) + \frac{Y_n}{Z_n m_n}.$$

因此,

$$\log W_{n+1} - \log W_n = \log(1 + \eta_n), \quad (3.7)$$

其中

$$\eta_n = \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right) + \frac{Y_n}{Z_n m_n}. \quad (3.8)$$

注意到在 P_ξ 下, $\{\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1\}_{i \geq 1}$ 是一列零均值独立同分布且与 Z_n 独立的随机变量, 且 $\frac{Y_n}{m_n}$ 也与 Z_n 独立. 不妨设 $1 < p < 2$. 利用凸性不等式 $|x + y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$ 、Zygmund 不等式和函数 $x \mapsto x^{p/2}$ 的次可加性, 得到

$$\mathbb{E}_\xi |\eta_n|^p \leq \mathbb{E}_\xi \left(2^{p-1} \left(\left| \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right) \right|^p + \left| \frac{Y_n}{Z_n m_n} \right|^p \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi \left(\mathbb{E}_\xi \left(\left| \frac{1}{Z_n} \sum_{i=1}^{Z_n} \left(\frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right) \right|^p \middle| Z_n \right) \right) + 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi \left| \frac{Y_n}{Z_n m_n} \right|^p \\
&\leq 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi \left(2^p \cdot Z_n^{-p} \mathbb{E}_\xi \left(\sum_{i=1}^{Z_n} \left| \frac{X_{n,i}}{m_n} - 1 \right|^2 \right)^{p/2} \middle| Z_n \right) + 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi \left(Z_n^{-p} \left| \frac{Y_n}{m_n} \right|^p \right) \\
&\leq 2^{2p-1} \mathbb{E}_\xi \left(Z_n^{1-p} \mathbb{E}_\xi \left| \frac{X_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p \right) + 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi \left(Z_n^{-p} \left| \frac{Y_n}{m_n} \right|^p \right) \\
&= 2^{2p-1} \mathbb{E}_\xi Z_n^{1-p} \mathbb{E}_\xi \left| \frac{X_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p + 2^{p-1} \mathbb{E}_\xi Z_n^{-p} \mathbb{E}_\xi \left| \frac{Y_n}{m_n} \right|^p. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{E}_\xi Z_n^{1-p}$ 仅依赖于 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, 故与 $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{X_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p$ 和 $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{Y_n}{m_n} \right|^p$ 都是独立的. 同时注意到, $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{X_{n,1}}{m_n} - 1 \right|^p$ 和 $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{Y_n}{m_n} \right|^p$ 分别与 $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{X_0}{m_0} - 1 \right|^p$ 和 $\mathbb{E}_\xi \left| \frac{Y_0}{m_0} \right|^p$ 同分布, 在 (3.9) 两端同时取期望, 得到

$$\mathbb{E}|\eta_n|^p \leq 2^{2p-1} \mathbb{E} Z_n^{1-p} \mathbb{E} \left| \frac{X_0}{m_0} - 1 \right|^p + 2^{p-1} \mathbb{E} Z_n^{1-p} \mathbb{E} \left| \frac{Y_0}{m_0} \right|^p. \tag{3.10}$$

由文献 [11, 引理 2.4] 知, 对 $p > 1$, 有

$$\mathbb{E} \tilde{Z}_n^{1-p} \leq (\mathbb{E} \tilde{Z}_1^{1-p})^n.$$

由于 $Z_n \geq \tilde{Z}_n$ 且 $p > 1$, 因此,

$$\mathbb{E} Z_n^{1-p} \leq \mathbb{E} \tilde{Z}_n^{1-p} \leq (\mathbb{E} \tilde{Z}_1^{1-p})^n = (\mathbb{E}[m_0(1-p)])^n, \tag{3.11}$$

其中 $m_0(1-p) := \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-p} p_k(\xi_0)$.

将 (3.11) 代入 (3.10), 得到

$$(\mathbb{E}|\eta_n|^p)^{1/p} \leq C\delta^n, \tag{3.12}$$

其中

$$\delta = (\mathbb{E}[m_0(1-p)])^{1/p} \in (0, 1), \quad C = 2 \max \left\{ \left(\mathbb{E} \left| \frac{X_0}{m_0} \right|^p \right)^{1/p}, \left(\mathbb{E} \left| \frac{Y_0}{m_0} \right|^p \right)^{1/p} \right\} < \infty.$$

选取一个常数 $M \in (0, 1)$. 利用 (3.7) 容易看出,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\log W_{n+1} - \log W_n| &= \mathbb{E}|\log(1 + \eta_n)|1(\eta_n \geq -M) + \mathbb{E}|\log(1 + \eta_n)|1(\eta_n < -M) \\
&=: I_n + J_n.
\end{aligned}$$

由 (3.12) 容易看出, 对于上式第一项, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$I_n \leq C\mathbb{E}|\eta_n| \leq C(\mathbb{E}|\eta_n|^p)^{1/p} \leq C\delta^n. \tag{3.13}$$

由引理 3.2 和 (3.7) 可知, 在引理 3.3 的条件下, 对任意的 $r \in (0, p)$, 有

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|\log(1 + \eta_n)|^r < \infty.$$

设 $r, s > 1$ 满足 $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ 且 $r < p$. 由 Hölder 不等式和 Markov 不等式知, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$J_n \leq (\mathbb{E}|\log(1 + \eta_n)|^r)^{1/r} \mathbb{P}(\eta_n < -M)^{1/s} \leq C\mathbb{P}(|\eta_n| > M)^{1/s} \leq C(\mathbb{E}|\eta_n|^p)^{1/s} \leq C\delta^n. \tag{3.14}$$

综合 (3.13) 和 (3.14), 可得

$$E|\log W_{n+1} - \log W_n| \leq C\delta^n.$$

利用三角不等式, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 有

$$E|\log W_{n+k} - \log W_n| \leq C(\delta^n + \dots + \delta^{n+k-1}) \leq \frac{C}{1-\delta}\delta^n.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 由 Fatou 引理得到

$$E|\log W - \log W_n| \leq \frac{C}{1-\delta}\delta^n.$$

引理 3.3 得证. $\square$

引理 3.1 的证明 由于方法类似, 因此只证明 (3.3). 令 $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $m = [\sqrt{n}]$, 其中 $[\cdot]$ 表示取整数部分. 记

$$X_i = \log m_i, \quad S_{m,n} = \sum_{i=m+1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}, \quad U_m = \frac{\log W_m}{\sigma}, \quad U_{m,n} = U_n - U_m.$$

容易看出,

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{\log Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \geq x\right) \\ &= P\left(\frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} + \frac{U_n}{\sqrt{n}} \leq x, \frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} \geq x\right) \\ &\leq P\left(\frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} + \frac{U_m}{\sqrt{n}} \leq x + \alpha_n, \frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} \geq x\right) + P\left(\left|\frac{U_n - U_m}{\sqrt{n}}\right| > \alpha_n\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

对于上式右端第二项, 利用 Markov 不等式和引理 3.2 可知, 存在一个常数 $\delta \in (0, 1)$ 使得

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{U_n - U_m}{\sqrt{n}}\right| > \alpha_n\right) &\leq \frac{E|U_n - U_m|}{\sqrt{n}\alpha_n} = \frac{E|\log W_n - \log W_m|}{\sigma} \\ &\leq \sigma^{-1}(E|\log W_n - \log W| + E|\log W_m - \log W|) \\ &\leq C\delta^n + C\delta^m \\ &\leq 2C\delta^m. \end{aligned}$$

对于 (3.15) 右端的第一项, 我们利用分解技巧来处理. 注意到, $S_{0,n} = S_{0,m} + S_{m,n}$. 令 $F_{m,n}(x) = P(\frac{S_{m,n}}{\sqrt{n}} \leq x)$, $F_n(x) = F_{0,n}(x)$, $\nu_{m,n}(ds, dt) = P(\frac{S_{0,m}}{\sqrt{n}} \in ds, \frac{U_m}{\sqrt{n}} \in dt)$. 由于 $(\frac{S_{0,m}}{\sqrt{n}}, \frac{U_m}{\sqrt{n}})$ 与 $\frac{S_{m,n}}{\sqrt{n}}$ 相互独立, 故

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{S_{0,n} + U_m}{\sqrt{n}} \leq x + \alpha_n, \frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} \geq x\right) \\ &= P\left(\frac{S_{m,n} + U_m + S_{0,m}}{\sqrt{n}} \leq x + \alpha_n, \frac{S_{m,n} + S_{0,m}}{\sqrt{n}} \geq x\right) \\ &= \int P\left(\frac{S_{m,n}}{\sqrt{n}} + s + t \leq x + \alpha_n, \frac{S_{m,n}}{\sqrt{n}} + s \geq x\right) \nu_{m,n}(ds, dt) \\ &= \int 1(t \leq \alpha_n)(F_{m,n}(x - s - t + \alpha_n) - F_{m,n}(x - s)) \nu_{m,n}(ds, dt). \end{aligned} \quad (3.16)$$

注意到,

$$F_{m,n}(x) = P\left(\sum_{i=m+1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = F_{n-m}\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n-m}}\right) = F_{n-m}(x(1+R_n)),$$

这里利用了 $(1 - \frac{m}{n})^{-1/2} = 1 + R_n$, 其中 $0 \leq R_n \leq C/\sqrt{n}$.

由中值定理, 对任意实数 x , 有

$$|\Phi(x(1+R_n)) - \Phi(x)| \leq R_n |x\Phi'(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

这里最后一步利用了 $x\Phi'(x)$ 是一个有界函数.

所以, 由经典随机游动的 Berry-Esseen 估计和条件 $E(\log m_0)^{2+\delta} < \infty$, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} |F_{m,n}(x) - \Phi(x)| &\leq |F_{n-m}(x(1+R_n)) - \Phi(x(1+R_n))| + |\Phi(x(1+R_n)) - \Phi(x)| \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta/2}} + \frac{C}{\sqrt{n}} \leq \frac{2C}{n^{\delta/2}}. \end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{S_{0,n} + U_m}{\sqrt{n}} \leq x + \alpha_n, \frac{S_{0,n}}{\sqrt{n}} \geq x\right) \\ &\leq \int 1(t \leq \alpha_n)(\Phi(x-s-t+\alpha_n) - \Phi(x-s))\nu_{m,n}(ds, dt) + \frac{C}{n^{\delta/2}} \\ &\leq \int 1(t \leq \alpha_n)|-t + \alpha_n|\nu_m(ds, dt) + \frac{C}{n^{\delta/2}} \\ &\leq \int 1(t \leq \alpha_n)\left(|t| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\nu_{m,n}(ds, dt) + \frac{C}{n^{\delta/2}} \\ &\leq \int |t|\nu_{m,n}(ds, dt) + \frac{C}{n^{\delta/2}} \\ &= \frac{E|\log W_m|}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{C}{n^{\delta/2}} \\ &\leq \frac{C}{n^{\delta/2}}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

这里第二个不等式应用了中值定理以及显然的不等式 $|\Phi'(x)| \leq 1$.

将上述结果代入 (3.15), (3.3) 得证. $\square$

致谢 作者衷心感谢审稿专家和编委的评论和建议.

参考文献

- 1 Afanasyev V I, Böinghoff C, Kersting G, et al. Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. *J Theoret Probab*, 2012, 25: 703–732
- 2 Afanasyev V I, Böinghoff C, Kersting G, et al. Conditional limit theorems for intermediately subcritical branching processes in random environment. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2014, 50: 602–627
- 3 Vatutin V A. A refinement of limit theorems for the critical branching processes in random environment. In: *Workshop on Branching Processes and Their Applications. Lecture Notes in Statistics*, vol. 197. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010, 3–19
- 4 Vatutin V A, Zheng X. Subcritical branching processes in a random environment without the Cramer condition. *Stochastic Process Appl*, 2012, 122: 2594–2609
- 5 Bansaye V, Berestycki J. Large deviations for branching processes in random environment. *Markov Process Related Fields*, 2009, 15: 493–524

- 6 Bansaye V, Böinghoff C. Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment. *Proc Steklov Inst Math*, 2013, 282: 15–34
- 7 Bansaye V, Böinghoff C. Small positive values for supercritical branching processes in random environment. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2014, 50: 770–805
- 8 Bansaye V, Böinghoff C. Upper large deviations for branching processes in random environment with heavy tails. *Electron J Probab*, 2011, 16: 1900–1933
- 9 Böinghoff C, Kersting G. Upper large deviations of branching processes in a random environment—Offspring distributions with geometrically bounded tails. *Stochastic Process Appl*, 2010, 120: 2064–2077
- 10 Hong W, Liu M, Vatutin V A. Limit theorems for supercritical MBPRE with linear fractional offspring distributions. *Markov Process Related Fields*, 2019, 25: 1–31
- 11 Grama I, Liu Q, Miqueu E. Berry-Esseen’s bound and Cramér’s large deviation expansion for a supercritical branching process in a random environment. *Stochastic Process Appl*, 2017, 127: 1255–1281
- 12 Huang C, Liu Q. Moments, moderate and large deviations for a branching process in a random environment. *Stochastic Process Appl*, 2012, 122: 522–545
- 13 Huang C, Liu Q. Convergence in L^p and its exponential rate for a branching process in a random environment. *Electron J Probab*, 2014, 19: 1–22
- 14 Liang X, Liu Q. Weighted moments of the limit of a branching process in a random environment. *Proc Steklov Inst Math*, 2013, 282: 127–145
- 15 Kesten H, Kozlov M V, Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment. *Compos Math*, 1975, 30: 145–168
- 16 Bansaye V. Cell contamination and branching processes in a random environment with immigration. *Adv in Appl Probab*, 2009, 41: 1059–1081
- 17 Vatutin V A. Multitype branching processes with immigration in random environment, and polling systems. *Siberian Adv Math*, 2011, 21: 42–72
- 18 Wang Y Q, Liu Q S. Limit theorems for a supercritical branching process with immigration in a random environment. *Sci China Math*, 2017, 60: 2481–2502
- 19 He H, Li Z, Xu W. Continuous-state branching processes in Lévy random environments. *J Theoret Probab*, 2018, 31: 1952–1974
- 20 Li Y Q, Hu Y L, Zhang Y. Limiting behaviors of bisexual branching processes in random environments (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 611–622 [李应求, 胡杨利, 张影. 随机环境中两性分枝过程的极限性质. *中国科学: 数学*, 2015, 45: 611–622]
- 21 Li Z H, Yang X, Zong G W. A class of super-Lévy processes in random environment (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2020, 50: 69–86 [李增沪, 杨叙, 宗国纬. 一类随机环境中的超 Lévy 过程. *中国科学: 数学*, 2020, 50: 69–86]
- 22 Liu W, Ma C, Li Y, et al. A strong limit theorem for the average of ternary functions of Markov chains in bi-infinite random environments. *Statist Probab Lett*, 2015, 100: 12–18

Berry-Esseen’s bound for a supercritical branching process with immigration in a random environment

Yanqing Wang & Quansheng Liu

Abstract We consider a supercritical branching process with immigration in an independent and identically distributed random environment. Based on its relations with branching processes (without immigration) in random environments and by using the associated random walks, we establish the Berry-Esseen bound in the central limit theorem for $\log Z_n$ under suitable moment conditions.

Keywords branching process, random environment, central limit theorem, Berry-Esseen bound

MSC(2020) 60J80, 60F05

doi: 10.1360/SSM-2019-0206